

ԱՐԴԱՂԱՅԱՆ Մ. Գ.

ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆԵՆԵՐԸ

Թույլատրված է

«Կրթության և գիտության նախարարության կողմից
որպես դասագիրք՝ բուհերի ֆիզմաթ,
բնագիտական, մանկավարժական և ճարտարագիտական
մասնագիտությունների ուսանողների համար

Հրատարակության է երաշխավորել ԵՊՀ
Ֆիզիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

Գրախոսներ՝ ՀՀ ՁԱԱ ակադեմիկոսներ՝
Դ.Մ.Սեդրալյան, է. Վ. Զուբարյան

Աղբյուրական Մ. Գ.

Ա 181 Մեխանիկայի ֆիզիկական հիմունքները. Դասագիրք. - Երևանի պետ. համալս. հրատ., 2008, 398 էջ

Դասագիրքը կազմված է ֆիզիկայի ընդհանուր դասընթացի "Մեխանիկա" առարկայի ծրագրերին համապատասխան և ընդգրկում է նրա բոլոր բաժինները: Ելուստնյան և ռելատիվիստական մեխանիկաների հիմունքները հիմնականում շարադրված են գույքաձևով: Հատուկ ուշադրություն է դարձված տեսության հիմք կազմող հիմնական փորձերին ու դրույթներին:

Նախատեսված է ուսանողների, ասպիրանտների, դասախոսների համար: Օգտակար կլինի հանրակրթական և հատկապես ֆիզմաթ թեքմամբ դպրոցների ուսուցիչների համար:

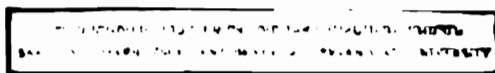
Ա $\frac{1603010000}{704(02)08}$ 2008

ՁԱՂ 22.2 y 73

ISBN 978-5-8084-0860-9

© Արարիչական Մ. Գ. 2008 թ.

205 491
SU0093 182



ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԱՌԱՋԱԲԱՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

- §1. Ֆիզիկան որպես հիմնարար բնական գիտություն
Սեխանիկայի կիրառելիության սահմանները 9
- §2. Տարածություն և ժամանակ: Հաշվարկի համակարգ
Մաթեմատիկայի դերը ֆիզիկայում..... 12

ԳԼՈՒԽ I. ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ

- §3. Վեկտորական եղանակ 20
- §4. Կոորդինատային եղանակ 22
- §5. Բնական եղանակ 25
- §6. Նյութական կետի շարժումը շրջանագծով 30
Խնդիրների լուծման օրինակներ 33

ԳԼՈՒԽ II. ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

- §7. Հաշվարկի ինտեգրալ համակարգեր: Նյուտոնի առաջին օրենքը 37
- §8. Ձանգված: Ուժ: Նյուտոնի երկրորդ օրենքը 38
- §9. Նյուտոնի երրորդ օրենքը: Փոխազդեցության ձևերը 42
- §10 Ռելատիվիստական շարժման հավասարումը 46
- §11. Սեխանիկայի ուղիղ և հակադարձ խնդիրներ 48

ԳԼՈՒԽ III. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԿՋԲՈՒՆՔ

- §12. Հարաբերականության ընդհանուր հասկացությունը:
Ճապիոխության բանաձևեր 57
- §13 Գալիլեյի ձևափոխությունները 61
- §14. Լորենցի ձևափոխությունները 65
- §15. Հարաբերականության հատուկ տեսության հիմնադրույթները:
Միաժամանակության հարաբերականությունը Լորենցի
ձևափոխությունների ստացումը 70
- §16. Լորենցյան կրճատման և ժամանակի դանդաղման էֆեկտները 76
- §17. Ինտերվալ, նրա ինվարիանտությունը 82

§18. Ռեյատիվիստական արագությունների գումարմաէ կանոնը	85
Խնդիրներ	90

ԳԼՈՒԽ IV. ԻՄՊՈՒԼՄԻ ԵՎ ԷՆԵՐԳԻԱՑԻ

ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐԸ

§19. Նյութական կետերի համախումբ: Ազատության աստիճաններ: Պահպանման օրենքներ	91
§20. Համախմբի իմպուլսը: Նրա փոփոխման օրենքը	96
§21. Իներցիայի կենտրոն, նրա շարժման թեորեմը Հաշվարկի Ը համակարգ	100
§22. Իմպուլսի պահպանման օրենքը	103
§23. Մեխանիկական աշխատանք	107
§24. Պոտենցիալային ուժադաշտեր	111
§25. Պոտենցիալ էներգիա, նրա կապը ուժի հետ	114
§26. Կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքը համախմբում	117
§27. Կինետիկ էներգիա: Կինետիկ էներգիայի թեորեմը	120
§28. Դիսիպատիվ ուժեր, նրանց աշխատանքը	122
§29. Մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքը	130
§30. Ֆինիտ և ինֆինիտ շարժումներ: Հավասարակշռություն և Կայունություն	133
§31. Ռեյատիվիստական էներգիա: Ուժի, իմպուլսի և էներգիայի ծափոխության բանաձևերը	135
§32. Զանգվածի և էներգիայի փոխադարձ փոխակերպումներ	143
§33. Ֆոտոն: Ղապերի էֆեկտը օպտիկայում	146

ԳԼՈՒԽ V. ԻՄՊՈՒԼՄԻ ՄՈՄԵՆՏԻ ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔԸ

§34. Մոմենտների հավասարումը: Իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքը	150
§35. Սեփական իմպուլսի մոմենտ	156
§36. Ուժի և իմպուլսի մոմենտներն անշարժ առանցքի նկատմամբ: Շարժվող սկզբնակետի նկատմամբ մոմենտների հավասարումը	158
§37. Անշարժ առանցքի շուրջ համախմբի պտույտը	160
§38. Անկյունային մոմենտի պահպանման օրինակներ	164
Խնդիր	170

ԳԼՈՒԽ VI. ԲԱՆՈՒՄՆԵՐ

§39. Բացարձակ ոչ առածգական բախում.....	172
§40. Բացարձակ առածգական բախում.....	176
§41. Ոչ առածգական բախում.....	182
§42. Ռելատիվիստական մեխանիկայի փորձարարական իմունավորումը	184
§43. Փոփոխվող զանգվածով մարմնի շարժումը.....	188

ԳԼՈՒԽ VII. ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

§44. Պինդ մարմնի շարժման ձևերն ու հավասարակշռությունը.....	195
§45. Պինդ մարմնի գնդային շարժումը: Իներցիայի մոմենտի թեմզորական բնույթը	200
§46. Շտեյների թեորեմը: Իներցիայի մոմենտի հաշվումը.....	205
§47. Պինդ մարմնի հարթ շարժումը	210
§48. Շփման ուժերը գլորման ժամանակ	215
§49. Հոլակ: Հոլակի ազատ ճոճքը.....	221
§50. Հոլակային էֆեկտ: Հոլակային ուժեր.....	223
§51. Հոլակի հարկադրական ճոճքը: Նուտացիաներ և սնդիրներ	226
	232

ԳԼՈՒԽ VIII. ԵԱՐԺՈՒՄԸ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՈՉ ԻՆԵՐՑԻԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ

§52. Հաշվարկի ոչ իներցիալ համակարգեր (ՀՈՀ).....	234
§53. Համընթաց շարժվող ՀՈՀ-եր: Իներցիայի ուժեր.....	236
§54. Շարժման հավասարումը հաշվարկի կամայական ոչ իներցիալ համակարգում	240
§55. Պահպանման օրենքները հաշվարկի ոչ իներցիալ համակարգում	245
§56. Շարժումը Երկրակենտրոն հաշվարկի համակարգում	247
§57. Մարմինների կշիռը: Անկշռելիություն	249
§58. Ազատ ընկնող մարմնի չեղումը ուղղաձիգից.....	252
§59. Դուրկոյի ճոճանակը	254
և սնդիրներ	257

ԳԼՈՒԽ IX. ՏԻԵԶԵՐԱԿԱՆ ԶԳՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

§60. Կեպլերի օրենքները: Տիեզերական ծաղուքյան օրենքը	260
§61. Գրավիտացիոն դաշտ: Դաշտի բնութագրերը	264
§62. Գնդի գրավիտացիոն դաշտը և սեփական գրավիտացիոն էներգիան: Գրավիտացիոն շառավիղ	268
§63. Կեպլերի խնդիրը	272
§64. Երկու մարմնի խնդիր: Երեք մարմնի տախմանափակ խնդիր	276
§65. Մոլորակների իրական շարժումը Արեգակնային համակարգում	278
§66. Երկրի արհեստական արբանյակների շարժումը	280
§67. Իներտ և գրավիտացիոն զանգվածներ: Էտվենշի փորձը	283
§68. Հարաբերականության ընդհանուր տեսության հիմունքները	286
§69. Գրավիտացիոն կարմիր շեղում	290
§70. Լույսի ճառագայթի շեղումը Արեգակի գրավիտացիոն դաշտում ... Խնդիրներ	292 294

ԳԼՈՒԽ X. ԱՌԱԶԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

§71. Հոծ միջավայրի ընդհանուր հասկացությունը: Դեֆորմացիաներ	296
§72. Զգում և սեղմում: Հուկի օրենքը	298
§73. Առաձգական դեֆորմացիայի էներգիան	303
§74. Սահքի դեֆորմացիա	305
§75. Ոլորում և ճկում	307

ԳԼՈՒԽ XI. ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐ

§76. Ներդաշնակ տատանումներ	313
§77. Ոչ գծային տատանումներ	316
§78. Ֆիզիկական և մաթեմատիկական ճոճանակներ	319
§79. Մարող տատանումներ	322
§80. Հարկադրական տատանումներ: Ռեզոնանս	325
§81. Երկու և ավելի ազատության աստիճանով համակարգերի տատանումները: Զարկեր	329

- ԳԼՈՒԽ XII. ԱՆԻՔՆԵՐԸ ԱՌԱՋԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

§82. Ալիքային շարժման կինեմատիկա.....	335
§83. Ալիքային հավասարում. Ալիքի փուլային արագությունը	339
§84. Ալիքի էներգիան: Փոթինգի վեկտորը.....	341
§85. Ալիքների վերադրումը	343
§86. Կանգուն ալիքներ	345
§87. Ակուստիկա.....	347

ԳԼՈՒԽ XIII. ՀԵՐՈՒԿՆԵՐԻ ԵՎ ԳԱԶԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

§88. Հեղուկների և գազերի հատկությունները	356
§89. Հոսանքի բնութագրերը: Նյութական ածանցյալ	358
§90. Հոսանքի անխզելիության հավասարումը	359
§91. Ելլերի հավասարումը	361
§92. Հիդրոստատիկայի հիմունքները	364
§93. Բարոմետրական բանաձևեր	367
~ §94. Մարմինների հավասարակշռությունը հեղուկում	369
* §95. Ստացիոնար հոսանք: Բեռնուլիի հավասարումը	371
§96. Մածուցիկ հեղուկ. Նավյե-Սթոքսի հավասարումը	375
§97. Կուլտի և Պուլագեյլի հոսանքներ	379
§98. Ռեյնոլդսի թիվ. Լամինար և տուրբուլենտ հոսանքներ	384
§99. Սահմանային շերտ	388
§100. Պինդ մարմնի շարժումը հեղուկում	390
§101. Չայնային ալիքներ	393
Ֆիզիկական և աստղագիտական որոշ հաստատուններ	396

ԱՌԱՋԻՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆԸ

Պատագիրքը գրված է ընդհանուր ֆիզիկայի բուհական ծրագրերի պահանջներին համապատասխան և ընդգրկում է «Մեխանիկայի ֆիզիկական հիմունքները» դասընթացի բոլոր բաժինները՝ Ուսանողը դասագրքում կգտնի ինչպես դասախոսությունների, այնպես էլ սեմինար և լաբորատոր պարապմունքներին անհրաժեշտ ամբողջ տեսական նյութը։ Սրանով և ոչ միայն, դասագիրքը շահեկանորեն տարբերվում է “Մեխանիկա” առարկայի գոյություն ունեցող դասագրքերից։

Պատագրքում նյութոնյան և ռելատիվիստական մեխանիկայի պատկերացումներն ու օրենքները շարադրված են հնարավորին չափ զուգահեռ։ Պա, ինչպես ցույց է տալիս փորձը, նպաստում է այդ երկու տեսությունների առավել խորը և արդյունավետ յուրացմանը։

Որպես ֆիզիկայի ընդհանուր դասընթացի բաժին, դասագիրքը նպատակ ունի ցույց տալ, որ ֆիզիկայի բոլոր հիմնարար օրենքներն արդյունք են փորձից ստացվող փաստերի ընդհանրացման։ Նրանում բերված և լուսաբանված են նյութոնյան և ռելատիվիստական մեխանիկայի հիմքը կազմող հիմնական փորձերը։ Սակայն դասընթացը չի սահմանափակվում փորձերի և դրանց ընդհանրացմամբ ստացված հիմնական օրենքների շարադրանքով։ Այն մեխանիկայի ֆիզիկական հիմունքների շարադրանք է ծրագրի պահանջներից բխող անհրաժեշտ մաթեմատիկական մակարդակով։

Հեղինակը իր երախտագիտությունն է հայտնում ԵՊՀ ընդհանուր ֆիզիկայի ամբիոնի և ֆիզիկայի ֆակուլտետի գիտական խորհրդի անդամներին՝ դասագիրքը ձեռագիր վիճակում կարդալու և արժեքավոր դիտողություններ կատարելու համար։

18-ը մարտի 1997թ.

Մ. Աբրահամյան

ԵՐԿՐՈՐԴ, ԲԱՐԵՓՈՒԽՎԱԾ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆԸ

Երկրորդ հրատարակության մեջ վերացված են նկատված վրիպակները, վերանայված և պարզեցված է որոշ թեմաների շարադրանքը, ավելացված է “Ակուստիկա” բաժինը։ Պատագիրքը համալրված է նոր իլյուստրացիաներով և խնդիր լուծման օրինակներով։

Այլաքների փոխարեն այս հրատարակության մեջ վեկտորական մեծությունները պատկերված են հաստ շեղատառերով։

Հեղինակը շնորհակալությամբ կընդունի դասագրքի բարելավմանը միտված ընթերցողի բոլոր դիտողությունները։

18-ը մարտի 2007թ.

Մ. Աբրահամյան

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

§1. ՖԻԶԻԿԱՆ ՈՐՈՇԵՄ ՇԻՄԱՐԱՐ ԲՆԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՑԻ ԿԻՐԱՌԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Մեր շրջապատում ընթացող բոլոր երևույթները մատերիայի շարժման դրսևորումներ են: Առաջին հայացքից քառասյին թվացող այդ երևույթների միջև գոյություն ունեն պատճառական կապեր և խիստ որոշակի օրինաչափություններ: Այդ օրինաչափությունների և կապերի բացահայտմանն է կոչված բնական և հասարակական գիտությունների ամբողջ համակարգը:

Ֆիզիկան հիմնարար բնական գիտություն է՝ Այն ուսումնասիրում է մատերիայի առավել ընդհանուր հատկությունները, մատերիայի շարժման առավել պարզ և ընդհանուր օրինաչափությունները:

Ֆիզիկան փորձարարական գիտություն է: Թեև ժամանակակից ֆիզիկական տեսություններն ունեն բավականաչափ բարդ և վերացական մաթեմատիկական կառուցվածք, սակայն նրանց հիմնական օրենքները փորձարարական փաստերի ընդհանրացման արդյունք են: Նույնիսկ այն հարցը, թե ինչ մաթեմատիկական ապարատ պետք է օգտագործել ֆիզիկայի այս կամ այն բաժնում, թելադրում է փորձը: Օրինակ, տարածության և ժամանակի անընդհատության փաստը ստիպում է օգտվել դիֆերենցիալ հաշվից, տարածության էվկլիդեսյան լինելը՝ վեկտորական հաշվից և այլն:

Ֆիզիկայի այս կամ այն օրենքի հիմքում ընկած փորձնական տվյալները բնութագրվում են չափումների ճշգրտության և քննարկվող մեծությունների փոփոխման տիրույթի սահմանափակությամբ: Այնպես որ, յուրաքանչյուր ֆիզիկական օրենք ունի կիրառելիության որոշակի սահմաններ: Չնայած դրան, ֆիզիկայում հաջողվել է ստանալ այնպիսի օրենքներ, որոնք համապարփակ բնույթ ունեն, այսինքն՝ գործում են մեզ հայտնի բոլոր ֆիզիկական երևույթներում՝ չափման ամենանուրբ ճշգրտության պայմաններում: Դրանցից են, օրինակ, էներգիայի, իմպուլսի, իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքները:

Կիրառելիության առավել լայն տիրույթ ընդգրկող ֆիզիկական օրենքները հաճախ անվանում են *հիմնարար օրենքներ*։ Պահպանման օրենքներից բացի հիմնարար օրենքների շարքին կարելի է դասել, օրինակ, Կուլոնի, Տիեզերական ծգողության օրենքները։ Մյուս կողմից՝ մի շարք ֆիզիկական օրենքներ ունեն կիրառելիության խիստ սահմանափակ տիրույթներ։ Օրինակ, թաց և չոր շփման օրենքները, Հուկի օրենքը իրականանում են հարաբերական արագության, ջերմաստիճանի, դեֆորմացիայի չափի խիստ սահմանափակ տիրույթներում։

Ֆիզիկական հետազոտություններն ընդգրկում են մատերիայի շարժման ընդարձակ ոլորտ։ Ժամանակակից ֆիզիկան մատերիայի տարբեր գոյածներ և շարժումներ ուսումնասիրող բաժինների ամբողջություն է։ Նրա առանձին բաժինները այսօր խիստ զարգացած ինքնուրույն գիտություններ են։ Ֆիզիկայում մշակված հետազոտական մեթոդները և ստացված հիմնարար օրենքները հաջողությամբ օգտագործվում են բնական մյուս գիտություններում։ Այս ճանապարհով ֆիզիկայի և բնական այլ գիտությունների սահմաններում առաջացել և հաջողությամբ զարգանում են նոր գիտություններ՝ քիմիական ֆիզիկան, կենսաֆիզիկան, երկրաֆիզիկան, աստղաֆիզիկան և այլն։

Ֆիզիկայի բաժիններից առավել վաղ զարգացել է մեխանիկան։

Մեխանիկան գիտություն է մարմինների շարժման և հավասարակշռության մասին։ Մատերիայի շարժումը լայն իմաստով նրա փոփոխություն է ընդհանրապես։ Մեխանիկան ուսումնասիրում է մատերիայի շարժման պարզագույն ձևը՝ ժամանակի ընթացքում մարմնի դիրքի փոփոխությունը այլ մարմինների նկատմամբ։ Մեխանիկայի հիմնական օրենքները, որոնք ձևակերպված են *Նյուտոնի* (1643-1727թթ.) կողմից շուրջ երեք դար առաջ, հաջողությամբ բացատրել են փորձնական փաստերն ընդհուպ XX դարը, երբ պարզ դարձավ, որ *Նյուտոնյան մեխանիկան վերաբերում է մակրոսկոպիկ մարմինների դանդաղ շարժումներին*։

Պարզաբանենք վերջին նախադասության իմաստը։

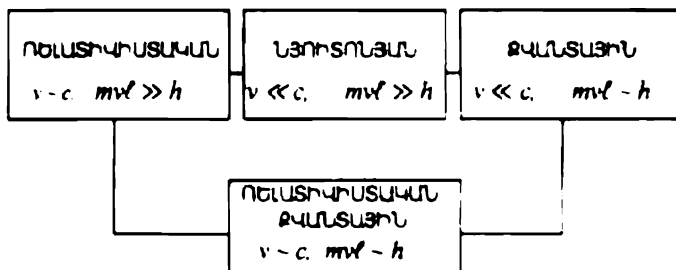
Շարժումների “արագ” կամ “դանդաղ” լինելը պարզելու համար գոյություն ունի արագության բնական բնութագրական չափ. դա *լույսի արագությունն* է վակուումում՝ $c = 3 \cdot 10^8$ մ/վ, որը մատերիական օբյեկտների սահմանային արագությունն է։ “Դանդաղ” ասելով հասկանում են այն շարժումները, որոնց արագություններն անհամեմատ փոքր են վակուումում լույսի արագությունից՝ $v \ll c$ ։ Լույսին մոտ արագություններով շարժումները կոչվում են *ռելատիվիստական* և ենթարկվում են *ռելատիվիստական մեխա-*

միկայի օրենքներին: Հարկ է նշել, որ գործնական կարևորություն ներկայացնող շատ խնդիրներում մենք գործ ունենք դանդաղ շարժումների հետ: Մասնավորապես, Արեգակնային համակարգի երկնային մարմինների շարժումները ենթարկվում են նյուտոնյան մեխանիկայի օրենքներին: Ռելատիվիստական շարժումների հանդիպում ենք հիմնականում արագացուցիչներում և տիեզերական որոշ երևույթների ուսումնասիրության խնդիրներում:

XX դարի սկզբին փորձնականորեն հաստատվեց, որ ֆիզիկական օբյեկտները օժտված են $\lambda = h/mv$ երկարությամբ *ալիքի հատկություններով* (դը Բրոյի, 1924 թ.), որտեղ m -ը և v -ն օբյեկտի զանգվածն ու արագությունն են, $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Ջ.վ.ժ-ը՝ *Պլանկի հաստատունը*: Սակայն օբյեկտի ալիքային հատկությունները դառնում են էական, եթե խնդրի բնութագրական գծային է չափը շատ չի տարբերվում նրա դը Բրոյի ալիքի λ երկարությունից՝ նման ֆիզիկական օբյեկտները կոչվում են *միկրոսկոպիկ* (միկրոմասնիկ, միկրոօբյեկտ), որոնց վարքը նկարագրվում է *բվանտային մեխանիկայի* օրենքներով: Միկրոմասնիկների օրինակներ են ատոմները, մոլեկուլները, միջուկները, նրանց բաղկացուցիչ մասերը և այլն: Միկրոմասնիկների հետ կապված երևույթները կոչվում են *միկրոսկոպիկ երևույթներ*:

Եթե ֆիզիկական օբյեկտի շարժման տիրույթի բնութագրական է չափը անհամեմատ մեծ է նրան համապատասխանող ալիքի երկարությունից $l \gg \lambda$, կամ $mv \gg h$, ապա օբյեկտը կոչվում է *մակրոսկոպիկ* և նրա ալիքային հատկությունները կարելի է անտեսել: Մակրոսկոպիկ մարմինների հետ կապված երևույթները կոչվում են *մակրոսկոպիկ երևույթներ*: Դրանք ենթարկվում են դասական մեխանիկայի՝ օրենքներին: Ուրեմն,

$$v \ll c, \quad mv \gg h \quad (1)$$



¹ Այս ասելով հասկանում են նյուտոնյան և ռելատիվիստական մեխանիկաները

պայմանները որոշում են նյութական մեխանիկայի կիրառելիության սահմանները: $v \ll c$ պայմանի խախտման դեպքում պետք է օգտվել *ռելատիվիստական* մեխանիկայի օրենքներից, երկրորդի խախտման դեպքում *քվանտային* մեխանիկայի օրենքներից: Եթե խախտված են թե՛ մեկ, թե՛ մյուս պայմանները, ապա՝ *ռելատիվիստական քվանտային* մեխանիկայից (Նկ. 1): Ռելատիվիստական և քվանտային մեխանիկաները առավել ընդհանուր տեսություններ են, որոնք մասնավոր դեպքերում, երբ $c \rightarrow \infty$ և $\hbar \rightarrow 0$, տալիս են նյութական մեխանիկայի արդյունքները: Սա, իհարկե, չի նշանակում թե նյութական մեխանիկան կորցրել է իր արժեքը: Կիրառելիության (1) շրջանակներում, որոնք ընդգրկում են չափազանց լայն ոլորտի երևույթներ, նյութական մեխանիկան տալիս է ճշգրիտ արդյունքներ: Իսկ այնպիսի խնդիրներ, ինչպիսիք են, օրինակ, ատոմում էլեկտրոնների վարքի ուսումնասիրությունը, լիցքերի շարժումը արագացուցիչներում, պետք է լուծել քվանտային և ռելատիվիստական մեխանիկայի շրջանակներում:

Նշենք հետևյալ կարևոր հանգամանքը: *Որևէ տեսություն չի կարող նշել իր կիրառելիության սահմանները*: Ուսկարող են կատարել նոր, առավել ընդհանուր տեսությունները, որոնք սահմանային դեպքում հանգում են հին տեսության արդյունքներին: Մասնավորապես, նյութական մեխանիկայի կիրառելիության (1) պայմանները տվել են համապատասխանաբար քվանտային և ռելատիվիստական տեսությունները:

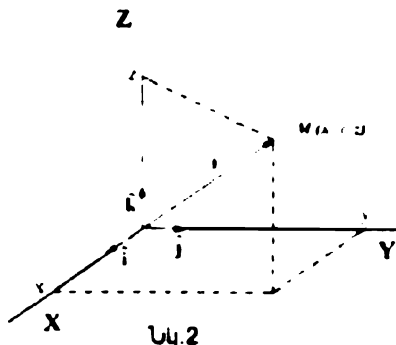
§2. ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ, ԺԱՄԱՆԱԿ: ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳ: ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴԵՐԸ ՖԻԶԻԿԱՅՈՒՄ

Մեխանիկական շարժումը մարմնի դիրքի փոփոխությունն է տարածության մեջ ժամանակի ընթացքում: Մարմնի դիրքը հարաբերական է և կարող է որոշվել միայն այլ մարմինների նկատմամբ: Այն մարմինը, որի նկատմամբ որոշում են մարմինների դիրքը, կոչվում է *հաշվարկի մարմին*: Որպես այդպիսին կարող է ծառայել հանգստի զանգված ունեցող ցանկացած մարմին: Տարածության մեջ մարմինների դիրքը որոշելու համար հաշվարկի մարմնի հետ կապում են որևէ կոորդինատային համակարգ, ասենք, ուղղանկյուն *կոորդինատների համակարգը* (Նկ. 2): Նրանում x, y, z կոորդինատների աճման ուղղությունները տրվում են համապատասխանաբար i, j, k միավոր վեկտորներով (օրթոնորմ): Կետի կոորդինատները, որոն-

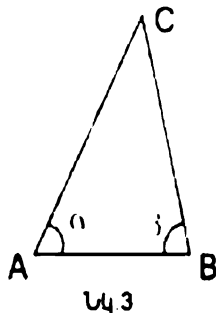
ցով որոշվում է մասնիկի դիրքը տարածության մեջ, համարժեք են հաշվարկի O սկզբնակետը դիտարկվող M կետին միացնող

$$r = ix + jy + kz \quad (3)$$

վեկտորին (նկ. 2): Այն կոչվում է կետի *շառավիղ-վեկտոր*: Կետի դիրքը տարածության մեջ միարժեքորեն տրվում է նրա շառավիղ-վեկտորով, կամ, որ նույնն է՝ կոորդինատներով: Դիրքի որոշումը հանգեցվում է որոշակի երկարությունների չափմանը: Երկարության չափումը կատարվում է հետևյալ կերպ. ընտրվում է որևէ ծող - *էտալոն*, որի երկարությունը համարվում է *երկարության միավոր*:



Չափել որևէ երկարություն՝ նշանակում է որոշել, թե քանի անգամ է էտալոնը տեղավորվում դիտարկվող միջակայքում: Ստացված թիվը հենց չափվող երկարությունն է ընտրված միավորով: Սա երկարության *անմիջական չափումն* է, որը միշտ չէ, որ հնարավոր է իրականացնել: Այդ դեպքում կատարում են երկարության *անուղղակի չափում*: Նման չափման եղանակ է *եռանկյունաչափական մեթոդը*: Անմիջական չափմամբ որոշում են “բազա” կոչվող AB հեռավորությունը և α, β անկյունները (նկ. 3), որից հետո C կետի հեռավորությունը որոշում են երկրաչափական մեթոդներով: Բազան է պարզել այս մեթոդի տեսական հիմքը: Ենթադրվում է, որ եռանկյան կողմերը ուղիղ գծեր են և ձիշտ են *էվկլիդեսի* երկրաչափության դրույթները: Եռանկյան AC և BC կողմերը լուսային ճառագայթներ են, և հետևաբար ենթադրվում է, որ *լուսային ճառագայթները վարվումում էվկլիդեսյան ուղիղներ են*: Մեզ չըջապատող տարածության էվկլիդեսյան լինելու հարցը պարզելու համար ստուգվել է այդ երկրաչափության ասույթների հետևանք հանդիսացող այն թեորեմը, համաձայն որի եռանկյան ներքին անկյունների գումարը 180° է: Կատարված նրբագույն չափումները ցույց են տվել, որ ոչ միայն Արեգակնային համակարգի սահմաններում, այլև Գալակտիկայում (մեր աստղային համակարգում) տարածությունը էվկլիդեսյան է: Այսօր



հիմքեր չկան հրաժարվելու էվկլիդեսյան երկրաչափությունից նաև Մետազալակտիկայում (Տիեզերքի մեզ հայտնի մասը, որի չափերը գնահատվում են 10^{26} մ), ինչպես նաև միկրոաշխարհում ընդհուպ 10^{-15} մ տիրույթները:

Ակարագրված մեթոդը աստղագիտության մեջ մոտակա աստղերի չափման հիմնական միջոցն է: Այդ դեպքում որպես բազա ծառայում է Արեգակի շուրջ Երկրի ուղեծրի տրամագիծը: Այն հեռավորությունը, որից Երկրի ուղեծրի տրամագիծը երևում է մեկ անկյունային վայրկյան ($1''$) անկյան տակ, կոչվում է *պարսեկ* ($1\text{պկ} = 3,08 \cdot 10^{16}$ մ): Դա մի հեռավորություն է, որը լույսն անցնում է 3,26 տարում (այն կոչվում է *լուսատարի*)

Շարժում նկարագրելու համար, բացի հաշվարկի մարմին և կոորդինատային համակարգ ընտրելուց, անհրաժեշտ է ունենալ նաև *ժամանակ* չափելու մեթոդ: Զանազան իմաստով ժամանակը ինչ-որ ժամացույցի ցուցմունք է: Իսկ *ժամացույցը համակարգ է, որում ընթանում է պարբերական պրոցես*: Ինչպես երկարության չափման դեպքում, այստեղ նույնպես անհրաժեշտ է ընտրել *ժամացույց-էտալոն*: Էտալոնները պետք է լինեն հեշտ վերարտադրելի, անկախ պատրաստման պահից և տեղից նրանք պետք է աշխատեն միատեսակ: Այս պայմաններին անբերի բավարարում են կվարցային, մոլեկուլային և ատոմական ժամացույցները, որոնցում ճոճանակի դեր են կատարում կվարցի բյուրեղային ցանցի տատանումները, մոլեկուլներում ատոմների տատանումները, խիստ որոշակի արտաքին պայմաններում քիմիական տարրերի ատոմների առաքած միագույն լույսի էլեկտրական տատանումները: Հատկապես մեծ կայունություն ունեն ատոմական ժամացույցները, որոնցով և սահմանվում է ժամանակի միավոր *վայրկյանը*: այն Ցեզիում-133 ատոմի հիմնական վիճակի որոշակի երկու գերնուրբ մակարդակներով պայմանավորված ճառագայթման պարբերությունն է բազմապատկած $9192\ 631\ 770$ -ով: Նման ձևով սահմանվում է *մետրը*, այն Կրիպտոն-86 ատոմի $2p_{1/2} \rightarrow 5d_{5/2}$ անցմամբ առաքված ալիքի երկարությունն է բազմապատկած $1650763,73$ -ով:

Շարժման ուսումնասիրության համար բավարար չէ մեկ ժամացույցը: Անհրաժեշտ է ունենալ բազմաթիվ ժամացույցներ և բաշխել դրանք ամբողջ տարածության մեջ: Այդ դեպքում ցանկացած պատահար կարելի է բնութագրել տարածական կոորդինատներով և այդ կետում տեղադրված ժամացույցի ցուցմունքով: Նման ձևով որոշում են պատահարի *տեղական ժամանակը*, այսինքն ժամանակը տարածության յուրաքանչյուր կետում: Ընդ որում, տարբեր կետերում տեղադրված ժամացույցների ցուցմունքնե-

րի միջև կապ չհաստատելու դեպքում անհնար կլինի նրանցում ստացվող տվյալների միմյանց հետ համեմատելը: Այդ պատճառով անհրաժեշտ է միաժամանակեցնել համակարգում բաշխված բոլոր անշարժ ժամացույցները ժամացույցների միաժամանակեցումը ֆիզիկայում նուրբ հարց է: Այն կքննարկենք \$15-ում: Առայժմ կենթադրենք, որ ժամացույցները միաժամանակեցված են:

Հաշվարկի մարմինը, նրա հետ կապված կոորդինատային համակարգը՝ նրանում բաշխված միաժամանակեցված ժամացույցներով, ստացել են հաշվարկի համակարգ (ՀՀ) անվանամը:

Առանց հաշվարկի համակարգի ընտրության իմաստ չունի խոսել մեխանիկական շարժման մասին: Հաշվարկի համակարգերը ֆիզիկայում ունեն կարևոր նշանակություն. ֆիզիկայում մի շարք կարևոր սկզբունքներ կապված են հաշվարկի տարբեր համակարգերի հատկությունների հետ:

Մաթեմատիկայի դերը ֆիզիկայում: Մաթեմատիկան ֆիզիկայում խաղում է բացառիկ կարևոր դեր: Առանց նրա դժվար է պատկերացնել ժամանակակից ֆիզիկան: Սակայն անհրաժեշտ է ձիշտ ըմբռնել մաթեմատիկայի իրական դերը ֆիզիկայում: Մաթեմատիկան գործ ունի որոշակի աստիճանների համակարգի ենթարկվող օբյեկտների և հասկացությունների հետ: Միակ պահանջը, որ առաջադրվում է մաթեմատիկական հասկացություններին և աստիճաններին, նրանց ներքին հակասություններից զերծ լինելն է: “Մաքուր” մաթեմատիկայում բոլոր արդյունքներն ստացվում են աստիճաններից, օգտվելով ձևական տրամաբանության կանոններից: Նրանում ստացվող արդյունքների բովանդակությունը դուրս չի գալիս մաքուր մաթեմատիկական օբյեկտների և հասկացությունների միջև տրամաբանական կապերի շրջանակներից: Այս իմաստով *մաքուր մաթեմատիկան տրամաբանական փակ գիտություն է:* Այս տեսքով այն կտրված է իրականությունից և չի կարող օգտագործվել բնական գիտություններում: Որպեսզի մաթեմատիկան դառնա բնության երևույթների նկարագրության և ուսումնասիրության հզոր գենը (ինչպիսին որ է), անհրաժեշտ է կապ հաստատել վերացական մաթեմատիկական օբյեկտների ու հասկացությունների և բնության իրական օբյեկտների ու երևույթների միջև: Ուրեմն, մաթեմատիկական հասկացություններն ու օբյեկտները պետք է հանդես գան ոչ թե որպես մաքուր տրամաբանական կատեգորիաներ, այլ որպես ինչ-որ բնական օբյեկտների և իրական պրոցեսների վերացարկումներ: Այսպես, օրինակ, “կետ” հասկացությունը բավականաչափ փոքր չափսերով ֆիզիկական մարմնի վերացարկում է, “ուղիղ գիծը”- երկար, բարակ ծողի կամ

համատեմ միջավայրում լույսի ճառագայթի վերացարկում և այլն: Մաթեմատիկայի ճշմարտության հարցը հանգում է նրա ասույթների ճշմարտացիությանը: Վերջինս կարող է հաստատվել կամ ժխտվել միայն և միայն փորձի միջոցով, որը կատարվում է իրական մարմինների հետ, միշտ որոշակի ճշտությամբ: Այնպես որ մաթեմատիկական խստությունը պետք է հասկանալ մաթեմատիկական եզրահանգումների տրամաբանական խստության իմաստով և ոչ թե նրա ասույթների հիմնավորվածությամբ:

Միայն մաթեմատիկական խստությունը բավական չէ ֆիզիկային, ինչպես և ցանկացած այլ բնական գիտությանը, որը գործ ունի իրական օբյեկտների և բնական պրոցեսների հետ: Ցանկացած տեսական հետազոտություն, եթե նույնիսկ այն կատարված է մաթեմատիկական ծայրահեղ խստությամբ, դեռևս չի կարող համարվել խիստ ֆիզիկայի տեսանկյունից: Իսկապես, նախ նման հետազոտությունները հիմնված են որոշակի ֆիզիկական օրենքների վրա, որոնք փորձնական փաստերի ընդհանրացման արդյունք են և փորձի ճշտության սահմաններից դուրս կարող են լինել սխալ: Երկրորդ, ցանկացած իրական ֆիզիկական օբյեկտի հատուկ է հատկությունների բազմազանությունը: Դրանց լրիվ հաշվառումն անհնարին է ոչ միայն այն պատճառով, որ նրանց որոշ մասը մեզ անհայտ է, այլ և նրանով, որ դա գործնականորեն անիրագործելի է, իսկ հաճախ նաև անիմաստ: Բնական է, տեսություն կառուցելիս ֆիզիկոսը իրական օբյեկտները փոխարինում է նրանց իդեալականացված *մոդելներով*, որոնք կրում են օբյեկտի, պրոցեսի առավել էական հատկությունները: Եթե ֆիզիկական մոդելը չի արտահայտում օբյեկտի, երևույթի առավել էական հատկությունները, ապա մաթեմատիկական ոչ մի խստություն չի կարող փրկել նման մոդելի հիման վրա կառուցված տեսությունը:

Մեխանիկան իր առջև դնում է երկու հիմնական խնդիր.

- բացահայտել շարժումների առաջացման պատճառները և *ստանալ շարժման օրենքներն ու հավասարումները*: Հավասարումներ, որոնց միջոցով կարելի լինի յուրաքանչյուր կոնկրետ դեպքում նախապես ստանալ շարժման սպառիչ նկարագիրը.

- *հայտնաբերել բոլոր համախմբերին հատուկ ընդհանուր հատկություններ*, որոնք անկախ լինեն առանձին մարմինների շարժումներից և նրանց փոխազդեցության բնույթից.

Առաջին խնդրի լուծումը Նյուտոնին և էյնշտեյնին հանգեցրել են Նյուտոնյան և ռելատիվիստական դինամիկայի օրենքներին, իսկ երկրորդի լուծումը՝ պահպանման օրենքների բացահայտմանը:

Դինամիկայի օրենքները էներգիայի իմպուլսի իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքների հետ միասին կազմում են մեխանիկայի կմախքը:

Վերացարկումներ: Մեխանիկայում օգտագործվում են երկու հիմնական վերացական հասկացություններ՝ *նյութական կետ* (կամ մասնիկ) և *բացարձակ պինդ մարմին*:

Նյութական կետը պարզագույն մեխանիկական համակարգ է: Այդպես է կոչվում ցանկացած մակրոսկոպիկ մարմին, որի տարածական չափերը կարելի է անտեսել, համարելով նրանում ողջ նյութը կենտրոնացված երկրաչափական կետում: Կարելի է արդյոք մարմնի շարժումը փոխարինել նյութական կետի շարժմամբ, թե ոչ կախված է ոչ այնքան տվյալ մարմնից, որքան նրա շարժման բնույթից, խնդրի պայմաններից և պահանջվող պատասխանի ճշտությունից:

Պարզագույն օրինակով լուսաբանենք նյութական կետ հասկացության կիրառելիության պայմանները: Որոշենք այն r ժամանակը, որի ընթացքում v արագությամբ շարժվող L երկարություն ունեցող ավտոմեքենան կանցնի L երկարության կամրջով (պատասխանը ստանալ r ճշտությամբ): Ընդունելով ավտոմեքենան որպես նյութական կետ պահանջվող ժամանակի համար կստանանք $t_0 = L/v$: Ավտոմեքենայի չափերի հաշվառումը տալիս է՝ $t = (L + \ell)/v$: Ստացվածից պարզորոշ հետևում է, որ ավտոմեքենայի շարժումը կարելի է փոխարինել նյութական կետի շարժմամբ (այսինքն r -ն փոխարինել t_0 -ով), եթե $\ell \ll L$, այսինքն՝ եթե ավտոմեքենայի չափերը անհամեմատ փոքր են կամրջի երկարությունից:

Ֆիզիկայում հաճախ են օգտվում “անհամեմատ մեծ” կամ “անհամեմատ փոքր” արտահայտություններից: Ինչքան փոքր պետք է լինի ավտոմեքենայի ℓ երկարությունը կամրջի L երկարությունից, որ համարենք $\ell \ll L$: Այդ հարցի պատասխանը տալիս է *ճշտության այն չափը, որով պահանջվում է խնդիրը լուծել*: Դիտարկվող օրինակում ավտոմեքենայի երկարությունը կարելի է համարել անհամեմատ փոքր կամրջի երկարությունից, եթե $r - t_0 < \tau$, որտեղից $\ell/L < \tau/t_0$: Ուրեմն, կախված խնդրի պայմաններից և, հատկապես, ճշտության τ չափից, մի դեպքում, ասենք, երբ $\ell/L = 0.2$, կարելի է ավտոմեքենայի երկարությունը համարել անհամեմատ փոքր կամրջի երկարությունից (թեև ℓ -ը միայն 5 անգամ է փոքր L -ից) և ընդունել որպես նյութական կետ, իսկ այլ, ասենք՝ $\ell/L = 10^2$ դեպքում հնարավոր չլինի այդ կատարել:

Իրական մարմնի չարժուժը կարելի է փոխարինել նյութական կետի չարժանաժ. եթե մարմնի սեփական չափերն անհամեմատ փոքր են տվյալ խնդրում նրա չարժուժը բնութագրող հեռավորություններից:

Բացարժակ պինդ մարմինը նյութական կետերի համախումբ է, որի չարժման ընթացքում մասնիկների միջև հեռավորությունները մնում են անփոփոխ, այսինքն՝ համախումբը դեֆորմացիայի չի ենթարկվում: Բոլոր իրական մարմինները արտաքին ուժի ազդեցության տակ դեֆորմացվում են: Սակայն եթե դեֆորմացիայի չափը մարմնի սեփական չափերի նկատմամբ անհամեմատ փոքր է, ապա նման մարմինը կարելի է համարել բացարժակ պինդ և չարժման դիտարկման ժամանակ արհամարիել նրա դեֆորմացիաները:

ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ

Կինեմատիկա բաժնում մշակվում են մարմինների շարժման նկարագրության եղանակները առանց շոշափելու շարժումների առաջացման պատճառները:

Կինեմատիկայում ներմուծվում են տարածաժամանակային հարաբերություններ բնութագրող *կինեմատիկական մեծություններ*, որոնց միջոցով հնարավոր լինի սպառնչ նկարագրել մարմինների շարժումները, այսինքն՝ նրանցով մաթեմատիկորեն արտահայտել մարմինների դիրքը տարածության մեջ ժամանակի ցանկացած պահին: Նման մաթեմատիկական արտահայտությունները կոչվում են *շարժման օրենքներ*:

Հարժում ուսումնասիրելիս կարելի է օգտվել հաշվարկի ցանկացած համակարգից: Միևնույն մարմնի շարժումը տարբեր հաշվարկի համակարգերում կարող է լինել էապես տարբեր: Սակայն շարժման կինեմատիկական դիտարկման հարցում որևէ սկզբունքային տարբերություն չկա, թե ինչ հաշվարկի համակարգ է ընտրված:

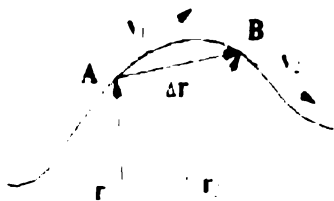
Հաշվարկի բոլոր համակարգերը կինեմատիկորեն համարժեք են: Հաշվարկի համակարգերի միջև առաջանում են խորը սկզբունքային տարբերություններ, երբ հարց է դրվում բացատրելու շարժումների դիտվող բազմազանությունը:

Ցանկացած մարմին կարելի է մտուլի տրորել միմյանց հետ փոխազդող փոքր մակրոսկոպիկ մասերի: Յուրաքանչյուր այդպիսի մաս կարելի է դիտել որպես նյութական կետ: Այնպես որ, կամայական համակարգի շարժումը հանգեցվում է փոխազդող նյութական կետերի համախմբի շարժմանը: Բնական է դասական մեխանիկայի ուսումնասիրությունն սկսել *նյութական կետի մեխանիկայից*:

Գոյություն ունեն նյութական կետի շարժման նկարագրության երեք *վեկտորական, կոորդինատային և բնական եղանակներ*:

§3. ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿ

Այս եղանակում հաշվարկի մարմնի հետ կապվող կորորդինատային համակարգը չի կոնկրետացվում Շնդհանրապես, վեկտորական տեսքով



Նկ.1.1

գրված առնչություններն ունեն կարևոր առանձնահատկություն. անկախ են կորորդինատային համակարգի ընտրությունից: Վեկտորական եղանակում մասնիկի դիրքը տարածության մեջ տրվում է r շառավիղ-վեկտորով, որը հաշվարկի համակարգի O սկզբնակետը “կապում” է մասնիկին (Նկ.1.1): Շարժման ընթացքում շառավիղ-վեկտորը կրում է անընդհատ փոփոխություններ

$$r = r(t) \quad (3.1)$$

Այս առնչությունը տալիս է մասնիկի դիրքը տարածության մեջ ժամանակի ցանկացած պահին և կոչվում է մասնիկի շարժման գրեք:

Շարժման ընթացքում շառավիղ-վեկտորի ծայրակետը գծում է որոշակի տարածական կոր, որը կոչվում է շարժման հետագիծ: Ըստ հետագծի տարբերվում են ուղղագիծ և կորագիծ շարժումներ: Շարժման ուղղագիծ կամ կորագիծ լինելը հարաբերական է: Մի հաշվարկի համակարգում մասնիկի ուղղագիծ շարժումը կարող է այլ հաշվարկի համակարգում լինել կորագիծ: Հետագծի երկարությունը կոչվում է անցած ճանապարհ: Եթե ժամանակի t պահին մասնիկը գտնվել է հետագծի A կետում, իսկ $t + \Delta t$ պահին B կետում, ապա Δr ժամանակում նրա անցած ճանապարհը կլինի AB աղեղի երկարությունը (Նկ. 1.1): Անցած ճանապարհը սկալար ֆիզիկական մեծություն է և չափվում է երկարության միավորներով: Իմանալով t պահին մասնիկի դիրքը տարածության մեջ և Δt ժամանակում անցած AB ճանապարհը, հնարավոր չէ միարժեքորեն որոշել նրա վերջնական դիրքը, եթե հայտնի չէ շարժման հետագիծը: Այդ իմաստով հարմար մեծություն է տեղակիության վեկտորը՝ մասնիկի սկզբնական և վերջնական դիրքերը միացնող ուղղորդված հատվածը: Եթե t պահին մասնիկի դիրքը բնութագրվել է $r(t)$, իսկ $t + \Delta t$ պահին $r(t + \Delta t)$ շառավիղ-վեկտորներով (Նկ.1.1), ապա Δr ժամանակում մասնիկի դիրքի փոփոխությունը կբնութագրվի շառավիղ-վեկտորի աճով.

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t), \quad (3.2)$$

որն էլ Δt ժամանակում մասնիկի տեղափոխությունն է: Մասնիկի սկզբնական $r(t)$ դիրքով և (3.2) տեղափոխությամբ կորոշվի մասնիկի դիրքը $t + \Delta t$ պահին:

Մասնիկի դիրքի փոփոխման միջին քաճիք բնութագրվում է

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (3.3)$$

միջին արագություն կոչվող վեկտորով, որն ունի Δr -ի ուղղությունը և հավասար է միավոր ժամանակում մասնիկի կատարած միջին տեղափոխությանը: Սակայն միջին արագությունը կիրառելի է հետագծի այն տեղամասի համար, որում այն հաշվված է: Այդ տեղամասից դուրս կամ նրա ներքին՝ ավելի փոքր մասերում միջին արագությունը, ընդհանրապես ասած, կլինի տարբեր: Այդ պատճառով ներմուծում են *ակնթաղթային արագություն* կամ պարզապես *արագություն* վեկտորը, որը միջին արագության սահմանն է, երբ համապատասխան Δt ժամանակը ձգտում է զրոյի

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} \quad (3.4)$$

Արագությունը շառավիղ-վեկտորի առաջին կարգի ածանցյալն է ըստ ժամանակի:

Արագությունը հետագծի ցանկացած կետում ուղղված է շոշափողով: Ուստի հետևում է (3.4) սահմանումից, եթե հաշվի առնենք, որ կորին տարված հատողի (տվյալ դեպքում $\Delta r, \Delta t$) երկարությունը զրոյի ձգտեցնելիս այն վերածվում է տվյալ կետում կորին տարված շոշափողին (նկ. 1.2):

Ընդհանրապես $|\dot{r}| \neq d, r$, այնպես որ արագության մոդուլը որոշվում է $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ բանաձևով:

Արագությունն անընդհատ ֆունկցիա է ժամանակից: Նրա ժամանակային փոփոխությունը բնութագրվում է *արագացումով*: Արագացումը վեկտոր է՝ այն ունի արագության կրած փոփոխության ուղղությունը և միավոր ժամանակում արագության աճի իմաստ:

Արագացումը արագության առաջին կարգի ածանցյալն է ըստ ժամանակի:



Նկ 1.2

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} : \quad (3.5)$$

Հաշվի առնելով արագության (3.4) սահմանումը, կստանանք, որ *արագացումը շառավիղ-վեկտորի երկրորդ կարգի ածանցյալն է ըստ ժամանակի*

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r} : \quad (3.6)$$

Պարզվում է՝ շառավիղ-վեկտորի առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալներն ըստ ժամանակի բավական են շարժման սկառիչ նկարագրության համար: Այդ պատճառով շառավիղ-վեկտորի ավելի բարձր կարգի ածանցյալները չեն դիտարկվում (շարժման վերաբերյալ նոր տեղեկություն չեն պարունակում):

Ի տարբերություն արագության, որը ցանկացած կետում ուղղված է հետագծին տարված շոշափողով, արագացումը կարող է ունենալ բոլորովին այլ ուղղություն (նկ.1.3): Նրանց կազմած անկյունը որոշվում է վեկտորների սկալար արտադրյալի բանաձևով

$$\cos \alpha = \frac{a v}{a v}, \quad (3.7)$$

որտեղ արագացման մոդուլը որոշվում է $a = \sqrt{a^2}$ բանաձևով:



Նկ.1.3

§4. ԿՈՌԴԻՆԱՏԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿ

Սեխանիկական շարժման խնդիրների լուծումը միշտ չէ, որ հնարավոր է իրականացնել վեկտորական եղանակի շրջանակներում, առանց կոնկրետացնելու կորորդինատային համակարգը: Այս իմաստով առավել կիրառական է կորորդինատային եղանակը:

Կորորդինատական համակարգի ընտրությունը թելադրվում է մասնիկի շարժման բնությով՝ ելնելով, առաջին հերթին, *պարզության* նկատառումներից: Սկզբունքորեն մասնիկի ցանկացած շարժում կարելի է նկարագրել, օրինակ, ուղղանկյուն կորորդինատային համակարգում: Սակայն

¹ դա թույլ է նյութում երկրորդ օրենքից

կորդինատական համակարգի հաջող ընտրությամբ կարելի է խուսափել ավելորդ մաթեմատիկական դժվարություններից և ստանալ վերջնական արդյունքը՝ պարզ, ակնառու բանաձևերով: Օրինակ, գլանի մակերևույթով մասնիկի շարժումը հարմար է նկարագրել գլանային կոորդինատական համակարգում: Կորդինատների այլ համակարգերում մասնիկի նշված շարժումը կարող է արտահայտվել բարդ, դժվար մեկնաբանելի մաթեմատիկական բանաձևերով:

Այս կամ այն կոորդինատական համակարգում նյութական կետի կինեմատիկական կառուցելու համար անհրաժեշտ է շարժման կինեմատիկական մեծություններն ու առնչություններն արտահայտել համապատասխան կոորդինատներով և նրանց ժամանակային ածանցյալներով:

Կորդինատային եղանակի էությունը լուսաբանենք ուղղանկյուն և բևեռային կոորդինատական համակարգերի քննարկումով:

1. Ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգ

Շառավիղ-վեկտորի և կոորդինատների կապն այստեղ տրվում է

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz \quad (4.1)$$

տեսքով: Այդ դեպքում (3.1) շարժման օրենքը համարժեք է

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (4.2)$$

առնչություններին, որոնք միաժամանակ նարկայացնում են մասնիկի շարժման հետագիծը՝ պարամետրական տեսքով: Արտաքսելով (4.2) հավասարումներից t պարամետրը, կստանանք հետագծի $z = z(x, y)$ հավասարումը բացահայտ տեսքով: Օրինակ

$$x = A \sin \omega t, \quad y = B \cos \omega t, \quad z = 0 \quad (4.3)$$

օրենքով շարժվող մասնիկի հետագիծը էլիպս է՝ A և B կիսաառնցքներով.

$$x^2 / A^2 + y^2 / B^2 = 1:$$

Կորդինատային եղանակում (3.2) տեղափոխությունն արտահայտվում է ընտրված առանցքների վրա մասնիկի դիրքի փոփոխությունը բնութագրող կոորդինատների աճով

$$\Delta \mathbf{r} = i \Delta x + j \Delta y + k \Delta z \quad (4.4)$$

Որտեղ

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t),$$

$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t): \quad (4.5)$$

Արագության բաղադրիչներն ստանալու համար օգտվենք (3.4)-ից և (4.1)-ից.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad (4.6)$$

որտեղից

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (4.7)$$

Սրանք բնութագրում են մասնիկի դիրքի փոփոխման թափը կոորդինատային X, Y, Z առանցքների երկայնքով:

Համանման ձևով արտահայտվում են *արագացման բաղադրիչները*՝

$$a_x = \dot{v}_x, \quad a_y = \dot{v}_y, \quad a_z = \dot{v}_z: \quad (4.8)$$

Ունենալով $\mathbf{v}$ և $\mathbf{a}$ վեկտորների բաղադրիչները, կարելի է հաշվել նրանց *մոդուլները*

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (4.9)$$

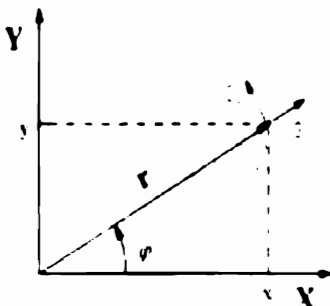
արագության և արագացման վեկտորների միջև անկյունը.

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{av} = \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}},$$

մասնիկի անցած ճանապարհը t_1 -ից t_2 ժամանակում.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt: \quad (4.10)$$

2. Բևեռային կոորդինատական համակարգ:



Նկ.1.4

Սրանից հարմար է օգտվել, եթե մասնիկը շարժվում է մեկ հարթության մեջ՝ ընտրված կենտրոնի շուրջը: Բևեռային համակարգում մասնիկի դիրքը որոշվում է շառավղային և անկյունային (r, φ) կոորդինատներով, որոնք ուղղանկյուն կոորդինատների հետ կապված են հետևյալ կերպ.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (4.11)$$

Շարժման օրենքը տրվում է $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ տեսքով, որտեղից արտա-

քելով r -ն, կատանանք շարժման հետագծի $r = r(\varphi)$ հավասարումը: Բևե-
ռային կոորդինատների համակարգում մասնիկի հետ կապում են փոխ-
ուղղահայաց e_r, e_φ շարժական միավոր վեկտորները (բազիսային օրթեր),
որոնք ցույց են տալիս դիտարկվող կետում r, φ կոորդինատների աճման
դրական ուղղությունները (նկ. 1.4): Տարրական dr ժամանակում e_r, e_φ օր-
թերը կպտտվեն միևնույն $d\varphi$ անկյանը և կկրեն հետևյալ աճերը՝

$$de_r = e_\varphi d\varphi, \quad de_\varphi = -e_r d\varphi, \quad (4.12)$$

որոնք բաժանելով dt -ի, կստանանք

$$\dot{e}_r = e_\varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{e}_\varphi = -e_r \dot{\varphi}: \quad (4.13)$$

Հաշվենք մասնիկի շարժման արագությունն ու արագացումը:
Հառավիղ-վեկտորն այստեղ ներկայացվում է այսպես՝

$$\mathbf{r} = re_r: \quad (4.14)$$

Օգտվելով արագության սահմանումից և (4.13) առնչություններից,
կստանանք.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}e_r + r\dot{e}_r = \dot{r}e_r + e_\varphi r\dot{\varphi},$$

որտեղից

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}: \quad (4.15)$$

Սրանք արագության շառավղային և անկյունային բաղադրիչներն են,
որոնցից առաջինը բնութագրում է մասնիկի O կետից ունեցած հեռավո-
րության փոփոխման թափը, իսկ երկրորդը՝ O կետի շուրջ պտույտը:

Համանման ձևով կստանանք արագացման բաղադրիչները.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})e_\varphi, \quad (4.16)$$

որտեղից՝

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \quad (4.17)$$

§ 5. ԲՆԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿ

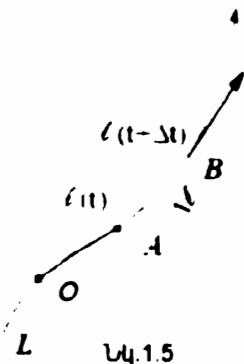
Այս եղանակից կարելի է օգտվել, եթե *նախապես հայտնի է մասնիկի
շարժման հետագիծը*: Նման դեպքում կոորդինատական առանցքը հար-
մար է ընտրել հետագիծը:

Դիցուք շարժումը տեղի է ունենում L կորի երկայնքով (նկ. 1.5): Ընտ-
րենք կորի վրա հաշվարկի O սկզբնակետ և առանցքի դրական ուղղու-
թյուն: Մասնիկի դիրքը միարժեքորեն կտրվի O կետը մասնիկին կապող

աղեղի ℓ երկարությամբ, որը կոչվում է կետի *աղեղային կոորդինատ* (դիրքաթիվ)։ Ուրեմն, չարժան օրենքը բնական եղանակում տրվում է

$$\ell = \ell(t) \quad (5.1)$$

կախվածությամբ։ Դիրքի փոփոխությունը $d\ell$ ժամանակում բնութագրվում է աղեղային կոորդինատի աճով, որն այդ ընթացքում մասնիկի անցած ճանապարհն է։



$$d\ell = \ell(t+dt) - \ell(t):$$

Արագության մեծությունը բնական եղանակում աղեղային կոորդինատի առաջին կարգի ածանցյալն է ըստ ժամանակի.

$$v = \frac{d\ell}{dt} \quad (5.2)$$

Մասնիկի հետ կապենք τ միավոր վեկտոր, որը հետագծի յուրաքանչյուր կետում ունենա շոշափողի ուղղությունը։ τ -ն կախված է կորի վրա մասնիկի գրաված դիրքից. $\tau = \tau(\ell)$ Հաշվի առնելով (5.1)-ը, կտեսնենք, որ τ -ն բարդ ֆունկցիա է ժամանակից.

$$\tau = \tau(\ell(t)): \quad (5.3)$$

τ վեկտորի ներմուծմամբ արագության վեկտորը կներկայացնենք այսպես

$$v = v\tau: \quad (5.4)$$

Օգտվելով արագացման (3.7) սահմանումից և արագության (5.4) բանաձևից, կունենանք.

$$a = v\dot{\tau} + v d\tau/dt: \quad (5.5)$$

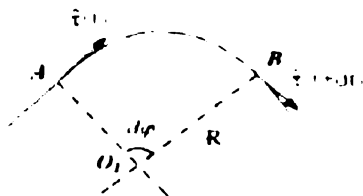
Հաշվի առնելով, որ τ -ն բարդ ֆունկցիա է ժամանակից, ձևափոխենք վերջին անդամը.

$$v\dot{\tau} = v d\tau/dt = v^2 d\tau/d\ell \quad (5.6)$$

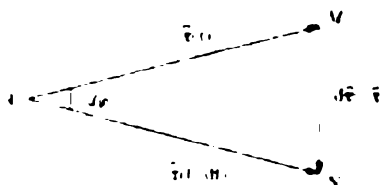
Արտահայտենք $d\tau/d\ell$ մեծությունը հետագծի երկրաչափական բնութագրերով։ Ենթադրենք r պահին մասնիկը գտնվում է հետագծի A կետում, որին համապատասխանում է $\tau(\ell)$ միավոր վեկտորը։ Տարրական $d\ell$ ժամանակում անցնելով $d\ell$ ճանապարհ, մասնիկը կգրավի $\tau(\ell+d\ell)$ միավոր վեկտորով բնութագրվող B դիրքը (Նկ.1.6ա)։

Ենթադրենք դիտարկվող հետագիծը *հարթ կոր* է, այսինքն գտնվում է մեկ հարթության մեջ. Տանենք A և B կետերում կորի *նորմալները* (կորի հարթության մեջ շոշափողներին տարված ուղղահայացները), որոնց

հատման կետը նշանակենք O_1 :



Նկ 1.6ա



Նկ 1.6բ

Դիֆերենցիալ երկրաչափության մեջ ցույց է տրվում, որ կամայական անընդհատ կորի տարրական մասը կարելի է ներկայացնել որպես որոշակի չափավորով շրջանագծի աղեղ: Այնպես որ հետագծի դիտարկվող տարրական AB մասը O_1 կենտրոնով և $O_1A = O_1B = R$ չափավորով շրջանագծի աղեղ է (Նկ.1.6ա): O_1 -ը կոչվում է հետագծի տվյալ մասի *կորուքյան կենտրոն*, իսկ R -ը՝ *կորուքյան շառավիղ*: Փաստորեն ցանկացած կոր կարելի է ներկայացնել որպես տարբեր կորուքյան կենտրոններ և կորուքյան չափավորներ ունեցող շրջանագծերի տարրական աղեղների հաջորդականություն:

Կազմելով dr ժամանակում շոշափող վեկտորների dr աճը ներկայացնող AMN եռանկյունը (Նկ.1.6բ), հեշտ է նկատել, որ այն նման է եռանկյուն O_1AB -ին: Դրա հիման վրա կստանանք $d\sigma dr$ -ի մեծությունը.

$$d\sigma dr = 1/R: \quad (5.7)$$

Տարրական dr ժամանակում dr աճը ուղղահայաց է A կետում շոշափող r միավոր վեկտորին (Նկ.1.6բ), այսինքն *ուղղված է այդ կետում կորի նորմալով դեպի կորուքյան կենտրոն*: Ներմուծելով նորմալի ուղղությամբ n միավոր վեկտորը, կունենանք.

$$dr/dt = n/R: \quad (5.8)$$

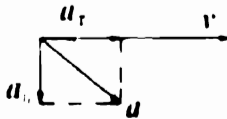
Ստացված արդյունքի և (5.6)-ի հաշվառմամբ արագացման (5.5) արտահայտությունը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$a = r dv/dt + n v^2/R: \quad (5.9)$$

Այսպիսով, հետագծի կամայական կետում արագացումը ներկայացվեց երկու փոխուղղահայաց վեկտորների գումարի տեսքով: Արագացման վեկտորի նման ներկայացումն ունի մեծ առավելություն: Արագացումը

արագության ժամանակային փոփոխման թափը բնութագրող մեծություն է։ Արագությունը կարող է փոխվել ինչպես մեծությամբ, այնպես էլ ուղղությամբ։ Արագացման (5.9) բանաձևի աջ մասի առաջին անդամը հետագծի տվյալ կետում ունի շոշափողի ուղղություն և բնութագրում է արագության մեծության փոփոխման թափը։ Այն կոչվում է տանգենցիալ (շոշափող) արագացում և հավասար է արագության մեծության ըստ ժամանակի առաջին կարգի ածանցյալին

$$a_t = dv/dt \quad (5.10)$$



Նկ 1.7

Երկրորդ գումարելին ուղղահայաց է արագությանը, ուղղված է դեպի կորության կենտրոն և բնութագրում է արագության ուղղության ըստ ժամանակի փոփոխման թափը՝

$$a_n = v^2/R \quad (5.11)$$

Այն կոչվում է նորմալ արագացում, որը համեմատական է մասնիկի արագության քառակուսուն և հակադարձ համեմատական տվյալ կետում հետագծի կորության շառավիղին։ Լրիվ արագացման մեծությունը կլինի

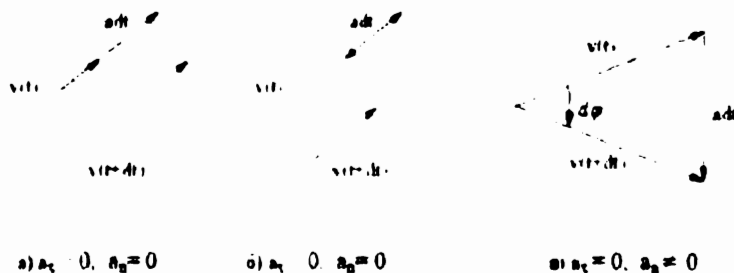
$$a = \sqrt{(dv/dt)^2 + (v^2/R)^2} \quad (5.12)$$

Այն փաստը, որ արագությանը համուղղված արագացումը (տանգենցիալ արագացումը) կարող է փոխել միայն արագության մեծությունը, իսկ արագությանն ուղղահայաց արագացումը (նորմալ արագացումը) արագության ուղղությունը, անմիջապես հետևում է արագացման (3.6) սահմանումից, որտեղից

$$v(t+dt) = v(t) + a dt \quad (5.13)$$

Նկ1.8-ում ներկայացված դեպքերը լուսաբանում են տանգենցիալ (1.8 ա,բ) և նորմալ (1.8գ) արագացումներով շարժման դեպքում միևնույն սկզբնական $v(t)$ արագության փոփոխությունները dt ժամանակում, որտեղ վերջնական $v(t+dt)$ արագությունները որոշված են (5.13)-ի համաձայն։ Նկատենք, որ եթե տանգենցիալ արագացումը կարող է միայն մեծացնել կամ փոքրացնել արագության վեկտորի երկարությունը, ապա նորմալ արագացումը միայն առաջ է բերում արագության վեկտորի պտույտ։ Մեծությամբ հաստատուն արագությամբ շարժումը կոչվում է հավասարաչափ շարժում։ Հավասարաչափ շարժման տանգենցիալ արագացումը զրո է՝ $v = \text{const}$, $a_t = 0$ ։ իսկ ուղիղ գծին համապատասխանում է կորության

շառավիղի անսահման մեծ արժեք, $R = \infty$: Զանի որ արագությունը սահմանափակ մեծություն է, ապա ուղղագիծ շարժման նորմալ արագացումը զրո է:



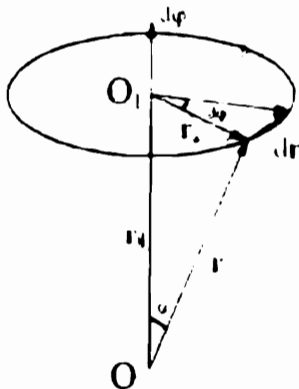
Նկ. 1.8

Ըստ արագացման նորմալ և տանգենցիալ բաղադրիչների արժեքների նյութական կետի շարժումները կարելի է դասակարգել հետևյալ կերպ.

1. $a_t = a_n = 0$ - ուղղագիծ հավասարաչափ շարժում:
2. $a_t \neq 0, a_n = 0$ - ուղղագիծ անհավասարաչափ շարժում: Մասնավորապես, $a_t = \text{const}$ դեպքում կունենանք ուղղագիծ հավասար-արագացող շարժում:
3. $a_t = 0, a_n \neq 0$ - կոր հետագծով հավասարաչափ շարժում: Մասնավորապես, $a_n = \text{const}$ դեպքում ունենք հավասարաչափ շարժում շրջանագծով: Իրոք, $a_t = 0$ պայմանը տալիս է $v = \text{const}$, իսկ $a_n = \text{const}$ - ը $R = \text{const}$, որը համապատասխանում է շրջանագծին: Այս դեպքում a_n - ը կրում է կենտրոնաձիգ արագացում անվանումը (§ 6):
4. $a_t \neq 0, a_n \neq 0$. Ես նյութական կետի ամենաընդհանուր շարժումն է: Եթե $R = \text{const}$, ապա կունենանք անհավասարաչափ շարժում շրջանագծով:

§ 6. ՆՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ԵԱՐԺՈՒՄԸ ԵՐՋԱՆԱԳԾՈՎ

Ներմուծված կինեմատիկական մեծությունները բնութագրում են մասնիկի բոլոր շարժումները: Չնայած դրան, շրջանագծային շարժման ուսումնասիրության ժամանակ հաճախ հարմար է անցնել, այսպես կոչված, *անկյունային կինեմատիկական մեծությունների*: Դա հնարավոր է



Նկ. 1.9

կատարել շնորհիվ այն բանի, որ շրջանագծային շարժումը բնութագրվում է կորության շառավիղի հաստատուն արժեքով: Դիցուք մասնիկը կատարում է շրջանագծային շարժում՝ անշարժ OO_1 առանցքի շուրջը (Նկ. 1.9): Մասնիկի դիրքը շրջանագծի վրա բնութագրենք r շառավիղ-վեկտորով, որը ներկայացնենք պտտման առանցքին զուգահեռ r_1 և ուղղահայաց r_2 բաղադրիչների գումարի տեսքով.

$$r = r_1 + r_2 \quad (6.1)$$

Մասնիկի շրջանագծային շարժման ընթացքում r_1 -ը մնում է անփոփոխ, իսկ r_2 -ը պտտվում է ($r_2 = r \sin \alpha$ - շրջանագծի շառավիղն է): Տարրական dr ժամանակում մասնիկը կկատարի dr տեղափոխություն, որի շնորհիվ r_2 վեկտորը կպտտվի $d\phi$ անկյունով.

$$|dr| = r_2 d\phi = r \sin \alpha d\phi \quad (6.2')$$

Կարելի է $d\phi$ անկյանը վերագրել այնպիսի ուղղության, որ r , dr և $d\phi$ վեկտորների մոդուլների միջև (6.2') կապը հնարավոր լինի ներկայացնել վեկտորական տեսքով: Իսկապես, *վերագրելով $d\phi$ -ին պտտման առանցքով ուղղված այնպիսի ուղղություն, որի ծայրից դիտելիս մասնիկը պտտվի ժամացույցի հակառակ կարելի է գրել*

$$dr = [d\phi r], \text{ կամ } dr = [d\phi r] = [d\phi r_2]: \quad (6.2)$$

Երկրորդ բանաձևն ստանալիս առաջինում տեղադրվել է (6.1) արտահայտությունը և հաշվի է առնվել $dr_1 = 0$ պայմանը:

Սահմանված $d\phi$ վեկտորը կոչվում է *անկյունային տեղափոխություն* և ի տարբերություն մինչև այժմ մեզ ծանոթ վեկտորների, որոնք կոչվում են բևեռային վեկտորներ, *առանցքային վեկտոր* է: Առանցքային վեկտորները ենթակվում են բևեռային վեկտորների գումարման, հանման և բազմապատկման կանոններին: Նրանց միջև կան որոշ էական տարբերու-

յուններ, որոնց սակայն մենք չենք առնչվելու մեխանիկայի դասընթացի չդրանակներում: Անհրաժեշտ է հիշել, որ վեկտորական տեսքով կարելի է ներկայացնել միայն և միայն անվերջ փոքր պտույտները: Վերջավոր անկյանք պտույտը չի կարող ներկայացվել վեկտորական տեսքով: Պա հետևում է բեկուզև նրանից, որ վերջավոր $\Delta\varphi$ անկյամբ պտույտի դեպքում $(6.2)^\circ$ -ի փոխարեն ստացվում է

$$\Delta r = 2r \sin \alpha \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (6.3)$$

որի հիման վրա այլևս հնարավոր չէ գրել (6.2) կապը: Միայն այն դեպքում, երբ $\Delta\varphi \rightarrow 0$, (6.3) -ը վերածվում է (6.1) -ին և հետևաբար, ճիշտ է (6.2) -ը:

Պտույտի անկյան փոփոխման թափն ըստ ժամանակի բնութագրվում է անկյունային արագություն վեկտորով.

$$\Omega = d\varphi / dt, \quad (6.4)$$

որը պտտման առանցքով ուղղված առանցքային վեկտոր է:

Անկյունային արագության վեկտորի ածանցյալն ըստ ժամանակի կոչվում է անկյունային արագացում, որը բնութագրում է անկյունային արագության փոփոխման թափը.

$$\varepsilon = d\Omega / dt. \quad (6.5)$$

Անշարժ առանցքի շուրջ պտույտի դեպքում ε -ը ուղղված է պտտման առանցքով: Ընդ որում, եթե պտույտն արագացող է, այն ունի Ω -ի ուղղությամբ, եթե դանդաղող է՝ Ω -ին հակառակ ուղղություն: Այդ պատճառով անշարժ առանցքի շուրջ պտույտը հարմար է նկարագրել պտտման առանցքի վրա $d\varphi$, Ω , ε վեկտորների պրոյեկցիաներով

$$\varepsilon = \dot{\Omega} = \dot{\varphi}; \quad \Omega = \dot{\varphi}. \quad (6.6)$$

որտեղ ε -ը և Ω -ն հանրահաշվական մեծություններ են:

Երջանագծային շարժման օրենքը տրվում է $\varphi = \varphi(t)$ առնչությամբ:

Կապը գծային և անկյունային կինեմատիկական մեծությունների միջև: Բաժանելով (6.2) առնչության երկու կողմերը dt -ի, հաշվի առնելով գծային և անկյունային արագությունների սահմանումները, կունենանք.

$$v = [\Omega r] = [\Omega r_{\perp}]; \quad (6.7)$$

Այստեղ հաշվի առնվեց (6.1) -ը, և այն, որ $[\Omega r_{\parallel}] = 0$: Ստացված (6.7) բանաձևը ներկայացնում է գծային և անկյունային արագությունների կապը վեկտորական տեսքով: Նրանց մոդուլների միջև կապը տրվում է դպրոցական ծրագրից հայտնի բանաձևով.

ՆԱԽԻՆՆԵՐԻ ԼՈՒՇՄԱՆ ՕՐԴՆԱԿՆԵՐ

1.1 Մասնիկը շարժվում է $r = A(1 - Bt^2)$ օրենքով, որտեղ A - ն հաստատուն վեկտոր է B - ն դրական հաստատուն Որոշել մասնիկի արագությունն ու արագացումը ժամանակի և պահին, ինչ r ժամանակ անց մասնիկը կվերադառնա ելման կետ, ինչ s ճանապարհի կանցնի այդ ընթացքում:

Լուծում: Շարժման օրենքից երևում է, որ մասնիկը ելման $r = 0$ կետում գտնվում է երկու անգամ $t = 0$ և $t = r = B^{-1/2}$ պահերին:

Օգտվելով (3.4) և (3.6)-ից՝ արագության և արագացման համար կունենանք

$$v = dr/dt = A(1 - 3Bt^2), \quad a = dv/dt = -6ABt,$$

որտեղից հետևում է, որ մասնիկը շարժումն սկսում է A սկզբնական արագությամբ, որից հետո դանդաղելով $t_1 = 1/\sqrt{3B}$ պահին կանգ է առնում՝ ելակետից

$$r_1 = r(t_1) = At_1(1 - Bt_1^2) = 2A/3(3B)^{1/2}$$

հեռավորության վրա. Հետագա շարժումը կատարվում է հակառակ ուղղությամբ, մեծությամբ աճող արագացմամբ. Պարզ է, որ r ժամանակում մասնիկը կանցնի $s = 2r_1 = 4A/3(3B)^{1/2}$ ճանապարհ:

1.2. Մասնիկը շարժվում է XY հարթության մեջ $v = iAx + jBx$ արագությամբ, որտեղ A և B - ն հաստատուններ են: Ելման կետը կորորինատների սկզբնակետն է Որոշել մասնիկի շարժման հետագծի $y(x)$ հավասարումը ինչպես նաև հետագծի կորության շառավիղի կախումը x կորորինատից:

Լուծում: Արագության պրոյեկցիաները կորորինատական առանցքների վրա այսպիսիք են.

$$v_x = dx/dt = A; \quad v_y = dy/dt = Bx,$$

որտեղից երևում է, որ v_x -ը կախված է միայն x -ից: Հետևաբար, $y(t)$ -ն կներկայացվի որպես բարդ ֆունկցիա t -ից, $y(x(t))$: Անպես որ կարող ենք գրել.

$$dy/dt = (dy/dx)(dx/dt) = v_x (dy/dx) = A dy/dx = Bx:$$

Ինտեգրելով ստացված հավասարումը, $y(x=0) = 0$ սկզբնական պայմանի հաշվառմամբ, կստանանք հետագծի հավասարումը պարաբոլի տեսքով.

$$dy/dx = Bx/A, \quad y = Bx^2/2A:$$

Մասնիկի արագացման համար ստանում ենք

$$a_x = dv_x/dt = 0; \quad a_y = dv_y/dt = B dx/dt = BA,$$

Այսինքն՝ այն հաստատուն է և ուղղված է Y առանցքով. $a = a_y = AB$:

Հետագծի կամայական կետում կորության շառավիղը կորոշվի այսպես.

$$R = v^2/a_n = v^2/a \cdot \sin \alpha = v^1/av_y = (A^2 + B^2 x^2)^{3/2}/A^2 B.$$

որտեղ հաշվի առանք, որ $\sin \alpha = v_y/v$ (α -ն v և a վեկտորների կազմած անկյունն է),

1.3. Մասնիկը շարժվում է R շառավիղ ունեցող շրջանագծով այնպես որ ցանկացած պահին նրա տանգենցիալ և նորմալ արագացումները մեծությամբ իրար հավասար են։ Սկզբնական պահին մասնիկի արագությունը v_0 է։ որոշել ա) մասնիկի արագությունը որպես ժամանակի՝ $v(t)$, և անցած ճանապարհի՝ $s(s)$, ֆունկցիա ք) նույնը՝ լրիվ արագացման համար։

Լուծում Համաձայն խնդրի պայմանի՝ $dv/dt = -v^2/R$, որտեղ միևնույն նշանը ցույց է տալիս շարժման դանդաղող բնույթը։ Անջատելով փոփոխականները և ինտեգրելով, սկզբնական պայմանի հաշվառմամբ, կստանանք արագությունը որպես t -ի ֆունկցիա. $v = \frac{v_0}{1 + v_0 t / R}$:

Ինտեգրելով ստացվածն ըստ ժամանակի, կստանանք անցած ճանապարհը.

$$s = \int_0^t v dt = R \ln(1 + v_0 t / R):$$

Արտաքսելով ստացված բանաձևերից t -ն, կստանանք

$$v = v_0 e^{-s/R}:$$

Քանի որ $|a_r| = |a_n|$, ապա լրիվ արագացման համար ստանում ենք.

$$a = \sqrt{2} a_n = \sqrt{2} v^2 / R = \sqrt{2} (v_0^2 / R) e^{-2s/R}:$$

ԳԼՈՒԽ II

ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

Դինամիկայի ուսումնասիրության առարկան նյութական մարմինների լույս մոդելներն են, ինչ կինեմատիկայում. նյութական կետ, նյութական կետերի համախումբ, բացարձակ պինդ մարմին: Սակայն նրանց խնդիրներն ապես տարբեր են: Կինեմատիկան ուսումնասիրում է մարմինների շարժան երկրաչափությունը: Նրանում տրվում են մարմինների շարժման կինեմատիկական նկարագրության մեթոդները, առանց քննարկելու շարժումների բազմազանության պատճառները:

Դինամիկան ուսումնասիրում է մարմնի շարժումները՝ բացահայտելու համար նրանց կապը այլ մարմինների հետ մարմնի ունեցած փոխադրեցությունների հետ: Այդ կապերը կոչվում են դինամիկ օրենքներ:

Չին աշխարհի փիլիսոփաները ծգտել են բացատրել մարմինների այս և այն արագությամբ շարժվելը: Արիստոտելը գտնում էր, որ Երկրի վրա մարմիններն ունեն «բնական» դիրքեր. ծանրները ներքևում, թեթևները վերևում: Դեպի համապատասխան դիրքերը մարմինների շարժումները հանարում էր բնական, «ինքնին հասկանալի», իսկ ցանկացած այլ շարժում՝ հարկադրական, որը ենթակա է բացատրության: Օրինակ, հորիզոնական ուղղությամբ մասնիկի ուղղագիծ հավասարաչափ շարժումը համարվել է հարկադրական շարժում և նրա պատճառն անվանվել է ուժ, որը հաղորդվում է մասնիկին շրջապատող մարմինների (օդի) կողմից: Ըստ այդ պատկերացումների, որքան մեծ է ուժը, այնքան մեծ կլինի արագությունը: Հետագայում Չալիլեյը ցույց տվեց, որ բացատրության կարիք ունի ոչ թե մարմնի ուղղագիծ հավասարաչափ շարժումը, այլ այդ շարժման վիճակի փոփոխությունը, այսինքն արագացումը:

Մարմինների դանդաղ շարժումների համար դինամիկայի օրենքները ձևակերպել է Նյուտոնը, որոնք կրում են նրա անունը: Ինչպես ֆիզիկայի հիմք կազմող բոլոր սկզբունքները, սրանք ևս հանդիսանում են փորձնա-

կան փաստերի ընդհանրացում, որոնք Նյուտոնը ձևակերպել է հետևյալ կերպ.

Առաջին օրենք: Ցանկացած մարմին պահպանում է դադարի կամ հավասարաչափ և ուղղագիծ շարժման վիճակը. քանի դեռ նրա վրա չեն կիրառվել ուժեր:

Երկրորդ օրենք: Շարժման քանակի փոփոխությունը համեմատաբար է կիրառված ուժին և ուղղված է ուժի ազդման գծի երկայնքով:

Յրորող օրենք: Ազդեցությանը համապատասխանում է հավասար, հակառակ ուղղված հակազդեցություն, այլ կերպ միմյանց վրա երկու մարմինների առաջացրած ազդեցությունները հավասար են իրար և ուղղված են հակառակ կողմեր:

Այս օրենքների հետ Նյուտոնը տվել է նաև ութ սահմանումներ, որոնցից այստեղ կարևոր են հետևյալ երեքը.

- Շարժման քանակը զանգվածին և արագությանը համեմատակալ մեծություն է:

- Մատերիայի քանակությունը (զանգվածը) իր ծավալին և խտությանը համեմատական մեծություն է:

- Կիրառված ուժը ազդեցություն է, որը գործադրվելով մարմնի վրա փոփոխում է նրա դադարի կամ հավասարաչափ և ուղղագիծ շարժման վիճակը:

Այստեղ զանգվածը դիտվում է որպես մատերիայի քանակություն և սահմանվում խտության միջոցով, որը Նյուտոնի կողմից որևէ կերպ չի սահմանվել: Ժամանակակից ֆիզիկան զանգվածի վերաբերյալ ունի այլ պատկերացումներ: Այստեղ նշենք միայն, որ ժամանակակից ֆիզիկայում խտությունն է սահմանվում զանգվածով և ոչ թե հակառակը:

Նյուտոնն իր օրենքները ձևակերպել է բացարձակ անշարժ հաշվարկի համակարգում «բացարձակ տարածության մեջ», մարմինների շարժման համար: Այսօր հայտնի է, որ դադարը, ինչպես և շարժումը հարաբերական են, և միմյանց նկատմամբ շարժվող բազմաթիվ հաշվարկի համակարգերի դիտարկումը հնարավորություն է տալիս ձևակերպել սկզբունքներ, որոնք էապես հարստացնում են թե՛ Նյուտոնի օրենքների բովանդակությունը և թե՛ ֆիզիկան ընդհանրապես. Բերված տեսքով Նյուտոնի օրենքների (հատկապես առաջին օրենքի) ձևակերպումը տեղիք է տալիս հետևյալ հարցադրմանը, անկախ են, արդյոք, նրանք իրարից, թե առաջին օրենքը երկրորդ օրենքի հետևանք է: Այդ պատճառով Նյուտոնի օրենքները և ամբողջ մեխանիկան կշարադրենք ըստ ժամանակակից պատկերա-

յումների, աշխատելով հնարավորին չափ զուգահեռ ներկայացնել յուրա-
չանյուր քննարկվող երևույթի, մեծությամբ ու հավասարման նյութական և
յեղատիվիստական արտահայտությունները: Դա կհեշտացնի երկու տե-
ալիստների և արդյունքների համեմատումը:

§7. ՀԱՇՎԱՐԿԻ ԻՆԵՐՑԻԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ: ՆՅՈՒՏՈՆԻ ԱՌԱՋԻՆ ՕՐԵՆՔԸ

Հաշվարկի բոլոր համակարգերը կինեմատիկորեն հավասարազոր
ն: Այլ է վիճակը դինամիկա բաժնում, որտեղ բացահայտվում են շարժում-
ների առաջացման պատճառներն ու ստացվում *շարժման օրենքներն ու
նախասարումները*: Այս խնդրի լուծման համար միևնույնը չէ, թե ինչ հաշ-
վարկի համակարգ է ընտրված: Դինամիկայի առաջնահերթ խնդիրը հաշ-
վարկի այնպիսի համակարգի ընտրությունն է, որում շարժումներն ունե-
աան ակնառու բացատրություններ և արտահայտվեն պարզ մաթեմատի-
կական օրենքներով ու հավասարումներով:

*Նյութական մարմիններից անվերջ հեռացած մարմինն անվանենք ա-
շատ մասնիկ*: Կամայական հաշվարկի համակարգի նկատմամբ ազատ
խանիկի շարժումը, ընդհանրապես ասած, կլինի արագացող: Պնդվում է,
որ կա գոնե մեկ հաշվարկի համակարգ, որի նկատմամբ ազատ մասնիկը
շարժվում է առանց արագացման, այսինքն ուղղագիծ և հավասարաչափ,
լամ գտնվում է դադարի վիճակում: *Ազատ մասնիկի ուղղագիծ և հավա-
արաչափ շարժումը կոչվում է շարժում իներցիայով*: Հաշվարկի այն հա-
ակարգը, որի նկատմամբ ազատ մասնիկը շարժվում է իներցիայով, կոչ-
վում է *հաշվարկի իներցիալ համակարգ* (ՀԻՀ):

Նյութական, ինչպես նաև ռելատիվիստական մեխանիկայի հիմքում
յնկած է Գալիլեյի *իներցիայի օրենքը*, որը փաստորեն ՀԻՀ-ի գոյության
վերլուծն է: Այն Նյուտոնը վերցրել է որպես դինամիկայի առաջին օրենք:
Խանանակակից ծեակերպմամբ Նյուտոնի առաջին օրենքն այսպիսին է.
*ոյություն ունի հաշվարկի համակարգ, որի նկատմամբ ազատ մասնիկը
արժվում է իներցիայով կամ գտնվում է դադարի վիճակում*:

Ցանկացած այլ ՀՀ, որում խախտվում է իներցիայի օրենքը, կոչվում է
հաշվարկի ոչ իներցիալ համակարգ (ՀՌՀ):

Փորձնականորեն ապացուցված է, որ Արեգակենտրոն հաշվարկի
ամակարգը *իներցիալ* է Այս ՀՀ-ում հաշվարկի մարմինն Արեգակն է, որը

Արեգակենտրոն հաշվարկի համակարգի նկատմամբ ուղղագիծ և հա-

վատարաչափ շարժվող համա-
կարգը նույնպես կլինի ինտեղիալ.
արագացումով շարժվողը ոչ ի-
նտեղիալ: Այստեղից հետևում է
Երկրի հետ կապված ՀՀ-ի ոչ
ինտեղիալ լինելը. քանի որ Երկրի-
րը պտտվում է ինչպես սեպիա-
կան առանցքի այնպես էլ Արե-

Տարածությունն ու ժամանակը ՀԻՀ- երում օժտված են համաչափությամբ։ Մարածությունը համատեղ է և իզոտրոպ, ժամանակը՝ համատեղ։ Տարածության համաստեղությունը նրա բոլոր կետերի հավասարազորությունն է։ Ֆիննույն փորձը տարածության տարբեր կետերում տալիս է նույն արդյունքը։ Տարածության իզոտրոպությունը նրա տարբեր ուղղությունների հավասարազորությունն է։ փորձի արդյունքը կախված չէ նրանից, թե տարածության որ ուղղությամբ շարժվող ՀԻՀ –ում է այն իրականացվում։ Ժամանակի համաստեղությունը ժամանակի տարբեր պահերի հավասարազորությունն է։ Ֆիննույն փորձը ժամանակի տարբեր պահերին, Ֆիննույն պայմաններում, տալիս է նույն արդյունքը։

Հիշում հետևում ենք ազատ մասնիկի ին

38

րա, հաղորդում է a_2 արագացում, ապա այն իր հերթին ենթարկվում է 2 ասնիկի ազդեցությանը և ձեռք բերում a_1 արագացում (նկ. 2.1): Այնպես որ *ազդեցությունները կրում են փոխադարձ բնույթ*, և մենք գործ ունենք մարինների *փոխազդեցության* հետ:

Փոխազդեցությունը ՀԻՀ-ում մարմնի արագացման պատճառն է:

Երկու մարմինների փոխազդեցության վերաբերյալ ՀԻՀ-երում կառարկած փորձերը բերել են հետևյալ կարևոր արդյունքին.

Արագացումների հարաբերությունը անկախ փոխազդեցության ձևից և ստատուս մեծություն է տվյալ երկու մարմինների համար

$$a_2 / a_1 = \text{const} : \quad (8.1)$$

Ընդ որում արագացումներն ուղղված են մասնիկները միացնող գծի յուրյանցով և ունեն հակառակ ուղղություններ (նկ. 2.1):

Փոխազդեցության հետևանքով մարմնի արագացում ձեռք բերելու հատկությունը կոչվում է իներտություն: Իներտությունը հատուկ է բոլոր նարմիններին, սակայն տարբեր չափով: Փոխազդեցության ժամանակ ավելի փոքր արագացում ձեռք բերած մարմնի մասին ասում են, որ այն ավելի իներտ է:

Ֆիզիկան ճշգրիտ գիտություն է. եթե հայտնաբերված է ֆիզիկական հատկություն, որը տարբեր է տարբեր մարմինների համար, ապա ներմուծվում է այդ հատկությունը քանակապես բնութագրող մեծություն:

Իներտության քանակական բնութագիրը զանգվածն է: Այն ներմուծվում է այնպես, որ ավելի իներտ մարմինն օժտված լինի ավելի մեծ զանգվածով: Զանի որ ավելի իներտ մարմինը փոխազդեցության ընթացքում ձեռք է բերում ավելի փոքր արագացում, ապա պայմանավորվում են զանգվածը ներմուծել արագացմանը հակադարձ համեմատական օրենքով.

$$a_2 / a_1 = m_1 / m_2 : \quad (8.2)$$

Հաշվի առնելով նաև արագացումների ուղղությունը, կարող ենք գրել

$$m_1 a_1 = -m_2 a_2 : \quad (8.3)$$

Նյութոսկյան մեխանիկայում *զանգվածը մարմնի շարժման վիճակից անկախ դրական ադիտիվ մեծություն է*

$$m = \text{const}, \quad m = \sum m_i > 0: \quad (8.4)$$

Վերջինս նշանակում է, որ համախմբի զանգվածը հավասար է իր բաղկացուցիչ մասերի զանգվածների գումարին:

Ներմուծելով ֆիզիկական մեծությունը, անհրաժեշտ է տալ նրա չափման (կամ հաշվման) եղանակը: Չանգվածի չափման համար պայմանավորվում են որևէ մարմնի իներտ հատկությունները համարել *էտալոնային*, իսկ նրա զանգվածը՝ *զանգվածի միավոր*: Որպես զանգվածի միավոր ընդունված է պլատինի և իրիդիումի համաձուլվածքից պատրաստված կշռաքարը, որի զանգվածը կոչվում է *կիլոգրամ* (կգ): Կիլոգրամը մոտավորապես 1 դմ³ մաքուր ջրի զանգվածն է 4°C ջերմաստիճանում: Կիլոգրամի հազարերորդ մասը կոչվում է *գրամ* (գ): Փոխադրեցության մեջ դնելով 2 մարմինը 1 էտալոնի ($m_1 = 1$ կգ) հետ և չափելով նրանց արագացումների հարաբերությունը, կստանանք

$$m_2 = a_1 : a_2 \cdot \text{կգ},$$

որը 2 մարմնի զանգվածն է, արտահայտած կգ-ներով:

2. Փոխադրեցությունների բռնակալան բնութագրին ուժն է Ուժը վեկտոր է, որն ունի իր առաջացրած արագացման ուղղությունը: ՀՄՀ-ում ուժը կախված է փոխազդող մարմինների փոխադարձ դիրքից, երբեմն էլ հարաբերական արագությունից $F(r, v)$: Յուրաքանչյուր կոնկրետ փոխազդեցության համար ուժի բացահայտ տեսքի որոշումը ֆիզիկական մեխանիկայի հիմնական խնդիրներից մեկն է: Թեև ուժն արագացման պատճառ է, այն գոյություն ունի անկախ մարմինների արագացումներից:

Հաշվարկի իներցիալ համակարգում ուժն ունի մասնիկիական ծագում: Եթե մարմինը ենթարկվել է ուժի ազդեցության, ապա ուժի աղբյուրը պետք է փնտրել նրան շրջապատող մարմիններում: ՀՄՀ-երում մարմինների փոխազդեցության և նրանցով պայմանավորված արագացումների պատճառական կապի փորձնական ուսումնասիրությունները Նյուտոնին հանգեցրել են իր *երկրորդ օրենքին*:

Մարմնի զանգվածի և արագացման արտադրյալը հավասար է նրա վրա կիրառված ուժին

$$ma = F(r, v): \quad (8.5)$$

Զանի որ Նյուտոնյան մեխանիկայում $m = \text{const}$, ապա (8.5)-ը համարվեց է

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{dmv}{dt} = \frac{dp}{dt} = F \quad (8.6)$$

առնչությունը, որտեղ $p = mv$ -ն կոչվում է մասնիկի *իմպուլս*: Նյուտոնյան մեխանիկայում իմպուլսը մասնիկի արագությունից կախված գծային ֆունկցիա է:

2. *Ուժերի անկախ ազդեցության սկզբունքը*: Ենթադրենք մասնիկի վրա միաժամանակ ազդում են մի քանի մարմիններ: Եթե առանձին ազդելիս մարմինները մասնիկի վրա ազդում են $F_1, F_2, \dots, F_n$ ուժերով, ապա միաժամանակ ազդելիս մասնիկը ենթարկվում է

$$F = F_1 + F_2 + \dots = \sum_{i=1}^n F_i \quad (8.7)$$

ուժի ազդեցությանը, որը կոչվում է *համագոր ուժ* Եթե համագոր ուժը զրո է, ապա ասում են, որ մասնիկի վրա ազդող ուժերը *համակշռված են*: (8.7) արդյունքը փորձնական փաստերի ընդհանրացում է, որի հիմքում ընկած է հետևյալ պնդումը. *երկու մարմինների փոխազդեցության ուժերն անկախ են այն բանից, փոխազդու՞ն են նրանք* երրորդ մարմնի հետ, թե ոչ: Սա հայտնի է որպես *ուժերի անկախության սկզբունք*: Վերջինիս հաշվառմամբ Նյուտոնի երկրորդ օրենքը ներկայացվում է հետևյալ կերպ.

$$ma = \sum F_i \quad (8.8)$$

3. *Ուժի չափումը*: Ուժի չափման հիմքում ընկած է չափվող ուժերի համեմատումը հայտնի օրինաչափությամբ փոփոխվող ուժի հետ: Ընդ որում համեմատումը կատարվում է ուժերի համակշռման միջոցով (չափման *ստատիկ* եղանակ): *Ուժ չափող սարքը կոչվում է ուժաչափ*: Պարզագույն ուժաչափում չափվող ուժը համեմատվում է զսպանակի առաձգականության ուժի հետ (նկ. 2.2): Առաձգականության ուժը կորոդինատից (դեֆորմացիայի չափից) կախված է գծային օրենքով $F_d = -kx$, որում միևնույն նշանը ցույց է տալիս ուժի և դեֆորմացիայի ուղղությունների հակառակ լինելու փաստը, իսկ k -ն տվյալ զսպանակի համար հաստատուն է և կոչվում է զսպանակի *կոշտություն*:

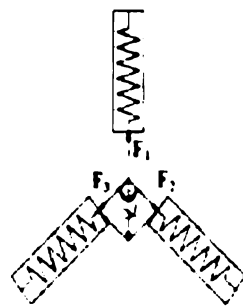
Ուժաչափով կարելի է չափել ոչ միայն ուժի մեծությունը, այլև որոշել նրա *ուղղությունը* (նկ. 2.2).

$$F = -F_d \quad (8.9)$$

Մի քանի ուժաչափերի միջոցով կարելի ցույց տալ, որ ուժերը *ենթարկվում են վեկտորների գումարման գուճառեազծի կանոնին*: Իրոք, մարմինը ձգող երեք ուժաչափերի ցուցմունքներով և α անկյան չափումով (նկ. 2.3) կարելի է համոզվել, որ հավասարակշռության վիճակում



Նկ.2.2



Նկ.2.3

$$F_3^2 = F_2^2 + F_1^2 + 2F_2F_1 \cos \alpha :$$

Ուժի չափունքն դիտարկել եղանակի հիմքում ընկած է

$$F_2 / F_1 = a_2 / a_1 \quad (8.10)$$

առնչությունը, որը երկու տարբեր ուժերի ու նրանց ազդեցությամբ միևնույն մարմնի ստացած արագացումների կապն է: Գիտենալով հայտնի F_1 ուժի ազդեցությամբ մասնիկի ստացած a_1 արագացումը և չափելով անհայտ F_2 ուժի հաղորդած a_2 արագացումը, կստանանք F_2 -ը:

4. *Չափման միավորների համակարգեր: Միավորների միջազգային համակարգում* (ՄՄՀ) զանգվածը, երկարությունը և ժամանակը չափվում են համապատասխանաբար *կիլոգրամ*, *մետր* և *վայրկյան* միավորներով:

$$[m] = \text{կգ} \quad [r] = \text{մ} \quad [t] = \text{վ} \quad (8.11)$$

Սրանք ՄՄՀ-ի *հիմնական միավորներն են* մեխանիկայում, որոնցով արտահայտվում են մյուս բոլոր մեխանիկական մեծությունների միավորները (*ածանցյալ միավորներ*):

Ուժի միավորը ՄՄՀ-ում *նյուտոնն* է (Ն), որը 1 կգ զանգվածով մարմնին հաղորդում է 1 մ/վ² արագացում

$$[F] = [m][a] = \text{կգ} \cdot \text{մ} / \text{վ}^2 = \text{Ն}:$$

Միավորների CGS համակարգում հիմնական միավորներ են

$$[m] = \text{գ} = 10^{-3} \text{կգ} \quad [r] = \text{սմ} = 10^{-3} \text{մ} \quad [t] = \text{վ} \quad (8.12)$$

Ուժի միավորը այս համակարգում կոչվում է *դին*

$$1 \text{ դին} = 1 \text{ գ} \cdot \text{սմ} / \text{վ}^2 = 10^{-5} \text{Ն}:$$

(8.13)

Մեխանիկայում միավորների այս երկու համակարգերը համարժեք են:

§9. ՆՅՈՒՏՈՒՄԻ ԵՐՐՈՂՈՂ ՕՐԵՆՔԸ ՓՈԽԱԾԻՑՈՒԹՅԱՆ ՁԵՎԵՐԸ

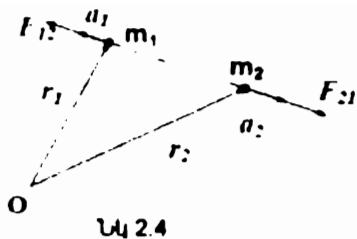
1. *Նյութածնի երրորդ օրենքը:* Հաշվարկի ինտեգրիալ համակարգում երկու մարմինների փոխազդեցության փորձերում ստացված (8.3) առնչությունից ելնելով, Նյուտոնը ծափերալել է իր *երրորդ օրենքը*:

Մարմինների քանակացած ազդեցության համապատասխանում է մեծությամբ հավասար և հակառակ ուղղված հակազդեցություն:

Քանի որ մարմինների փոխազդեցությունը քանակապես բնութագրվում է ուժով, օգտվելով Նյուտոնի երկրորդ օրենքից, կգրենք.

$$F_{12} = m_1 a_1, \quad F_{21} = m_2 a_2, \quad (9.1)$$

որտեղ F_{12} և F_{21} ուժերը բնութագրում են մասնիկների փոխազդեցությունը (առաջին ինդեքսը ցույց է տալիս, թե որ մասնիկի վրա է կիրառված ուժը, իսկ երկրորդը թե որ մասնիկի կողմից է այն ազդում, նկ.2.4): Վերջինների հաշվառմամբ (8.3) փորձնական առնչությունը կրկրունի հետևյալ տեսքը.



$$F_{12} = -F_{21} \quad (9.2)$$

Սա *Նյուտոնի երրորդ օրենքի* բանաձևումն է. *երկու մարմիններ փոխազդում են մեծությամբ հավասար, մարմինները միացնող գծի երկայնքով հակառակ ուղղված ուժերով:*

Նկատենք, որ Նյուտոնի երրորդ և երրորդ օրենքները նրա առաջին օրենքով տրվող «<—»-ում կատարված միևնույն փորձնական փաստերի ընդհանրացման արդյունք են: Այդ պատճառով *փորձնական ստուգման կարող են ենթարկվել ոչ թե Նյուտոնի օրենքներն առանձին-առանձին, այլ օրենքների համախումբն ամբողջությամբ:*

Նյուտոնի երրորդ օրենքի ուժերը «ազդող» և «հակազդող» ուժերի բաժանելը պայմանական է: Սխալ է նաև նրանց միջև պատճառական կապ որոնելը և «ազդող» ուժը պատճառ իսկ «հակազդողը» հետևանք համարելը: Երկու ուժերն առաջանում և վերանում են *միաժամանակ*: Ազդող և հակազդող ուժերն ունեն *միևնույն ֆիզիկական բնույթը*: Եթե մարմինն ազդում է առածգականության կամ գրավիտացիոն ուժով, ապա այն ենթարկվում է նույն բնույթի հակազդեցության ուժի:

2. Փոխազդեցության ձևերը: Մարմինները կարող են փոխազդել անմիջականորեն (կոնտակտի, հպման միջոցով) կամ հեռավորության վրա: Համաձայն ժամանակակից պատկերացումների, հեռավորության վրա մարմինների *բոլոր փոխազդեցություններն իրականացվում են մատերիական դաշտերով*: Մարմինն իր շրջապատող տարածության մեջ ստեղծում է որոշակի ուժային դաշտ, որն էլ ազդում է իրենում տեղավորված մարմնի վրա: Դաշտն օբյեկտիվ ռեալություն է, որով փոխազդեցությունները հաղորդվում են վակուումում լույսի տարածման $c = 3 \cdot 10^8$ մ/վ արագությամբ: Դաշտը, նույնիսկ, կարող է գոյություն ունենալ ինքնուրույն անկախ իրեն զրգոող մարմիններից: Այդպիսին է, օրինակ, էլեկտրամագնիսական դաշտը: Հաղորդող կալանի անջատումից հետո դաշտը չի վերանում, այլ տա-

րածվելով, ընդունիչներում գրգռում է համապատասխան փոփոխական հոսանքներ:

Չկա բացարձակ դատարկ տարածություն: Տարածությունը լցված է դաշտերով:

Նյութը և դաշտը ներկայացնում են մատերիայի գոյածները:

Մարմինների կոնտակտային փոխազդեցությամբ պայմանավորված չիման, առածգականության, ճնշման և այլ ուժերը վաղ ժամանակներից մարդու համար եղել են սովորական և համարվել են պարզ ու հասկանալի էլեկտրական, մագնիսական, գրավիտացիոն ուժերը, որոնց գոյությունը մարդկությունը սկսել է գիտակցել ավելի ուշ ժամանակներում, ընկալվել են որպես խորհրդավոր և անհասկանալի: Այդ է պատճառը, որ ծագել են դաշտային փոխազդեցությունները հանգեցնել մարմինների կոնտակտային փոխազդեցություններին: Իրականում դրությունը հակառակն է: Ավելի պարզ և հիմնական են *դաշտային փոխազդեցությունները*, իսկ կոնտակտային փոխազդեցությունները շատ ավելի բարդ են: Վերջիններս, ինչպես նաև քիմիական, մոլեկուլային, մկանային և այլ ուժերը, որոնց հանդիպում է մարդն առօրյա կյանքում, հանգեցվում են հետևյալ հիմնական փոխազդեցություններին՝ *գրավիտացիոն էլեկտրա-թույլ և ուժեղ:*

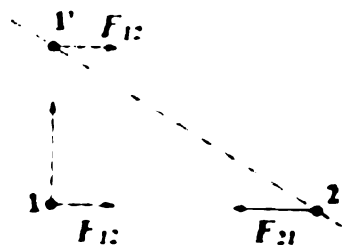
Գրավիտացիոն փոխազդեցությունները գործում են բոլոր մարմինների միջև առանց բացառության, իսկ էլեկտրա-թույլը լիցքավորված և լեպտոն կոչվող թեթև մասնիկների միջև: Այս երկու փոխազդեցություններն ունեն գործողության տեսականորեն անսահման մեծ շառավիղ և նվազում են հեռավորության քառակուսուն հակադարձ համեմատական օրենքով (ստատիկ դաշտերը): Այդ պատճառով բոլոր մակրոսկոպիկ երևույթները պայմանավորված են այդ փոխազդեցություններով:

Ուժեղ փոխազդեցություններն անհամեմատ հզոր են, բայց գործում են միկրոաշխարհում և բնութագրվում են գործողության $\sim 10^{-13}$ սմ կարգի շառավիղով: Այդ պատճառով մակրոսկոպիկ երևույթներում որևէ ներդրում չունեն և դասընթացի հետագա շարադրանքում նրանք ջննդության չեն առնվի:

3. Թեև նշված բոլոր փոխազդեցությունները տարածվում են վերջավոր արագությամբ, սակայն նյութոնյան մեխանիկայի հիմքում ընկած է *ակնթաղթային փոխազդեցությունների գաղափարը*: Դա հետևում է թեկուզև այն փաստից, որ փոխազդեցությունների քանակական բնութագիրը ուժը, կախված է տվյալ պահին մարմինների փոխադարձ դիրքից և հարաբերական արագությունից: Դա նշանակում է, որ մի մարմնի դիրքի կամ

արագության փոփոխությունը մյուս մարմինը զգում է ակնթաղթորեն՝ իր վրա ազդող ուժի փոփոխման միջոցով: Իրականում փոխազդեցությունների տարածման վերջավոր արագության պատճառով դիրքի նշված փոփոխությունը մարմինը կարող է զգալ ուշացումով, որը կարող է բերել *Նյուտոնի երրորդ օրենքի խախտմանը*: Դիցուք երկու մասնիկներ փոխազդում են իրարից բավականաչափ հեռացված 1 և 2 դիրքերում Նյուտոնի երրորդ օրենքին բավարարող ուժերով (նկ.2.5): Եթե 1 դիրքից մասնիկն արագ տեղափոխենք 1' դիրքը, ապա որոշ ժամանակ մասնիկները 1' և 2 կետերում կփոխազդեն նախորդ դիրքին համապատասխանող ուժերով, որոնք ուղղված չեն նոր դիրքում մասնիկները միացնող գծի երկայնքով: Ընդհանրապես, եթե կոնտակտային փոխազդեցություններում Նյուտոնի երրորդ օրենքը չունի բացառություն, դաշտային փոխազդեցություններում անհրաժեշտ է հաշվի առնել հետևյալը: Թեև անշարժ մասնիկների գրավիտացիոն և էլեկտրոնային փոխազդեցությունների համար ճիշտ է Նյուտոնի երրորդ օրենքը, սակայն անիմաստ է այն կիրառել դաշտմասնիկ փոխազդեցության օղակում:

Նյուտոնի երրորդ օրենքը խախտվում է նաև երկու շարժվող լիցքավորված մասնիկների փոխազդեցության համար, իրոք, վերջիններս փոխազդում են էլեկտրական և մագնիսական



Նկ.2.5

$$F_{12} = q_1 E_1 + q_1 [v_1 B_2]; \quad F_{21} = q_2 E_2 + q_2 [v_2 B_1]; \quad (9.3)$$

ուժերով, որտեղ E_k , B_k -ն k -րդ ($k=1,2$) մասնիկի ստեղծած էլեկտրական դաշտի լարվածությունն է և մագնիսական դաշտի ինդուկցիան, իսկ q_k , v_k -ն նրա լիցքն է և արագությունը: Եթե էլեկտրական դաշտերով մասնիկների փոխազդեցության համար ճիշտ է Նյուտոնի երրորդ օրենքը, ապա մագնիսական փոխազդեցության համար այն չի իրականանում, քանի որ լրենցման ուժերն ուղղված չեն մասնիկները միացնող ուղղի երկայնքով:

Նյուտոնի երրորդ օրենքը խախտվում է նաև ճառագայթման դաշտով փոխազդող համակարգերում: Լեբեդևը փորձնականորեն ցույց է տվել, որ ճառագայթման դաշտն օժտված է էներգիայով, իմպուլսով և ճնշում է գործադրում մարմինների վրա: Եթե մի պահ մոռանանք դաշտի մասին, ապա կստացվի, որ ճառագայթման դաշտի աղբյուր-մարմինը ազդում է մարմինների վրա, առանց ենթարկվելու վերջիններիս հակազդեցությանը (ենթա-

դրվում է, որ մարմինները լիովին կլանում են իրենց վրա ընկած ճառագայթումը):

§10. ՌԵԼԱՏԻՎԻՍՏԱԿԱՆ ԵԱՐԺՄԱՆ ՀԱՎԱՍՏԱՐՈՒՄԸ

Մինչև այժմ քննարկված փորձերը վերաբերում էին մարմինների դանդաղ շարժումներին: Արագ շարժումների փորձերում գրանցվում են նախորդ պարագրաֆներում շարադրված օրինաչափություններից էական շեղումներ: Օրինակ, $F = ma$ հարաբերությունը, որը նյուտոնյան մեխանիկայում հաստատուն մեծություն է, մեծ արագություններով մասնիկի շարժման փորձերում ցուցաբերում է տարօրինակ վարք: Այն փորձնականորեն ուսումնասիրվել է լիցքավորված մասնիկների արագացուցիչներում, որոնցում էլեկտրական և մագնիսական դաշտերով լիցքին հաղորդում են մեծ արագություններ: Օղակածն արագացուցիչներում լիցքի տանգենցիալ և նորմալ արագացումների և համապատասխան ուղղություններով ազդող էլեկտրական և մագնիսական ուժերի կախվածության փորձնական ուսումնասիրությունները տվել են հետևյալ արդյունքը.

$$\frac{F_{\parallel}}{a_{\parallel}} = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = m_{\parallel}, \quad \frac{F_{\perp}}{a_{\perp}} = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = m_{\perp} \quad (10.1)$$

Այստեղ v -ն մասնիկի արագությունն է, իսկ m -ը նյուտոնյան զանգվածը: Փոքր արագությունների դեպքում (10.1) առնչությունները տալիս են նյուտոնյան սովորական $F/a = m = const$ արդյունքը:

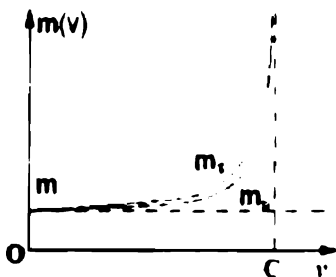
Նկ.2.6-ում պատկերված կորերը ներկայացնում են (10.1) կախվածությունները: Դրանք ցույց են տալիս, որ մեծ արագությունների դեպքում մասնիկի շարժման ուղղությամբ իներտ հատկությունները տարբերվում են շարժմանը ուղղահայաց ուղղությամբ իներտ հատկություններից: Հա-

մապատասխան իներտ հատկությունները բնութագրվում են մասնիկի երկայնական $m_{\parallel}$ և լայնական $m_{\perp}$ զանգվածներով:

Հաշվի առնելով տանգենցիալ և նորմալ արագացումների (5.10) և (5.11) բանաձևերը, մասնիկի վրա ազդող ուժը կարող ենք ներկայացնել այսպես.

$$F = m_{\parallel} a_{\parallel} + m_{\perp} a_{\perp}$$

իսկ օգտվելով (10.1)-ից, կարող ենք գրել



Նկ.2.6

$$F = \frac{\tau m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} + \frac{nm}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{v^2}{R} \quad (10.2)$$

որտեղ R -ը մասնիկի շարժման հետագծի կորուրթյան շառավիղն է արագացուցիչում: Օգտվելով նաև §5-ի

$$v = \tau v, \quad n \frac{v}{R} = \frac{d\tau}{dt},$$

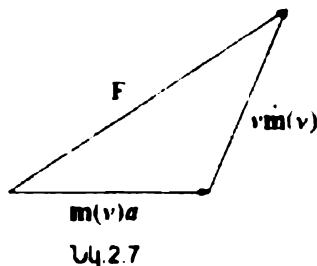
բանաձևերից, (10.2)-ը կներկայացնենք հետևյալ կերպ.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F: \quad (10.3)$$

Ստացվածը *ռելատիվիստական շարժման հավասարումն է*, որը Նյուտոնի երկրորդ օրենքի ընդհանրացումն է մեծ արագություններով շարժումների համար: Ինչպես և Նյուտոնի երկրորդ օրենքը, (10.3)-ը պետք է դիտել որպես փորձարարական փաստերի ընդհանրացման արդյունք: Փոքր արագությունների դեպքում (10.3)-ը հանգում է Նյուտոնյան հայտնի օրենքին: Նշանակելով

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p = m(v)v, \quad (10.4)$$

և անվանելով այդ մեծությունները *մասնիկի ռելատիվիստական զանգված* և *իմպուլս* ռելատիվիստական շարժման (10.3) հավասարումը կներկայացնենք սովորական (8.6) տեսքով: Իհարկե, այստեղ p -ն մասնիկի ռելատիվիստական իմպուլսն է: Ռելատիվիստական շարժման հավասարմանը կանոդադատենք §31-ում: Այստեղ նկատենք միայն, որ ի տարբերություն Նյու-



տոնյան մեխանիկայի, *ռելատիվիստական մեխանիկայում արագացումն ընդհանուր դեպքում չունի մասնիկի վրա ազդող ուժի ուղղությունը* (Նկ. 2.7): Դա պայմանավորված է մասնիկի երկայնական և լայնական զանգվածների տարբերությամբ: Արագացման և ուժի ուղղությունների տարբեր լինելը հետևում է (10.3) հավասարման հետևյալ ներկայացումից.

$$F = \frac{d}{dt} (m(v)v) = \dot{m}(v)v + m(v)a: \quad (10.5)$$

Երկու մասնավոր դեպքերում արագացումն ունի ուժի ուղղությունը. երբ ուժն ուղղահայաց է մասնիկի արագությանը (*լայնական ուժ*), և երբ գուգահեռ է նրան (*երկայնական ուժ*). Նշված դեպքերում ուժի և արագացման կապը տրվում է (10.1) բանաձևերով: Նշենք, որ F և v մեծությունների միևնույն արժեքների դեպքում երկայնական ուժը մասնիկին հաղորդում է ավելի մեծ արագացում, քան լայնականը:

Ռելատիվիստական մեխանիկայում զանգվածին բնորոշ դասական (8.4) հատկությունները խախտվում են: Արագությունից զանգվածի կախվածության գրաֆիկից (նկ.2.6) հետևում է, որ արագությունների բավականաչափ լայն տիրույթում $m(v)$ -ն գործնականորեն չի տարբերվում մասնիկի նյութաբանական $m = m(0)$ զանգվածից: Վերջինս ռելատիվիստական մեխանիկայում կոչվում է *հանգստիկան դադարի զանգված*:

§11. ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՈՒՂԻՂ ԵՎ ՀԱՎԱՌԱՐՁ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Նյութոսնի երկրորդ օրենքն արտահայտող (8.5) և շարժման ռելատիվիստական (10.3) հավասարումները կինեմատիկական առնչությունների հետ տալիս են.

$$m \frac{dv}{dt} = F(r, v); \quad v = \frac{dr}{dt}, \quad (11.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F; \quad v = \frac{dr}{dt}; \quad (11.1')$$

Այս առնչությունները լուծում են նյութոսնյան և ռելատիվիստական մեխանիկայում մասնիկների շարժման խնդիրները, որոնք կարելի է բաժանել երկու հիմնական դասի.

-տրված $r = r(t)$ շարժման օրենքով որոշել մասնիկի վրա ազդող ուժերը (ուղիղ խնդիր),

-հայտնի ուժերով որոշել մասնիկի շարժման օրենքը (հակադարձ խնդիր):

Ուղիղ խնդրի լուծումը որևէ մաթեմատիկական դժվարություն չի ներկայացնում, քանի որ այն, համաձայն (11.1) և (11.1') առնչությունների, հանգեցվում է $r(t)$ անընդհատ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալի որոշմանը:

Չորժնական առավել կարևոր նշանակություն ունի հակադարձ խնդիրը, որի վճռման համար պետք է լուծել դիֆերենցիալ հավասարում: Հակադարձ խնդիրներում (11.1) օրենքները *նյութական կետի շարժման դինամիկայի հիմնական հավասարումներն են*:

Հայտնի է, որ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը պարունակում է երկու անհայտ հաստատուններ: Հետևաբար հակադարձ խնդրի լուծման միարժեքությունն ապահովելու համար անհրաժեշտ է տալ շարժման վերաբերյալ *լրացուցիչ տեղեկություններ*: Որպես այդպիսիք սովորաբար տրվում են մասնիկի դիրքն ու արագությունը ժամանակի $t = 0$ պահին

$$r(0) = r_0, \quad v(0) = v_0 \quad (11.2)$$

որոնք կոչվում են *շարժման սկզբնական պայմաններ*:

Տարբեր խնդիրներ լուծելիս, ելնելով հարմարության նկատառումներից, օգտվում են շարժման նկարագրության կամ վեկտորական, կամ կոորդինատական կամ բնական եղանակից: Այդ դեպքում *նյութական կետի շարժման հիմնական հավասարումները* հարկ է ներկայացնել ըստ համապատասխան եղանակի: (11.1), (11.1')-ը փաստորեն այդ հավասարումներն են *վեկտորական եղանակում*:

Կոորդինատային եղանակում

Ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում.

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (11.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(m(v)\dot{x}) &= F_x, & \frac{d}{dt}(m(v)\dot{y}) &= F_y, \\ \frac{d}{dt}(m(v)\dot{z}) &= F_z, & v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2: \end{aligned} \right\} \quad (11.3')$$

Բևեռային կոորդինատական համակարգում.

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = F_\phi, \quad (11.4)$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

$$\left. \begin{aligned} m(v)(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + \dot{r}\dot{m}(v) &= F_r, \\ m(v)(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) + r\dot{\phi}\dot{m}(v) &= F_\phi: \end{aligned} \right\} \quad (11.4')$$

Բնական եղանակում

$$m\dot{v} = F_r, \quad m \frac{v^2}{R} = F_n, \quad v = \dot{\ell}; \quad (11.5)$$

$$\frac{m\dot{v}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = F_r, \quad \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{v^2}{R} = F_n; \quad (11.5')$$

Գրված հավասարումների աջ մասերում կանգնած են համապատասխան առանցքներով մասնիկի վրա ազդող ուժի բաղադրիչները, որոնք հակադարձ խնդրում համարվում են տրված:

Ստորև բերվող օրինակները լուսաբանում են հակադարձ խնդրի լուծման ընդհանուր մեթոդիկան:

Շարժումը ծանրության ուժաղաջում: Փորձնական ճանապարհով Գալիլեյը ցույց է տվել, որ ծանրության ուժի դաշտում բոլոր մարմիններն ընկնում են միևնույն $g = 9.8$ մ/վ² արագացումով: Հետևաբար (11.1)-ը վերածվում է կինեմատիկական

$$\frac{dv}{dt} = g = \text{const}; \quad v = \frac{dr}{dt} \quad (11.6)$$

առնչություններին: Ինտեգրելով (11.6) հավասարումները (11.2) սկզբնական պայմանների հաշվառմամբ. կստանանք

$$v(t) = v_0 + gt; \quad r(t) = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} gt^2; \quad (11.7)$$

Կախված հաստատուն r_0 , v_0 վեկտորների կոնկրետ ընտրությունից, մասնիկի (11.7) շարժումները կարող են լինել տարբեր: մասնիկը կարող է բարձրանալ վեր կամ իջնել ցած ուղիղ գծով կամ շարժվել պարաբոլական տարբեր հետագծերով:

Կոորդինատային եղանակում քննարկվող խնդրի լուծման համար ընտրենք ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգի X առանցքը հորիզոնական, իսկ Y-ը՝ ուղղաձիգ վեր ուղղություններով այնպես, որ նետման կետը համապատասխանի Y առանցքի y_0 արժեքին (նկ.2.8): Շարժման սկզբնական պայմանները կընդունեն հետևյալ տեսքը

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad y(0) = h, \\ v_x(0) &\equiv v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \\ v_y(0) &\equiv v_{0y} = v_0 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (11.8)$$

իսկ շարժման հավասարումները

$$\frac{dv_x}{dt} = 0; \quad v_x = \frac{dx}{dt}; \quad \frac{dv_y}{dt} = -g; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad (11.9)$$

Սկզբնական պայմանների հաշվառմամբ վեկտորներին ինտեգրումը տալիս է.

$$v_x(t) = v_{0x} = \text{const}, \quad v_y(t) = v_{0y} - gt, \\ x(t) = v_{0x} \cdot t, \quad y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - g \frac{t^2}{2}; \quad (11.10)$$

Այս լուծումները, որոնք կարելի էր նաև ստանալ վեկտորական (11.7) լուծումները պրոյեկտելով ընտրված X և Y առանցքների վրա, տալիս են մասնիկի շարժման սպառիչ նկարագիրը: Արտաքսելով շարժման (11.10) օրենքից ժամանակը, կստանանք *հետագծի հավասարումը* պարաբոլի տեսքով (նկ. 2.8).

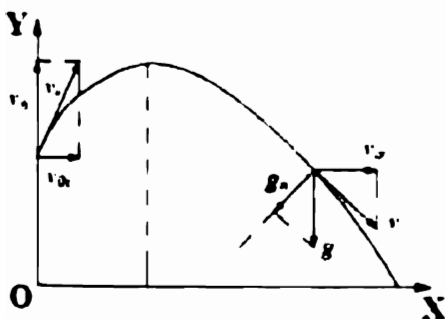
$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2; \quad (11.11)$$

Ֆիզիկական հավասարումներից ստացվող մաթեմատիկական լուծումները, որպես կանոն, ֆիզիկական իմաստ են ունենում պարամետրերի սահմանափակ արժեքների տիրույթում: Օրինակ, դիտարկվող շարժման համար (11.7)–(11.11) առնչությունները կիրառելի են միայն ժամանակի $0, t_{\text{max}}$ միջակայքում, որտեղ t_{max} –ը Նյուտոնի մակերևույթին մասնիկի անկման պահն է: Հետագա շարժումը չի նկարագրվում (11.10) լուծումներով, քանի որ մակերևույթի հետ բախման պահին մասնիկը ենթարկվում է

լրացուցիչ ուժերի, որոնք հաշվի չեն առնված շարժման (11.8) հավասարումներում:

Թռչչի առավելագույն բարձրությունը կարելի է որոշել, օրինակ, (11.11) ֆունկցիայի հետազոտմամբ.

$$y_{\text{max}} = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}; \quad (11.12)$$



Նկ.2.8

Թռչչի հատողությունը կարելի է որոշել $y(x_{\text{max}}) = 0$ պայմանից, վերցնելով (11.11) հավասարման դրական արմատը

$$x_{\max} = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} \left(1 + \sqrt{\frac{y_{\max}}{y_{\max} - y_0}} \right); \quad (11.13)$$

Կամայական կետում հետազոտի կորության չառավորը կվիճի

$$R(t) = \frac{v^2}{g_n} = \frac{v_x^2 + v_y^2}{g \sin \alpha}. \quad (11.14)$$

որտեղ α -ն v և g վեկտորների կազմած անկյունն է հետազոտի դիտարկվող կետում.

$$\cos \alpha = \frac{g v}{g v} = -v_x(t) / \sqrt{v_{0x}^2(t) + v_{0y}^2(t)}; \quad (11.15)$$

Վերջին երկու առնչություններից ստանում ենք

$$R(t) = \left[v_{0x}^2 + (v_{0y} - g t)^2 \right] / g v_{0x}; \quad (11.16)$$

Լիցքը համասեռ էլեկտրական դաշտում:

Դիցուք m զանգված և q լիցք ունեցող մասնիկը տեղավորված է X առանցքով ուղղված հաստատուն էլեկտրական դաշտում: Ստանանք լիցքի շարժման օրենքը ռելատիվիստական մեխանիկայում հետևյալ սկզբնական պայմանների դեպքում

$$x(0) = 0, \quad v_x(0) = 0. \quad (11.17)$$

Քանի որ էլեկտրական դաշտի կողմից մասնիկի վրա ազդող ուժը ուղղված է X առանցքով, իսկ Y և Z առանցքներով շարժումը բացակայում է, ապա ռելատիվիստական դինամիկայի հիմնական հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

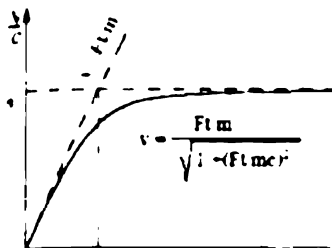
$$\frac{d}{dt} \left(m v_x / \sqrt{1 - v^2/c^2} \right) = q E_x = F_x; \quad (11.18)$$

Բաց թողնելով x ինդեքսը և ինտեգրելով այս հավասարումն ըստ ժամանակի, հաշվի առնելով $v(0) = 0$ սկզբնական պայմանը, կստանանք

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{F}{m} t,$$

որտեղից կորոշենք արագությունը.

$$v(t) = \frac{F t / m}{\sqrt{1 + (F t / m c)^2}}; \quad (11.19)$$



Նկ.2.9

Շարժման սկզբնական շրջանում, երբ $t \ll mc/F$, հայտարարը կարելի է փոխարինել մեկով: Այդ դեպքում կստանանք նյուտոնյան դինամիկայի արդյունքը. $v = Ft/m$ ժամանակի $t \gg mc/F$ պահերին՝

$$v(t) \approx c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{Ft} \right)^2 \right], \quad (11.20)$$

որը ցույց է տալիս, թե ինչ օրենքով է մասնիկի արագությունը մոտենում լույսի c արագությանը: Նկ.2.9-ում պատկերված

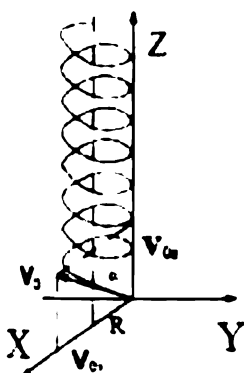
գրաֆիկը ներկայացնում է արագության ժամանակից կախվածությունը, որտեղից պարզորոշ երևում է, որ լույսի արագությանը մոտենալիս մասնիկի արագության աճը խիստ դանդաղում է, թեև մասնիկի վրա ազդում է նույն հաստատուն ուժը: Դա պայմանավորված է մասնիկի իներտության աճով: Ինտեգրելով (11.20) –ն ըստ ժամանակի և հաշվի առնելով $x(0)=0$ սկզբնական պայմանը, կստանանք մասնիկի շարժման օրենքը

$$x(t) = \frac{mc^2}{F} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} - 1 \right]:$$

Նկատենք, որ $t \gg mc/F$ պահերին ստանում ենք $x \approx ct$:

Լիցքը համասեռ մագնիսական դաշտում:

Դիցուք m զանգված և q լիցք կրող մասնիկը v_0 արագությամբ α անկ-



Նկ.2.10

յան տակ մտնում է B ինդուկցիայով համասեռ մագնիսական դաշտը: Որոշենք մասնիկի շարժման օրենքը: Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի Z առանցքը ուղղենք B -ով՝ $B(0,0,B)$, այնպես, որ v_0 արագությունն ընկած լինի XZ հարթության մեջ (Նկ.2.10): Շարժման սկզբնական պայմաններն այդ դեպքում կլինեն

$$v_{0z} = v_0 \sin \alpha, \quad v_{0y} = 0, \quad v_{0x} = v_0 \cos \alpha: \quad (11.21)$$

Նախ դիտարկենք շարժումը նյուտոնյան մեխանիկայի շրջանակներում: Շարժման հավա-

$$m \frac{dv}{dt} = q[vB]. \quad (11.22)$$

ընտրված կոորդինատային համակարգում ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0: \quad (11.23)$$

Արտաքսելով առաջին երկու հավասարումներից v_y -ը, կստանանք $\ddot{v}_x + \omega_H^2 v_x = 0$, որտեղ $\omega_H = qB/m$ և կոչվում է լիցքի *ցիկլոտրոնային հաճախություն*: Հաշվի առնելով (11.21) սկզբնական պայմանները, (11.23) հավասարումների լուծումը կստանանք հետևյալ տեսքով

$$v_x = v_{0x} \cos \omega_H t; \quad v_y = -v_{0x} \sin \omega_H t; \quad v_z = v_{0z}: \quad (11.24)$$

Ինտեգրելով արագություններն ըստ ժամանակի, կստանանք մասնիկի շարժման օրենքը

$$x(t) = R \sin \omega_H t; \quad y(t) = R(\cos \omega_H t - 1); \quad z = v_{0z} t. \quad (11.25)$$

որտեղ R -ը կոչվում է *ցիկլոտրոնային շառավիղ*.

$$R = \frac{v_{0x}}{\omega_H} = \frac{m}{qB} v_{0x}: \quad (11.26)$$

Մասնիկը մագնիսական դաշտին ուղղահայաց հարթության մեջ կատարում է ω_H հաճախությամբ շրջանագծային շարժում: Շրջանագծի շառավիղը տրվում է (11.26) բանաձևով: Մագնիսական դաշտի երկայնքով լիցքը շարժում է հավասարաչափ: Արդյունաբար շարժումը կատարվում է պարուրագծով (նկ. 2.10):

Նկատենք, որ մագնիսական դաշտը կորացնելով իրեն ուղղահայաց ուղղությամբ մասնիկի շարժումը, անփոփոխ է թողնում նրա արագության մեծությունը: Դա կարելի է ցույց տալ, (11.22) հավասարումը v -ով սկալարորեն բազմապատկելով.

$$mv \frac{dv}{dt} = \frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} = qv[vB] = 0,$$

Որտեղից ստանում ենք $v = \text{const}$: Սա ճիշտ է նաև ռելատիվիստական դիսանիկայում, քանի որ սկալարորեն բազմապատկելով $dp/dt = q[vB]$ հավասարումը p -ով, նորից կստանանք

$$p \frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dp^2}{dt} = qp[vB] = q \frac{mv[vB]}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0:$$

Ուրեմն, մագնիսական դաշտում շարժվող լիցքի համար ռելատիվիստական շարժման հավասարման մեջ արմատը կարելի է դուրս բերել դիֆերենցման նշանի տակից.

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} = q(vB):$$

Եթե մասնիկը շարժվում է մագնիսական դաշտին ուղղահայաց հարթության մեջ, ապա վերջին հավասարման հիման վրա հեշտ է ցույց տալ, որ այն նորից կատարում է շրջանագծային շարժում

$$\omega_c = \frac{qB}{m(v)} = \frac{qB}{m} \sqrt{1-v^2/c^2} \quad (11.27)$$

հաճախությամբ, որը դասական համանման մեծությունից տարբերվում է մասնիկի ռելատիվիստական զանգվածով: (11.27) կախվածությունը հաստատվել է օղակաձև արագացուցիչներում լիցքերի արագացման փորձերում: Ռելատիվիստական մասնիկի ցիկլոտրոնային շառավիղը կտրվի

$$R = \frac{v}{\omega_c} = \frac{mv}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{p}{qB} \quad (11.28)$$

բանաձևով: Այս բանաձևը թույլ է տալիս մասնիկի ցիկլոտրոնային շառավիղի չափման միջոցով հուսալիորեն որոշել նրա ռելատիվիստական իմպուլսը:

Շարժումը մածուցիկ միջավայրում:

Մածուցիկ հեղուկում շարժվող մասնիկի վրա ազդում է թաց չիման ուժը: Այն ուղղված է շարժմանը հակառակ և պարզապես դեպքում գնդային մարմնի համար արտահայտվում է Սթոքսի

$$F = -k_1 v, \quad k_1 = 6\pi\eta R \quad (11.29)$$

բանաձևով, որում R -ը գնդիկի շառավիղն է, η -ն հեղուկի մածուցիկության գործակիցը:

Նշելով ուղղաձիգ ընկնող գնդիկի շարժման հավասարումը կլինի¹

$$m \frac{dv}{dt} = mg - k_1 v: \quad (11.30)$$

Ենթադրելով $v(0) = 0$ և ինտեգրելով վերջինս, կստանանք

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right): \quad (11.31)$$

¹ Արթմինյան արտամոդոլ ուժն անտեսված է

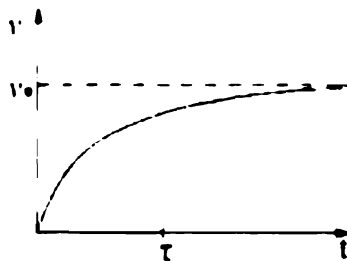
Ուրեմն, զնդիկի արագությունն աճում է էքսպոնենտալին օրենքով և արագ մոտենում սահմանային արժեքին՝

$$v_* = mg / k_1 : \quad (11.32)$$

Տեսականորեն սահմանային (11.32) արագությամբ հավասարաչափ շարժումը հաստատվում է շարժումն սկսելուց անվերջ մեծ ժամանակ հետո: Սակայն գործնականում

$$\tau = \frac{m}{k_1} = \frac{m}{6\pi\eta R} = \frac{2}{9} \rho \frac{R^2}{\eta} \quad (11.33)$$

ժամանակ անց զնդիկի արագությունը կարելի է համարել կայունացած: Բնութագրական ժամանակի (11.33) բանաձևում ρ -ն նյութի խտությունն է: Չիցերինում ($\eta = 14$ գ/սմ.վ) $R = 1$ սմ շառավղով պողպատյա զնդի համար ($\rho = 8$ գ/սմ³) ստանում ենք $\tau = 0,13$ վ: Այսինքն՝ գործնականում արագության կայունացումը տեղի է ունենում բավականաչափ արագ: Նկ 2.11-ում գրաֆիկը արտահայտում է արագության (11.31) կախվածությունը, որտեղից պարզորոշ երևում է արագության կայունացման ընթացքը:



Նկ.2.11

ԳԼՈՒԽ III

ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԿՋԲՈՒՆՔ

Մեխանիկական երևույթների ուսումնասիրությունը առաջին կատարել ենք հաշվարկի նույն ինտեգրալ համակարգում: Սակայն միևնույն երևույթը կարելի է ուսումնասիրել միմյանց նկատմամբ ուղղագիծ և հավասարաչափ շարժվող բազմաթիվ ՀԻՀ-երից յուրաքանչյուրի նկատմամբ: Բնականաբար հարց է ծագում *միատեսակ են արդյոք ընթանում բնության երևույթները տարբեր ՀԻՀ-երում և ի՞նչ կապ գոյություն ունի միևնույն երևույթի վերաբերյալ տարբեր ՀԻՀ-երում ստացված օրենքների և հավասարումների միջև:* Այս հարցերի պատասխանը տալիս է *հարաբերականության սկզբունքը*, որի շնորհիվ ՀԻՀ-երը ֆիզիկայում ծեռք են բերել բացառիկ կարևոր նշանակություն:

Պարզենք հարաբերականության սկզբունքի բովանդակությունը:

§12. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՄԱՅՈՒԹՅՈՒՆԸ: ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ԲԱՆԱԶԵՎԵՐ

Մեխանիկայում հարաբերականության սկզբունքը ծնակերպել է Գալիլեյ և Կրուսն է նրա անունը: Այն պնդում է.

Մեխանիկական երևույթները միատեսակ են ընթանում տարբեր ՀԻՀ-երում:

Սա նշանակում է, որ մի ՀԻՀ-ում կատարվող մեխանիկական փորձի արդյունքների հիման վրա հնարավոր չէ պարզել՝ շարժվում է այն, թե գտնվում է դադարի վիճակում Արեգակենտորոն հաշվարկի համակարգի (կամ այլ ՀԻՀ-ի) նկատմամբ: Այդ փաստը շարադրված է Գալիլեյի կողմից հետևյալ կերպ.

«Առանձնացնք որևէ մտերիմի հետ մեծ նավի տախտակամածի տակ ընդարձակ սենյակում և ներս թողնք այնտեղ ճանձեր, թիթեծներ և նման այլ մանր թռչող միջատներ: Թող այնտեղ լինի ջրով մեծ անոթ, որում լո-

դրում են ձկնիկները: Առատատաղից դույլ կախեք այնպես, որ ջուրը նրանից կաթիլ առ կաթիլ թափվի հատակին դրված անոթի նեղ անցքով ներս: Զանի դեռ նավն անշարժ կանգնած է, ուշադիր հետևեք, թե ինչպես մանր թռչող էակները միատեսակ կթռչեն սենյակի տարբեր ուղղություներով: Ձկնիկները, ինչպես կտեսնեք, անտարբեր կդողան բոլոր ուղղություներով: Բոլոր կաթիլները կդնկեն ներքևում դրված անոթի նեղ անցքից ներս: Նետելով ձեր մտերմին որևէ իր, ձեզնից ավելի ձիգ չի պահանջվի այն նետելու մի ուղղությամբ, քան այլ ուղղությամբ, եթե իրը նետվում է նույն հեռավորության վրա: Հրվելով երկու ուղքով, դուք կկատարեք միևնույն հեռավորության ցատկ՝ անկախ հրման ուղղությունից: Մանրագին հետևեք այս բոլորին, թեև ոչ ոք չի կասկածում, որ քանի դեռ նավն անշարժ է, այդ ամենը պետք է ընթանա հենց այդպես: Ստիպեք այժմ նավին շարժվել կամայական արագությամբ: Եթե շարժումը հավասարաչափ է, առանց ճոճումների, ապա նշված բոլոր երևույթներում դուք չեք հայտնաբերի նույնիսկ չնչին փոփոխություն և նրանցից ոչ մեկի միջոցով չեք կարող պարզել շարժվում է նավը, թե կանգնած է իր տեղում:

Գալիլեյի նկարագրած այս օրինակը պարզորոշ լուսաբանում է հարաբերականության սկզբունքի հիմնական էությունը: Եթե տարբեր ՀՐ-երում կան փորձասենյակներ, որոնցից յուրաքանչյուրը կահավորված է մեխանիկական երևույթ գրգռելու և ուսումնասիրելու սարքերով, ապա նրանցում հետազոտողները կարող են ստանալ իրենց ՀՐ-երին համապատասխանող մեխանիկայի օրենքներն ու հավասարումները: Արդյոք համընկնու՞մ են այդ օրենքներն ու հավասարումները, թե յուրաքանչյուր ՀՐ ունի իրեն հատուկ, մյուսներից տարբերվող մեխանիկա: Գալիլեյի հարաբերականության սկզբունքը պնդում է, որ ՀՐ-երի միմյանց նկատմամբ ուղղագիծ հավասարաչափ շարժումը որևէ կերպ չի կարող ազդել նրանց փորձասենյակներում ընթացող մեխանիկական երևույթների ընթացքի վրա և, հետևաբար, մի ՀՐ-ի «փակ՝» փորձասենյակում կատարված մեխանիկան ճիշտ է մնացած բոլոր ՀՐ-երի համար: Սա ենք հասկանում, երբ ասում ենք՝ բոլոր մեխանիկական երևույթները միատեսակ են ընթանում տարբեր ՀՐ-երում:

2. Այժմ պարզաբանենք մեկ այլ կարևոր հարց: Դիցուք տարածության ինչ-որ մասում գրգռված է որևէ մեխանիկական երևույթ (օրինակ, մասնիկ

¹ «Փակ» փորձասենյակ անելով պետք է հասկանալ փորձասենյակ, որում ուսումնասիրվում են միայն ներսում գրգռված ֆիզիկական երևույթները: «Բաց» փորձասենյակից կարելի է ուսումնասիրել նրանից դուրս տիրույթներում գրգռված ֆիզիկական երևույթները

է (նետկած), որն ուսումնասիրում են տարբեր ՀԻՀ-երի «բաց» փորձառեն-
յալներից: Արդյոք համընկնու՞մ են նրանց ուսումնասիրության արդյունք-
ները: Եվ եթե ոչ, ապա ի՞նչ կապ կա նրանց միջև: ՀԻՀ-երի հավասարա-
գրությանը հաճախ տրվում է հետևյալ սխալ մեկնաբանությունը, իբրև
մեխանիկական երևույթը *նույն տեսքն ունի* տարբեր ՀԻՀ-երից դիտողնե-
րի համար: *Ղա ճիշտ է*՝ գնացքի հետ կապված ՀԻՀ-ում ուղղածիզ ընկնող
մարմինը պարաբոլական հետագծով է շարժվում կառամատույցի հետ
կապված ՀԻՀ-ի նկատմամբ, քանի որ ազատ անկում կատարող մարմնի
շարժման օրենքը կախված է շարժման սկզբնական պայմաններից (տե՛ս
§11): Գնացքի նկատմամբ առանց սկզբնական արագության ընկնող մար-
մինը կառամատույցի նկատմամբ ունի գնացքի արագությանը հավասար
սկզբնական արագություն: Ուրեմն տարբեր ՀԻՀ-երի նկատմամբ մասնիկի
տվյալ շարժումը բնութագրվում է տարբեր սկզբնական պայմաններով և
հետևաբար, նրանց նկատմամբ միևնույն տեսքը՝ հետագիծն ունենալ չի
կարող:

*Տարբեր ՀԻՀ-երում մասնիկի շարժման $r = r(t)$ օրենքներն իրարից
տարբերվում են սկզբնական պայմաններով, իսկ սկզբնական պայմաննե-
րից անկախ օրենքները, օրինակ՝ շարժման դիֆերենցիալ հավասարում-
ները, պետք է ունենան միևնույն մաթեմատիկական տեսքը:*

Դիցուք մասնիկի շարժմանը հետևում ենք K և K' ՀԻՀ-երից, որոնցից
 K -ն «անշարժ է», իսկ K' -ը շարժվում է u արագությամբ: Առանց ընդհան-
րությունը խախտելու, կարելի է K և K' -ի առանցքներն ընտրել միմյանց
զուգահեռ այնպես, որ X և X' առանցքներն ունենան հարաբերական շարժ-
ման ուղղությունը (նկ. 3.1):

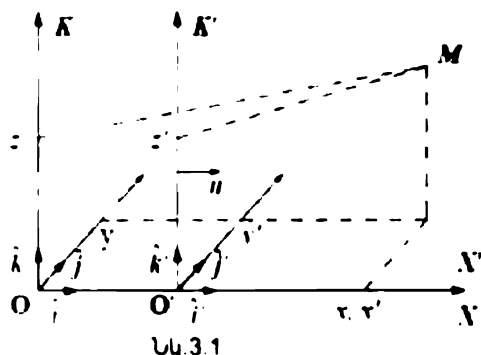
Մասնիկի շարժումը K համակարգի նկատմամբ կենտրոնացվի տա-
րածաժամանակային

$$x, y, z, t \quad (12.1)$$

իսկ K' -ում

$$x', y', z', t' \quad (12.2)$$

կոորդինատներով, որտեղ u
և t' -ը K և K' համակարգերի ժա-
մացույցների ցուցմունքներն
են: Ուսումնասիրելով մասնի-
կի տվյալ շարժումը, K և K'



ՀԻՀ-երի հետազոտողները կատանան շարժման օրենքներն ու հավասարումները: Պրանք որոշակի կապեր են համապատասխան ՀԻՀ-ի տարածաժամանակային կոորդինատների և նրանց ժամանակային ածանցյալների միջև

$$K\text{-ում} \quad f(p, \dot{p}, \dot{t}, t) = 0, \quad (12.3)$$

$$K'\text{-ում} \quad f'(p', \dot{p}', \dot{t}', t') = 0: \quad (12.4)$$

Ի՞նչ կապ կա այս ֆունկցիոնալ առնչությունների միջև:

Բնական է՝ K և K' ՀԻՀ-երի (12.1) և (12.2) կոորդինատների միջև պետք է գոյություն ունենան որոշակի կապեր

$$\left. \begin{aligned} x &= x(x', y', z', t'), & z &= z(x', y', z', t') \\ y &= y(x', y', z', t'), & t &= t(x', y', z', t') \end{aligned} \right\}, K \rightarrow K', \quad (12.5)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= x'(x, y, z, t), & z' &= z'(x, y, z, t) \\ y' &= y'(x, y, z, t), & t' &= t'(x, y, z, t) \end{aligned} \right\}, K' \rightarrow K: \quad (12.6)$$

Սրանք կոչվում են տարածաժամանակային կոորդինատների ձևափոխություններ, որոնց բացահայտ տեսքը կարելի է ստանալ միայն տարածության և ժամանակի վերաբերյալ որոշակի պատկերացումների հիման վրա: Այդ պատկերացումները ձևավորվում են նորից փորձից ստացվող տվյալների հիման վրա և ֆիզիկայում ունեն կարևոր նշանակություն:

Հարաբերականության սկզբունքը պնդում է, որ մեխանիկայի հավասարումներն ու օրենքները պետք է կուվարիանտ լինեն (12.5), (12.6) ձևափոխությունների նկատմամբ, այսինքն՝ տեղադրելով K -ի (12.3) օրենքում ձևափոխության (12.5) բանաձևերը, պետք է ստանանք K' -ի (12.4) շարժման օրենքը կամ հավասարումը և ընդհակառակը (12.6) ձևափոխությունները (12.4) հավասարմանը պետք է բերեն (12.3) տեսքին: Այդ պատճառով (12.5)-ը կոչվում է $K \rightarrow K'$, իսկ (12.6)-ը $K' \rightarrow K$ անցման ձևափոխության բանաձևեր:

Նկատենք, որ եթե (12.3) և (12.4)-ը շարժման օրենքներ են, ապա նրանք իրարից կտարբերվեն շարժման սկզբնական պայմաններով: Եթե շարժման սկզբնական պայմաններից անկախ օրենքներ են, ինչպիսիք են շարժման հավասարումները, ապա նրանք կտարբերվեն միայն նրանով, որ մեկը կարտահայտվի շտրիկված, իսկ մյուսը՝ չշտրիկված կոորդինատներով:

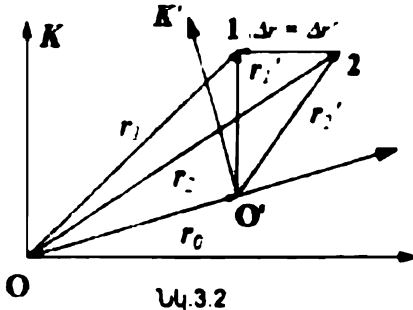
Եթե կոորդինատների ձևափոխությունները անփոփոխ են թողնում հավասարումները, ապա ասում են որ հավասարումներն ինվարիանտ են այդ ձևափոխությունների նկատմամբ:

Ուրեմն, հարաբերականության սկզբունքը պահանջում է, որ մեխանիկայի օրենքներն ու հավասարումները կոփարիանտ լինեն կոորդինատների (12.5), (12.6) ձևափոխությունների նկատմամբ:

§13. ԳԱԼԻԼԵՑԻ ՉԵՎԱՓՈՒՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. **Տարածության և ժամանակի բացարձակությունը:** Մակրոսկոպիկ մարմինների դանդաղ շարժումներին վերաբերող փորձերը ձևավորել են տարածության և ժամանակի բացարձակության պատկերացումը: Տարածության բացարձակությունը ենթադրում է որևէ երկու կետերի միջև հեռավորության (կամ որ նույնն է մարմնի գծային չափերի), իսկ ժամանակի բացարձակությունը պրոցեսների տևողության միևնույնը լինելը տարբեր հաշվարկի համակարգերում:

Ղիցուց հաշվարկի K' համակարգը շարժվում է K -ի նկատմամբ u արագությամբ: Որևէ ծողի երկարությունը նրա ծայրակետերի շառավիղ-վեկտորների տարբերությունն է (նկ. 3.2): Հետևաբար, տարածության բացարձակությունը մաթեմատիկորեն կարտահայտվի այսպես



$$r_1 - r_2 = r_1' - r_2' \quad (13.1)$$

Եթե զրգռվել է պրոցես, որի սկիզբն ու ավարտը K -ում համապատասխանել են ժամանակի t_1 և t_2 պահերին, իսկ K' -ում t_1' և t_2' պահերին, ապա ժամանակի բացարձակությունը նշանակում է

$$t_2 - t_1 = t_2' - t_1' \quad (13.2)$$

Տարածության և ժամանակի բացարձակության վերաբերյալ այս պատկերացումները եղել են այնքան սովորական, որ համարվել են «ինքնին հասկանալի» և նույնիսկ հատուկ չեն բանաձևվել: Սակայն դրանք ընկած են դասական մեխանիկայի յուրաքանչյուր բանաձևի հիմքում: Օրի-

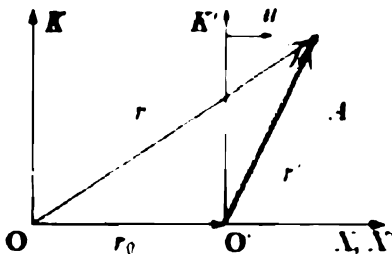
նակ. օգտվելով նկ.3.2-ում պատկերված վեկտորական եռանկյուններից, կարող ենք գրել

$$r_1 = r_0 + r'_1, \quad r_2 = r_0 + r'_2, \quad (13.3)$$

որտեղ r_0 –ն K և K' համակարգերի սկզբնակետերի հարաբերական դիրքը բնութագրող շառավիղ-վեկտորն է: Ստացված առնչություններն իրարից հանելով, կստանանք տարածության բացարձակության (13.1) պայմանը:

Տարածության և ժամանակի բացարձակության այս չարադրանքում մենք չենք պահանջել հաշվարկ K և K' համակարգերի իներցիալությունը: Այն ձիշտ է հաշվարկի ցանկացած համակարգերի համար, որոնք իրար նկատմամբ շարժվում են յուրյից շատ փոքր արագություններով:

2. Գալիլեյի ձևափոխությունները: Այժմ օգտվելով տարածության ու ժամանակի բացարձակությունից, ստանանք ձևափոխության (12.5), (12.6) բանաձևերի բացահայտ տեսքը նյութական մեխանիկայում: Պայմանա-



Նկ 3.3

վորվենք երկու համակարգերում ժամանակի սկիզբ համարել այն պահը, երբ K և K' -ի հարաբերական շարժման ընթացքում նրանց O և O' սկզբնակետերը համընկնում են. $x = x' = 0$, երբ $t = t' = 0$: Ժամանակի բացարձակության (13.2) պայմանից այդ դեպքում կրիտի, որ հետագա բոլոր պահերին K և K' համակարգերի ժամացույցները կունեն-

ան միևնույն ցուցմունքը.

$$t = t'. \quad (13.4)$$

Ժամանակի ընթացքը միատեսակ է հաշվարկի բոլոր համակարգերում:

Այժմ որոշենք K' –ում անշարժ A քանոնի երկարությունը կամայական $t = t'$ պահին: K' –ում այն պարզապես r' է, իսկ K –ում՝ $r = r_0$ (նկ. 3.3): Օգտվենք տարածության բացարձակությունից.

$$r - r_0 = r', \text{ կամ } r = r_0 + r': \quad (13.5)$$

Քանի որ r_0 –ն K' –ի տեղադրությունն է t ժամանակում, ապա $r_0 = ut$: Վերջինիս և (13.4) –ի հաշվառմամբ (13.5) –ը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$r = ut' + r'. \quad (13.6)$$

(13.6) և (13.4) կապերը տարածաժամանակային կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերն են նյուտոնյան մեխանիկայում և կոչվում են **Գալիլեյի ձևափոխություններ**

Ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում (նկ.3.3) Գալիլեյի ձևափոխություններն ունեն հետևյալ տեսքը

$$x = x' + ut', y = y', z = z', t = t'; \quad K \rightarrow K', \quad (13.7)$$

իսկ հակադարձ ձևափոխությունները

$$x' = x - ut', y' = y, z' = z, t' = t; \quad K' \rightarrow K: \quad (13.7')$$

Նկատենք, որ ձևափոխության է ենթարկվում միայն K և K' համակարգերի հարաբերական շարժման ուղղությամբ մասնիկի կոորդինատը (երկայնական կոորդինատ): Շարժման ուղղահայաց կոորդինատները (լայնական կոորդինատներ) ձևափոխության չեն ենթարկվում:

Ածանցելով (13.6)–ն ըստ ժամանակի, հաշվի առնելով (13.4)–ը, կստանանք

$$v = v' + u, \quad (13.8)$$

կամ

$$v_x = v'_x + u, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z, \quad (13.9)$$

որտեղ

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad v' = \frac{dr'}{dt'}, \quad (13.10)$$

մասնիկի արագություններն են համապատասխանաբար K և K' համակարգերում: Ստացված (13.9) բանաձևն արտահայտում է **արագությունների վեկտորական գումարման կանոնը**, որը ներկայացնում է արագությունների ձևափոխությունը նյուտոնյան մեխանիկայում: Ածանցելով (13.6)–ն ըստ ժամանակի երկրորդ անգամ, կունենանք

$$a = a' + \frac{du}{dt}; \quad (13.11)$$

Ջանի որ K և K' համակարգերը իներցիալ են, ապա $u = const$, որի շնորհիվ

$$a = a', \quad (13.12)$$

որտեղ

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad a' = \frac{dv'}{dt'}$$

մասնիկի արագացումներն են համապատասխանաբար K և K' համակարգերում: Ուրեմն, արագացումն ինվարիանտ է *Գալիլեյի ձևափոխությունների նկատմամբ*:

Յույց տանք, որ ինվարիանտ է նաև երկու մասնիկների հարաբերական արագությունը (մի մասնիկի արագությունը մյուսի նկատմամբ):

Դիցուք K և K' հաշվարկի համակարգերում 1 և 2 մասնիկներն ունեն v_1, v_2 և v'_1, v'_2 արագությունները: Համաձայն արագությունների գումարման վեկտորական (13.9) կանոնի՝

$$v_1 = v'_1 + u : \quad v_2 = v'_2 + u :$$

2 մասնիկի նկատմամբ 1 մասնիկի արագությունը կլինի

$$\Delta v = v_1 - v_2 = v'_1 - v'_2 = \Delta v' :$$

Ուրեմն

$$\Delta v = \Delta v'. \quad (13.13)$$

այսինքն՝ հարաբերական արագությունը միևնույնն է բոլոր $\llcorner\llcorner$ -երում:

3. Ապացուցենք, որ *Նյուտոնի երկրորդ օրենքն արտահայտող հավասարումը ինվարիանտ է Գալիլեյի ձևափոխությունների նկատմամբ*:

Գրենք Նյուտոնի 2-րդ օրենքը K և K' $\llcorner\llcorner$ -երում

$$m \frac{dv}{dt} = F(\Delta r, \Delta v); \quad (13.14)$$

$$m \frac{dv'}{dt} = F'(\Delta r', \Delta v'), \quad (13.15)$$

Քանի որ մասնիկի Նյուտոնյան զանգվածը անկախ է չարժեքի վիճակից, իսկ արագացումը, ինչպես տեսանք, ինվարիանտ մեծություն է, ապա Նյուտոնի 2-րդ օրենքի ձախ մասը Գալիլեյի ձևափոխությունների նկատմամբ ինվարիանտ է: Գիտենք, որ ուժը կախված է փոխազդող մարմինների փոխադարձ դիրքից և հարաբերական արագությունից, որոնք նույնպես ինվարիանտ մեծություններ են: Ինվարիանտ մեծություններից կախված ֆունկցիան նույնպես ինվարիանտ է: Ուրեմն, *Նյուտոնի երկրորդ օրենքն արտահայտող հավասարումը Գալիլեյ-ինվարիանտ՝ հավասարում է*:

Պարզագույն օրինակով ցուցադրենք չարժեքի օրենքների կոմպրիանտությունը: Դիցուք մասնիկը K' -ում կատարում է առանց սկզբնական

³ Գալիլեյի ձևափոխությունների նկատմամբ ինվարիանտ հավասարում

արագության ազատ անկում Պարզ է: K' -ում մասնիկի շարժման օրենքը կլինի՝

$$x' = x_0'; \quad y' = y_0' - g t'^2 / 2, \quad (13.16)$$

որտեղ x_0' , y_0' մեծությունները մասնիկի սկզբնական դիրքի կոորդինատներն են K' -ում: Մասնիկի դիրքը $t=t'=0$ պահին K -ում կրկնապատկվի նույն $x = x_0'$, $y = y_0'$ կոորդինատներով, քանի որ համաձայն մեր ընտրության՝ K և K' -ի սկզբնակետերը այդ պահին համընկնում են: Սակայն շնորհիվ K' -ի շարժման, մասնիկը K -ի նկատմամբ կունենա $v_0 \sim u$ սկզբնական արագություն: Հետևաբար, շարժման օրենքը K -ում կլինի՝

$$x = x_0 + ut; \quad y = y_0 - g t^2 / 2: \quad (13.17)$$

Դժվար չէ ստուգել, որ Գալիլեյի (13.7) ձևափոխությունները $x_0 = x_0'$, $y_0 = y_0'$ պայմանների հաշվառմամբ (13.17) շարժման օրենքը բերում են (13.16) տեսքին: Նույն ձևով (13.7) ձևափոխությունները (13.16) հավասարումները բերում են (13.17) տեսքի ինչպես պահանջում է հարաբերականության սկզբունքը:

§14. ԼՈՐԵՆՑԻ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ:

ԼՈՒՑՄԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ԲԱՃԱՐՉԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. *Տարածության և ժամանակի բացարձակության պատկերացման դժվարությունները:* Համաձայն Գալիլեյի հարաբերականության սկզբունքի՝ տվյալ ՀՀ-ում կատարվող որևէ մեխանիկական փորձով հնարավոր չէ հայտնաբերել այլ ՀՀ-երի նկատմամբ նրա շարժումը: Հարց է առաջանում, հնարավոր չէ՞ արդյոք այդ շարժումը հայտնաբերել օպտիկայի, էլեկտրադինամիկայի, քիմիայի, կենսաբանության կամ այլ քննազնային փորձերով, թե բնության բոլոր երևույթներն են միատեսակ ընթանում տարբեր ՀՀ-երում: Վերջին հարցադրման դրական պատասխանը տվել է էյնշտեյնը (1905թ.), և հայտնի է որպես *էյնշտեյնի հարաբերականության սկզբունք*:

Հարաբերականության սկզբունքի տարածումը բնության բոլոր երևույթների վրա հեղափոխական շրջադարձ էր ֆիզիկայում: Սակայն այն կապված էր որոշակի սկզբունքային դժվարությունների հետ, որոնց հաղթահարման համար պահանջվեց նապես վերանայել տարածության և ժամանակի վերաբերյալ մեր պատկերացումները: Իրոք, եթե հարաբերականության սկզբունքը ճիշտ է էլեկտրամագնիսական երևույթների համար,

ապա էլեկտրադինամիկայի հիմք կազմող Մաքսվելի հավասարումները՝ պետք է ինվարիանտ լինեն կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերի նկատմամբ։ Սակայն այս պահանջը չի բավարարվում, եթե օգտվում ենք Գալիլեյի (13.7) ձևափոխություններից։ Մաքսվելի հավասարումները ինվարիանտ չեն Գալիլեյի ձևափոխությունների նկատմամբ։ Հետևաբար մենք պարտավոր ենք հրաժարվել տարածության և ժամանակի բացարձակության պատկերացումներից, որոնց արդյունքն են Գալիլեյի ձևափոխությունները։

Իսկ ինչու՞ անպայման հրաժարվել Գալիլեյի ձևափոխություններից.

XX դարում ֆիզիկայի աննախընթաց զարգացման ճանապարհին հաճախ են բախվել նոր բնագավառի փորձնական փաստերը դասական պատկերացումների հետ։ Հիշեք, օրինակ, Ռեզերֆորդի փորձերի արդյունք հանդիսացող ատոմի մոլորակային մոդելի և դասական էլեկտրադինամիկայի միջև առաջացած հակասությունը։ Նման հակասությունները լուծվում են հին պատկերացումների վերանայման, նրանց շրջանակների լայնացման միջոցով։ Եվ դա լիովին հասկանալի է, հին պատկերացումները ձևավորված են եղել նոր բնագավառը չընդգրկող փորձերի հիման վրա, և բնականաբար, մնալով պատկերացումների նույն շրջանակներում հնարավոր չէ բացատրել նոր փորձնական փաստերը։

Նման իրավիճակ ստեղծվել էր այստեղ, Ֆիզիկայի համար ճշմարտության միակ չափանիշը փորձն է։ Մաքսվելի հավասարումները էլեկտրադինամիկայում կատարված բազմաթիվ փորձնական փաստերի ընդհանրացման արդյունք են, որոնցից ստացվող հետևությունները նորից փորձում ստուգված ճշմարտություններ են։ Այնպես որ Մաքսվելի հավասարումների ճշմարտացիությունը վեր է կասկածից։ Իսկ Գալիլեյի ձևափոխությունները տարածության և ժամանակի բացարձակության հետևանք են, որոնք, ինչպես արդեն նշել ենք, ձևավորվել են մակրոսկոպիկ մարմինների դանդաղ շարժումներին վերաբերող փորձերի հիման վրա։ Այնպես որ վերանայման ենթակա են տարածության և ժամանակի վերաբերյալ մեր պատկերացումները։

Իսկ ի՞նչ նոր պատկերացումներով փոխարինել դրանք։

Լորենցը փնտրել և գտել է տարածաժամանակային կոորդինատների

³ Դրանք էլեկտրամագնիսական երևույթների վերաբերյալ ստացված փորձնական փաստերի ընդհանրացման արդյունք են, որոնք ներկայացնում են Կուլոնի օրենքը, Ֆարադեյի էլեկտրամագնիսական ինդուկցիայի օրենքը, մագնիսական դաշտի մոդելային բնութագրեր և

յախի ձևափոխություններ, որոնց նկատմամբ Մաքսվելի հավասարմունքը մնում են ինվարիանտ Բանի որ Մաքսվելի հավասարումները սրոնակում են $c = 3 \cdot 10^{10}$ սմ/վ հաստատունը, որը լույսի (կամ որ նույնն է կտրամագնիսական ալիքների) արագությունն է վակուումում, ապա յ ձևափոխությունները պարունակում են c հաստատունը.

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, y = y', z = z'; \quad K' \rightarrow K, \quad (14.1)$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, y = y', z = z'; \quad K \rightarrow K': \quad (14.2)$$

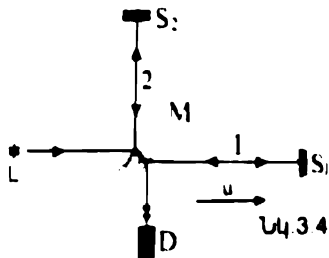
Այս բանաձևերը կոչվում են *Լորենցի ձևափոխություններ*:

Լորենցի ձևափոխությունների հիմքում ընկած է *լույսի արագության ցարժակության* գաղափարը: Այսինքն *լույսը հաշվարկի բոլոր համակարգերում տարածվում է նույն արագությամբ*: Իսկապես, թե՛ $K \rightarrow K'$ և թե՛ կառակ անցման ձևափոխության բանաձևերը պարունակում են վաւումում լույսի տարածման միևնույն $c = 3 \cdot 10^{10}$ սմ/վ արագությունը $c = c'$:

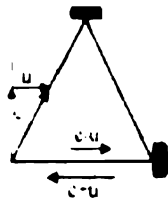
Այն փաստը, որ լույսը տարածվում է վերջավոր արագությամբ, կասծ չէր հարուցում նույնիսկ մինչև նրա փորձնական ճանապարհով հաստատում ու չափումը. Դեռևս Գալիլեյը փորձ է կատարել չափել լույսի ագությունը: Բայց այն, որ որևէ մատերիական օբյեկտի *արագությունը* որդ է միևնույնը *ի՞նչե՞լ ցանկացած հաշվարկի համակարգում*, անհամադելի է շարժումների դասական ըմբռնման հետ: Իսկապես, առօրյա րծերը մեզ բերել են այն խորը համոզման, որ եթե K -ի նկատմամբ u ագությամբ շարժվող K' համակարգում ունենք v' արագությամբ շարժվող րմին, ապա K -ի նկատմամբ նրա արագությունը պետք է լինի $u+v'$: ան ձևով թվում է, թե K -ում լույսի տարածման արագությունը պետք է լիււււ- c - u , որտեղ c' -ը K' -ում լույսի տարածման արագությունն է:

2. *Լույսի արագության բացարձակություն*ն առաջին ևուրջ փորձնական լացույցը տվել են Մայքելսոնն ու Մորլին (1887թ.): Նրանք մեծ ճշտութիւց տվեցին լույսի արագության անկախությունը այն առաքող աղւրի շարժման արագությունից: Փորձը կատարվել է նկ.3.4-ում ուրվագիծ յտկերված սարքով, որն այժմ կոչվում է *Մայքելսոնի ինտերֆերաչափ*: յը, Լ աղբյուրից ընկնելով կիսաթափանց M թիթեղի վրա, ճեղքվում է

որ մագնիսական դաշտ կարող են առաջացնել հոսանքներն ու փոփոխվող էլեկաւական դաշտը



Նկ.3 4ա, բ



երկու փոխադրվածության
և 2 ճառագայթների: Առա-
ջին ճառագայթն անցնում
է թիթեղով, անդրադա-
նում S_1 հայելուց, վերա-
դառնում է նորից թիթեղ
և ընկնում D դիտակի վրա:
Երկրորդ ճառագայթն ան-

դրադառնալով S_2 հայելուց և անցնելով M թիթեղով, գալիս է D դիտակ՝ վե-
րադրվելով առաջին ճառագայթի հետ և առաջացնում ինտերֆերենց (§85):
Սարքավորման մեջ հեռավորություններն ընտրված են այնպես, որ Երկրի
նկատմամբ այդ երկու ճառագայթները դիտակ հասնեն միաժամանակ
եթե լույսի արագությունը ենթարկվում է արագությունների գումարման
սովորական (13.9) կանոնին, ապա Արեգակի նկատմամբ առաջին ճա-
ռագայթը դեպի S_1 հայելին կշարժվի $c-u$, իսկ հակառակ ուղղությամբ $c+u$
արագություններով: Հետևաբար

$$t_1 = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{2cl}{c^2 - u^2}$$

Նման ծնով երկրորդ ճառագայթի արագությունը Արեգակի նկատմամբ
կլինի (Նկ.3 4.բ) $c' = (c^2 - u^2)^{1/2}$, այնպես որ

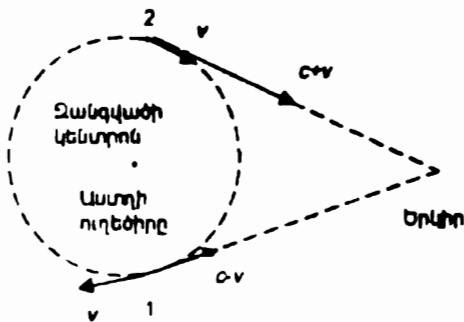
$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - u^2}}:$$

Նկատում ենք, որ t_1 և t_2 ժամանակները տարբեր են: Ժամանակների
այս տարբերության հետևանքով վերադրվող ալիքների փուլերի միջև կա-
ռաջանա $\omega(t_2 - t_1)$ տարբերություն, որտեղ ω –ն լուսային ալիքի հաճախու-
թյունն է: Նկարի հարթության մեջ սարքավորման 90° -ով շրջումը կբերի
փուլերի շեղման կրկնապատկմանը: Փորձում փուլերի այդ շեղումը գրան-
ցելով, հնարավոր կլինի որոշել Երկրի u արագությունը հակառակ հարա-
բերականության սկզբունքի, որը բացառում է ՀՀ-ում կատարված որևէ
փորձով նրա չարժման հայտնաբերումը: Չնայած փուլերի սպասվող շե-
ղումը շատ փոքր է (այն պետք է համապատասխաներ ինտերֆերենցի
շերտերի միջև հեռավորության մեկ երկրորդին), սարքավորումը հնարա-
վորություն էր տալիս գրանցել այդ շեղումից հարյուր անգամ փոքր շեղում-
ներ: Ինչևէ, սարքավորումը 90° -ով շրջելիս ինտերֆերենցի պատկերի փո-
փոխություն չգրանցվեց: Փորձի բացասական արդյունքը ցույց է տալիս, որ

էնկորամագնիսական երևույթների համար կիրառելի չեն Պալիչեյի ձևավորությունները և որ լույսի արագությունը կախված չէ աղբյուրի շարժման վիճակից, թե՛ 1, թե՛ 2 ճառագայթները տարածվում են միևնույն c արագությամբ, անկախ նրանից, թե ինչ $\ll$ -ից կոդիվեն:

Լույսի համար բալիստիկ վարկածի անգորությունը հաստատվեց նաև կրկնակի աստղերի շարժման աստղագիտական դիտումներով (դժ Սիտեր, 1913թ.): Վերջինս կայանում է հետևյալում: Ենթադրենք կրկնակի աստղի ուղեծրերն ու Երկիրը գտնվում են նույն հարթության մեջ (նկ.3.4գ), ընդ որում աստղերից յուրաքանչյուրը շարժվում է իրենց զանգվածի կենտրոնի շուրջ շրջանագծային ուղեծրով: Դիտարկենք աստղերից մեկի շարժումը և ընդունենք, թե ճիշտ է բալիստիկ վարկածը: Այդ դեպքում 1 դիրքից աստղի արձակած լույսը Երկիր կհասնի $t_1 = L(c - v)$ պահին (v -ն աստղի ուղեծրային շարժման արագությունն է, L -ը կրկնակի աստղի հեռավորությունը Երկրից), իսկ 2 դիրքից արձակված լույսը $t_2 = 772 + L(c + v)$ պահին, որտեղ 772 ն աստղի ուղեծրային շարժման պարբերությունն է: Հեշտ է համոզվել, որ բավականաչափ մեծ L արժեքների դեպքում կարող է $t_1 > t_2$, այսինքն՝ աստղը միաժամանակ կարող է երևալ երկու կամ ավելի դիրքերում, որը, սակայն, երբեք չի դիտվել:

Շուտով կոտեսենք, որ լույսի արագության բացարձակությունը հարաբերականության սկզբունքի հետ միասին հանգեցնում է տարածության և ժամանակի վերաբերյալ նոր պատկերացումների: Մասնավորապես պարզ կդառնա, որ լույսի արագությունը մասերիայի մեզ հայտնի ձևերի սահմանային արագությունն է:



Նկ 3.4գ. Դժ Սիտերի ապացույցը

**§15. ՀԱՐԱՔԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏՈՒԿ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ
ՀԻՄՆԱԴՐՈՒԹՅՆԵՐԸ: ՄԻԱԺԱՄԱՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆ ԼՈՐԵՆՑԻ
ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍՏԱՑՈՒՄԸ**

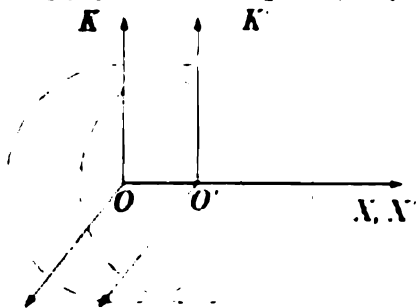
1. *Էյնշտեյնի հիմնադրույթները:* XX դարի սկզբին կուտակված փորձարարական տվյալների և կազմավորված տեսական պատկերացումների խորը, համակողմանի քննարկումը էյնշտեյնին հանգեցրեց դասական ֆիզիկայի սկզբունքների և ամենից առաջ տարածության և ժամանակի վերաբերյալ պատկերացումների վերանայմանը: Արդյունքում ստեղծվեց հարաբերականության հատուկ տեսությունը, որը լայնացրեց նյութոսկյան ֆիզիկայի շրջանակները, ընդգրկելով արագ շարժումների հետ կապված երևույթները:

Այս տեսության հիմքում էյնշտեյնը (1905թ.) դրել է անառարկելի երկու փորձնական փաստեր (էյնշտեյնի հիմնադրույթներ).

ա) *հարաբերականության սկզբունքը*, որը Քալիլեյի հարաբերականության սկզբունքի տարածումն է բոլոր ֆիզիկական երևույթների վրա,

բ) *լույսի արագության բացարձակությունը*, այսինքն՝ միևնույնը ինչել բոլոր ՀՀ-երում:

Էյնշտեյնի տեսության հիմք կազմող այս հիմնադրույթներից առաջինը փաստորեն, հայտնի է եղել դեռևս Քալիլեյի ժամանակներից, իսկ երկրորդը հաստատվել էր Մայքելսոնի և Մորլիի փորձերով: Ուրեմն ինչո՞ւ բացատրել այն հեղափոխական դերը, որն իրավամբ տրվում է այս հիմնադրույթների վրա կառուցված տեսությանը և վերագրվում էյնշտեյնին Բանն այն է, որ թեև սրանք, իսկապես, հայտնի են եղել, սակայն միշտ խուսափել են միասին, կողք-կողքի դրված դիտարկել, քանի որ դրանց ստացվող հետևանքները «հակասել են առողջ բանականությանը»:



Նկ. 3.5

Պատահական չէ, որ Ռիտցը քննադատելով այս տեսությունը բերել է հետևյալ օրինակը: Դիցուք մեծ և արագությամբ շարժվող K' ՀՀ-ի O' սկզբնակետում տեղադրված լույսի աղբյուրը $v = 0$ պահին, երբ O' -ը համընկել է K -ի O սկզբնակետի հետ, առաքել է կարճատև լուսային իմպուլս (Նկ. 3.5): Եթե ճիշտ են այս երկու

պատույատները, ապա հետագա $t, t' > 0$ պահին K -ում լուսային ալիքը կգտնվեցնի α շառավիղով գնդային մակերևույթ, իսկ K' -ում գնդային մակերևույթ, բայց O' կենտրոնով (նկ.3.5): Անհերքելությունը ըստ Ռիտցի այն է, որ լուսային ալիքը տարբեր Δt -երում միաժամանակ գտնվեցնում է տարբեր գնդային մակերևույթներ, և ակնհայտ էր, որ լույսի համար ճիշտ է բախտիկ վարկածը:

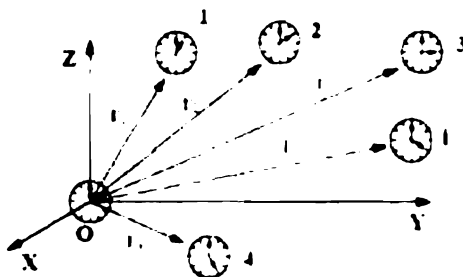
Միաժամանակություն: Ելնշտեյնն առաջինը հասկացավ բերված երկու պատույատների միջև թվացող հակասության պատճառը: Այն թաքնված էր տարածության և ժամանակի վերաբերյալ տիրող դասական պատկերացումներում, և ամենից առաջ *միաժամանակության* հասկացության մեջ, որը դասական մեխանիկայում համարվել է «ինքնին հասկանալի» և նույնիսկ հատուկ չի էլ տախմանվել: Եվ դա հասկանալի է, քանի որ տարածության և ժամանակի դասական պատկերացումների հիմքում ընկած է ակնթարթային փոխազդեցությունների գաղափարը, այսինքն՝ փոխազդեցությունների տարածման անվերջ մեծ արագության ենթադրությունը: Այդ փաստը պարզաբանելու համար հիշենք, թե ինչպես ենք միաժամանակեցնում ժամացույցները: Լսելով O կետում գտնվող ռադիոյի «ձգրիտ ժամանակի ազդանշանները», մենք ուղղում ենք մեր ժամացույցները, անկախ այն բանից, թե ինչ հեռավորության վրա ենք գտնվում հաղորդող կայանից: Ակնհայտ է, որ ժամացույցների նման միաժամանակեցման հիմքում ընկած է ազդանշանների ակնթարթային տարածման ենթադրությունը: Իրականում ռադիոալիքները տարածվում են վերջավոր արագությամբ և նման միաժամանակեցման արդյունքում ավելի մեծ հեռավորության վրա գտնվող ժամացույցները «ետ ընկած» կլինեն կայանին մոտ տեղավորված ժամացույցներից: Ճիշտ է, ռադիոալիքների տարածման մեծ արագության, միաժամանակեցման ենթակա տարածության մասշտաբների ոչ մեծ լինելու, ինչպես նաև մեր ժամացույցների միաժամանակեցման ճշտության վրա դրվող ոչ խիստ պահանջների շնորհիվ նման գործողությունն արդարացված է: Իսկ եթե անհրաժեշտ է միաժամանակեցնել տվյալ հաշվարկի համակարգում բաշխված միլիարդից շատ մեծ հեռավորության վրա գտնվող ժամացույցները: Ինչպե՞ս վարվել այդ դեպքում:

Ժամացույցների միաժամանակեցման համար էլնշտեյնն առաջարկել է օգտվել լուսային ազդանշաններից: Տվյալ հաշվարկի համակարգում *ժամացույցների միաժամանակ աշխատելը նշանակում է.*

1. բոլոր ժամացույցներն ունեն միևնույն ընթացքը,

2. տվյալ պահին ժամացույցներն ունենան միևնույն ցուցմունքը: Այսինքն՝ որևէ ժամացույցից (ասենք, սկզբնակետում գտնվող O ժամացույցից) լուսային ազդանշան ուղարկելու պահին բոլոր ժամացույցների ցուցմունքները լինեն նույնը:

Առաջին պայմանն ստուգելու համար կարելի է O ժամացույցից, օրինակ, մեկ թույն պարբերությամբ լուսային կարճատև ազդանշաններ ուղարկել: Եթե մյուս բոլոր ժամացույցները այդ ազդանշաններն ընդունում են մեկ թույն պարբերությամբ, ապա առաջին պայմանն իրականացված է: Երկրորդ պայմանը կարելի է ստուգել հետևյալ կերպ: Բոլոր ժամացույցները տվյալ հաշվարկի համակարգում անշարժ են նախապես հայտնի դիրքերում (նկ.3.6): O սկզբնակետում ճաղի՞ն հայտնում է ճշգրիտ ժամանակի ազդանշանները. «այժմ O ժամացույցի ցուցմունքը t_0 է»: Մյուս ժամացույցները միաժամանակեցված կլինեն, եթե այդ ազդանշանը իրենց հասնելու



Նկ 3 6

պահին ունենան $t_i = t_0 + r_i/c$ ցուցմունքները, որտեղ r_i -ն i -րդ ժամացույցի հեռավորությունն է սկզբնակետից, իսկ c -ն՝ լույսի արագությունը վակուումում: Այս ձևով յուրաքանչյուրը հաշվի է առնում իր գրանցած ազդանշանի ուշացումը:

Եթե նշված գործողությունները կատարված են, ապա կարող ենք պնդել, որ տվյալ հաշվարկի համակարգի բոլոր ժամացույցները ցույց են տալիս այդ համակարգի համար միևնույն ընդհանուր ժամանակը:

Եսկան է նշել, որ նման ձևով սահմանված ժամանակը վերաբերում է միայն այն հաշվարկի համակարգին, որի նկատմամբ միաժամանակեցված ժամացույցները դադարի վիճակում են: Նման գործողություն պետք է կատարել մյուս բոլոր ΔK -երում:

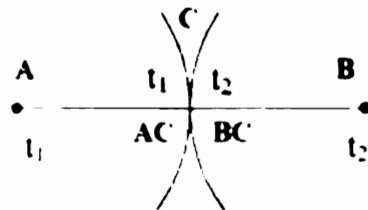
Իսկ ինչպե՞ս միաժամանակեցնել տարբեր ΔK -երի ժամացույցներն իրար հետ: Սա *սխալ հարցադրում է*: Տարբեր ΔK -երի համար կարելի է միայն ընտրել ժամանակի սկզբնական $t_0 = t'_0 = 0$ պահ: Դրանից հետո ժամացույցների ցուցմունքները կհամընկնեն, թե ոչ՝ *ցույց կտա փորձը*:

Փոխադրելությունների տարածման արագության բացարձակությունը հանգեցնում է տարբեր ՀԻՀ-երում ժամանակի ընթացքների տարբերության: Եթե սկզբնական պահին $t_0 = t'_0$, ապա հաջորդ պահերին արդեն $t \neq t'$: Ելնշտեյնը ներմուծում է «պատահար» հասկացությունը: Պատահարը դեպք է, որը բնութագրվում է 3 տարածական x, y, z կոորդինատներով, որտեղ այն կայացել է, և ժամանակային t կոորդինատով, երբ այն տեղի է ունեցել: Նույն պատահարը K' -ում կբնութագրվի այլ x', y', z', t' կոորդինատներով: Ի տարբերություն նյութոսյան պատահարի, որը տարբեր ՀԻՀ-երում կարող է տարբերվել միայն տարածական կոորդինատներով, ռելատիվիստական ֆիզիկայում պատահարները կարող են տարբերվել չորս կոորդինատներով: Այդ իմաստով կարելի է պատկերացնել երևակայական քառաչափ տարածություն, որի չորս փոխուղղահայաց առանցքներից երեքը X, Y, Z առանցքներն են, իսկ չորրորդը՝ ժամանակի առանցքը: Փաստորեն, Լորենցի (14.1), (14.2) բանաձևերը *պատահարի կոորդինատների մախրիսություններն են*:

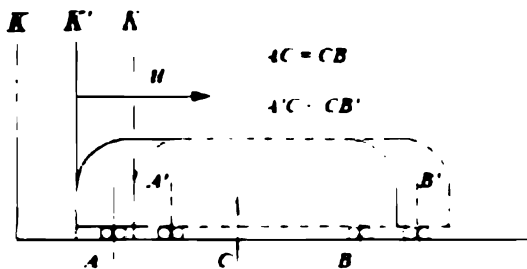
2. Միաժամանակության հարաբերականությունը: ժամացույցների միաժամանակեցման գործողությունը թույլ է տալիս երկու պատահարների միաժամանակության համար կատարել հետևյալ համարժեք պնդումը. *A և B երկու պատահարները միաժամանակ են եթե նրանց կայացման պահերին A և B կետերից առաջված լուսային ազդանշաններն իրար հանդիպեն այդ կետերը միացնող հատվածի միջնակետում* (նկ.3.7): Պարզագույն օրինակով ցույց տանք, որ նման կերպ սահմանված *միաժամանակությունը հարաբերական է*:

Պիցուք K ՀԻՀ-ի նկատմամբ մեծ u - c արագությամբ շարժվող գնացքի հետ կապված է K' ՀԻՀ-ը: Ենթադրենք K -ի նկատմամբ *միաժամանակ* հարվածել են A և B կայծակները, որոնք սևացրել են գնացքի և K համակարգի համապատասխան մասերը (նկ. 3.8): Ենթադրենք նաև, որ A, B կայծակներից արձակված լուսային ալիքները միմյանց բախվելով առաջացրել են երրորդ C կայծակը, որը նորից սևացրել է գնացքի և K -ի համապատասխան մասերը (նկ.3.8):

A, B կայծակներից լուսային ալիքները երրորդ C կայծակն առաջացնելու համար պահանջվում է $AC = BC$: ժամանակ, որի ընթացքում



Նկ.3.7



Նկ.3.8

գնացքը, նրա վրա կաթակների A' , B' հետեւորով, տեղաշարժված կլինի ω_1 -ով:

Այնպես, որ եթե $AC = BC$, այսինքն K համակարգում A, B կայծակները հարվածել են միաժամանակ, ապա A' և B' կայծակները միաժա-

մանակ չեն լինի գնացքից դիտողի նկատմամբ: $A'C < CB'$:

Ուրեմն *պատահարների միաժամանակությունը հարաբերական է*։ Երբ ասում ենք, որ որևէ երկու պատահարներ միաժամանակ են, ապա անհրաժեշտ է նշել համապատասխան ՀՌՀ-ը, քանի որ այլ ՀՌՀ-երի նկատմամբ դրանք միաժամանակ չեն լինի:

3. Հորիզոնական ճեպփոխությունների արտածումը: Այժմ, օգտվելով այս պարագրաֆի սկզբում ներկայացրած Ռիտցի օրինակից, *տրանսևերիզի ճեպփոխությունները:* K ՀՌՀ-ի տարածաժամանակային կոորդինատներով (ուսային ալիքի զբաղեցրած գնդային մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (15.1)$$

իսկ K' -ում նույն ալիքի գնդային մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2: \quad (15.2)$$

Մեր նպատակն է գտնել պատահարի x, y, z, t և x', y', z', t' կոորդինատների կապը: Զանի որ K ՀՌՀ-ում ցանկացած ուղղագիծ և հավասարաչափ շարժում նույնպիսի շարժում է K' ՀՌՀ-ում, ապա այդ *կոորդինատների միջև կապը պետք է լինի գծային*:

Ռիտարկենք նախ K' -ում $y' = b' = \text{const}$ հարթության կետերը: Այդ կետերը K -ում պատկանում են $y = b$ հարթությանը: b և b' հաստատունները ներկայացնում են նշված հարթությունների հեռավորությունները XY հարթությունից և քանի որ դրանք որոշվում են շարժման տարբեր վիճակներում գտնվող քանոններով, ապա

$$b' = b \quad (15.3)$$

հարաբերությունը կարող է տարբերվել մեկից:

Յույց տանք, որ $k = 1$ իսկապես, այս հարաբերությունը կարող է կախված լինել միայն դիտարկվող ՀԻՀ-երի հարաբերական շարժման և արագությունից: Եթե այժմ անփոփոխ թողնելով Y և Y' առանցքների ուղղությունները, հակառակ շրջենք X, Z և X', Z' առանցքները, ապա b և b' -ը չեն փոխվի, բայց K և K' ՀԻՀ-երի դերերը կփոխվեն. K -ն K' -ի նկատմամբ կշարժվի և արագությամբ X' առանցքի դրական ուղղությամբ: Ուրեմն, ինչպես և առաջ, կարող ենք գրել

$$b/b' = k : \quad (15.4)$$

Ստացված (15.3) և (15.4) առնչություններից հետևում է, որ $k^2 = 1$ և քանի որ Y և Y' առանցքների դրական ուղղությունները համընկնում են, ապա b և b' -ը պետք է ունենան միևնույն նշանը

$$k = 1, \quad b = b' \quad (15.5)$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$y' = y : \quad (15.6)$$

Նման ծնով կստանանք

$$z = z' : \quad (15.7)$$

Ուրեմն, *պատահարի լայնական կոորդինատները չեն ծափոխվում:*

Հաշվի առնելով (15.6) և (15.7) առնչությունները (15.1) ու (15.2)-ը կներկայացնենք հետևյալ կերպ.

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2, \quad (15.8)$$

որտեղ x', t' -ը x և t -ի գծային ֆունկցիաներ են. Ներկայացնենք

$$x' = \alpha x + \beta t, \quad t' = \gamma x + \delta t, \quad (15.9)$$

որտեղ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ հաստատունները պետք է որոշվեն այնպես, որ (15.8) պայմանն իրականանա ցանկացած x և t -ի դեպքում: Բերված ծափոխությունների աջ մասերում չենք ավելացրել ազատ անդամներ, քանի որ K և K' -ի համար մեր ընտրած սկզբնական պայմանների շնորհիվ ($t=t'=0$ պահին նրանք O և O սկզբնակետերը համընկնում են $x=x'=0$) այդ ազատ անդամները նույնաբար զրո են: Այժմ (15.9) -ում հաշվի առնենք K -ի նկատմամբ K' -ի և արագությամբ շարժման փաստը: K ՀԻՀ-ում ժամանակի ցանկացած է պահին K' -ի $x' = 0$ սկզբնակետը գրավում է $x = w$ դիրքը: Տեղադրելով (15.9)-ի առաջին առնչության մեջ $x'=0$, $x = w$ կամայական t -ի դեպքում, կստանանք հետևյալ կապը

$$\beta = -\alpha w : \quad (15.10)$$

Համանման ձևով K -ի $x=0$ սկզբնակետը K' -ի նկատմամբ շարժվում:
 $x' = -u'$ օրենքով: Հաշվի առնելով այս փաստը (15.9)-ում և արտաքսելով
 նրանցից t ժամանակը, կստանանք

$$\beta = -\delta u, \text{ այսինքն } \alpha = \delta. \quad (15.11)$$

Ստացված առնչությունները (15.9) ձևափոխությունները կհանգեցնեն
 հետևյալ տեսքին

$$x' = \alpha(x - ut), \quad t' = \gamma x + \alpha t: \quad (15.12)$$

Տեղադրելով վերջինս (15.8) առնչության մեջ և պահանջելով, որ այն
 իրականանա x և t -ի կամայական արժեքների համար (այսինքն՝ հավասարեցնելով ստացված հավասարման ձախ և աջ մասերում x^2 , t^2 , xt արտահայտությունների գործակիցները), կորոշենք α և γ գործակիցները

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \gamma = \frac{-u/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}: \quad (15.13)$$

Հաշվի առնելով (15.13) -ը (15.12) -ում, ստանում ենք Լորենցի (14.11)
 (14.2) ձևափոխությունները:

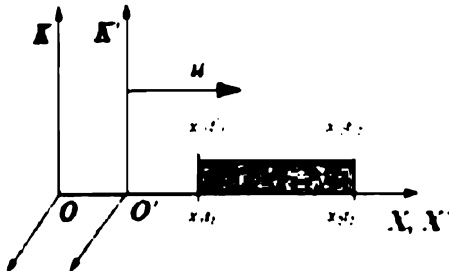
Լորենցի ուղիղ և հակադարձ ձևափոխությունները մեկից մյուսը կարելի է ստանալ շտրիխված կողողինատները փոխարինելով համապատասխան չշտրիխվածներով, փոխելով u արագության նշանը: Սա համապատասխանում է հարաբերականության սկզբունքին, քանի որ եթե K -ի նկատմամբ K' -ը շարժվում է u արագությամբ, ապա K' -ի նկատմամբ K -ն կշարժվի - u արագությամբ: Նույն հատկությամբ օժտված են նաև *Գալիլեյի ձևափոխությունները*: Լորենցի ձևափոխություններում տեղադրելով $c = \infty$, ստանում ենք Գալիլեյի (13.7), (13.8) ձևափոխությունները: Սա ցույց է տալիս, որ դասական ֆիզիկան փոխազդեցությունները դիտում է որպես անվերջ մեծ արագությամբ ընթացող պրոցեսներ:

Նկատենք, որ ռելատիվիստական ֆիզիկայում հարաբերականության սկզբունքը պնդում է ֆիզիկական օրենքների և հավասարումների ինվարիանտությունը Լորենցի ձևափոխությունների նկատմամբ:

§16. ԼՈՐԵՆՑԻԱՆ ԿՐՃԱՏՈՒՄ, ԺԱՄԱՆԱԿԻ ՂԱՆՂԱՂՈՒՄ

Տարածության և ժամանակի հարաբերականության ակնառու լուսաբանումը կարելի է տալ ուսումնասիրելով Լորենցի ձևափոխություններից բխող հետևանքները:

1. *Լորենցյան կրճատում:* Դիցուք K ՀՌՀ-ի նկատմամբ մեծ u -ը արագությամբ շարժվող K' ՀՌՀ-ում ունենք l_0 երկարության անշարժ քանոն (նկ.3.9): Ինչպիսի՞ն է նրա երկարությունը K ՀՌՀ -ից չափելիս: Այս հարցի պատասխանը կարող են տալ Լորենցի ծնագիտությունները, եթե նախապես պարզենք, թե ինչ պետք է հասկանալ “շարժվող քանոնի երկարություն” ասելով:



Նկ. 3.9

Շարժվող քանոնի երկարությունը: Նրա ծայրակետերի միաժամանակյա չափված կոորդինատների տարբերությունն է:

Նկատենք, որ անշարժ քանոնի երկարությունը չափելիս կարևոր չէ, թե նրա ծայրակետերի x'_1 , x'_2 կոորդինատները ժամանակի որ պահերին են չափված:

$$l_0 = x'_2 - x'_1: \quad (16.1)$$

Քանոնի երկարության որոշման համար անհրաժեշտ է կատարել երկու չափում (պատահար): K ՀՌՀ-ում այդ պատահարների կոորդինատները նշանակենք x_1 , t_1 (քանոնի մի ծայրակետի x_1 կոորդինատի չափում t_1 պահին) և x_2 , t_2 (մյուս ծայրակետի x_2 կոորդինատի չափում t_2 պահին): Նույն պատահարները K' ՀՌՀ-ում կունենան x'_1 , t'_1 և x'_2 , t'_2 կոորդինատները, որոնք K -ում համապատասխան կոորդինատների հետ կապված են Լորենցի (15.4) ծնագիտություններով

$$x'_1 = \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad (16.2)$$

$$t'_1 = \frac{t_1 - ux_1/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad t'_2 = \frac{t_2 - ux_2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad (16.2')$$

Ըստ սահմանման, քանոնի երկարությունը K ՀՌՀ-ում նրա ծայրակետի x_1 , x_2 կոորդինատների տարբերությունն է, եթե դրանք չափված են միաժամանակ:

$$l = x_2 - x_1, \text{ եթե } t_1 = t_2: \quad (16.3)$$

Օգտվելով (16.1) - (16.3)-ից, կստանանք K և K' ՀԻՀ-երում քանոնի երկարությունների միջև կապը

$$\ell_c = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

որտեղից

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} < \ell_0: \quad (16.4)$$

Քանի որ արմատատակ արտահայտությունը մեկից փոքր մեծություն է, ապա K ՀԻՀ-ում քանոնի երկարության համար կատացվի ℓ_0 -ից փոքր արժեք: Սա կոչվում է *առարկայի գծային չափերի լորենցյան կրճատում* և լորենցյան կրճատումը այնքան ավելի մեծ է, որքան ավելի արագ է շարժվում առարկան:

Լորենցյան կրճատման են ենթարկվում առարկայի միայն երկայնական չափերը, լայնական չափերը կրճատման չեն ենթարկվում: Ղա պարզորոշ երևում է Լորենցի ձևափոխություններից ($y' = y$, $z' = z$):

Առարկայի գծային չափերն այն ՀԻՀ-ում որի նկատմամբ առարկան անշարժ է, կոչվում է առարկայի սեփական երկարություն: Օրինակ, դիտարկված օրինակում քանոնի սեփական երկարությունը ℓ_0 -ն է:

Սեփական երկարությունը առարկայի առավելագույն երկարությունն է էֆեկտի համակողմանի քննարկման նպատակով ստանանք (16.4)-ը օգտագործելով (15.15) ձևափոխության բանաձևերը:

$$\ell = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1 + u(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\ell_0 + u(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}: \quad (16.15)$$

Քանի որ չափումը միաժամանակ է K -ի նկատմամբ, ապա այն միաժամանակ չի լինի K' -ի նկատմամբ: Այդ պատճառով (16.5)-ում $t'_2 - t'_1 \neq 0$ Դրանում կարելի է համոզվել, օգտվելով (16.2)-ից

$$t'_1 - t'_2 = \frac{t_1 - t_2 - u(x_1 - x_2)/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{u\ell/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}: \quad (16.6)$$

Այստեղ օգտվեցինք K -ում երկարության չափման (16.3) պայմանից Տեղադրելով (16.6)-ը (16.5)-ում, կստանանք լորենցյան կրճատման (16.4) բանաձևը:

2. Ժամանակի դաժնադրման էֆեկտը: Այժմ քննության արժենք ժամանակի հարաբերականության հարցը: Դիցուք K' համակարգում անշարժ

լույսի աղբյուրը միացվել է t_1 և անջատվել է t_2 պահերին: Այդ պատահարների կոորդինատները K և K' ՀԻՀ-երում նշանակենք համապատասխանաբար (x_1, t_1) , (x_2, t_2) և (x'_1, t'_1) , (x'_2, t'_2) : Քանի որ K' -ում լույսի աղբյուրը գտնվել է դադարի վիճակում, ապա

$$x'_1 = x'_2, \quad t'_0 = t'_2 - t'_1, \quad (16.7)$$

որտեղ t'_0 -ն լույսի առաքման տևողությունն է K' համակարգում:

Պրոցեսի տևողությունն այն հաշվարկի համակարգում որի նկատմամբ պրոցեսն զրգռողը գտնվում է դադարի վիճակում կոչվում է պրոցեսի սեփական տևողություն կամ սեփական ժամանակ: Ուրեմն, t_0 -ն լույսի աղբյուրի ճառագայթման սեփական ժամանակն է: Այժմ որոշենք աղբյուրի ճառագայթման տևողությունը K ՀԻՀ-ում Օգտվելով Լորենցի ձևափոխություններից

$$t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + u(x'_2 - x'_1)/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

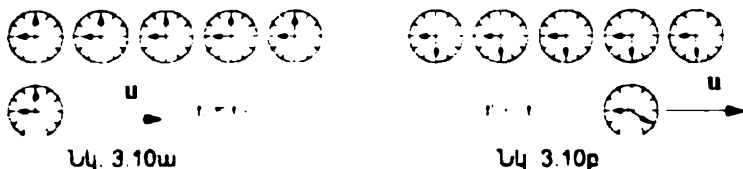
և հաշվի առնելով այստեղ (16.7)-ը, կստանանք

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \geq t_0, \quad (16.8)$$

Ուրեմն, պրոցեսի ամենակարճ տևողությունը սեփական ժամանակն է: Հաշվարկի ցանկացած այլ համակարգում այն ունի ավելի երկար տևողություն: Սա ժամանակի դանդաղման էֆեկտն է, որը ժամանակի հարաբերականության հիմնական արտահայտությունն է օելատիվիստական մեխանիկայում: Այն ցույց է տալիս, որ շարժվող ժամացույցները միշտ են են ընկնում անշարժ ժամացույցների ցուցմունքի հետ համեմատելիս, եթե սկզբնական պահին նրանք ունեցել են նույն ցուցմունքը (նկ.3.10):

Ժամանակի դանդաղման (16.8) բանաձևը հաստատվել է տարրական մասնիկների ֆիզիկայի բազմաթիվ փորձերով: Մասնավորապես հաջողությամբ բացատրվել է Երկրի մթնոլորտի վերին $10\text{--}20$ կմ բարձրության շերտերում ծնվող μ մեզոնների առաջին հայացքից «տարօրինակ» թվաքող վարքը: Այս մասնիկների տեսական ուսումնասիրությունը ցույց է տվել, որ նրանք անկայուն են և ծնվելուց մոտավորապես $2 \cdot 10^{-6}$ վ հետո տրոհվում են, առաջացնելով էլեկտրոն և նեյտրինո: Եթե ենթադրենք, որ մթնոլորտի վերին շերտում ծնված մեզոնները շարժվում են լույսին մոտ $v \sim c$ արագությամբ, ապա իրենց «կյանքի» տևողության ընթացքում 600 մ հեռավոր-

րութունից ավել չեն կարող անցնել՝ Սակայն այս մասնիկները գրանցվում են Երկրի մակերևույթին տեղակայված սարքերով:



Դա բացատրվում է նրանով, որ նշված ժամանակը մեզոնի «կյանքի» սեփական տևողությունն է τ_0 -ն: Երկրային ժամացույցի ցուցմունքով մեզոնի «կյանքի» տևողությունը որոշվում է (16.8) բանաձևով, որը շնորհիվ այդ մասնիկի մեծ արագության, անհամեմատ մեծ է τ_0 -ից: Այդ է պատճառը, որ նրանք գրանցվում են Երկրի մակերևույթին դրված սարքերով:

Երկար ժամանակ տիրում էր այն թյուր կարծիքը, թե առարկաների գծային չափերի լորենցյան կրճատումը փորձում կարող է դիտվել: Ենթադրվում էր, օրինակ, որ լույսին մոտ արագությամբ շարժվող գունդը պետք է երևա չարժան ուղղությամբ սեղմված էլիպսոիդի տեսքով Միայն 1959թ. Թերրելը ցույց տվեց, որ *լորենցյան կրճատման անմիջական գրանցումը* (նկարահանումը, դիտումը) *սկզբունքորեն անհնարին է ժամանակի հարաբերականության պատճառով*: Բանն այն է, որ շարժվող առարկայի տարբեր կետերից միաժամանակ արձակված լուսային ալիքները միաժամանակության հարաբերականության պատճառով այնքան ցանցաթաղանթի (լուսազգայուն թիթեղի եթե առարկան լուսանկարվում է) վրա ընկնում են ոչ միաժամանակ: Այլը միաժամանակ գրանցում է այն ալիքները, որոնց առարկայից դուրս են եկել տարբեր պահերին: Արդյունքում շարժվող առարկայի պատկերն ստացվում է աղճատված: Դա, ինչպես ցույց են տվել հաշվարկները, լիովին չեզոքացնում է լորենցյան կրճատումը:

3. Լորենցյան կրճատման և ժամանակի դանդաղման երևույթները հաճախ տեղի են տալիս այսպիսի առարկությունների, թե՛ ու՞ր մնաց հարաբերականության սկզբունքը, բոլոր ՀԻՀ-երի հավասարազորությունը, եթե առարկայի չափերը մի ՀԻՀ-ում կարճ են, քան մյուսում, պրոցեսները մեկում ավելի դանդաղ են ընթանում, քան մյուսում, ապա դրանք արդյո՞ք բավական չեն ՀԻՀ-երը իրարից տարբերելու, մեկի շարժումը մյուսի նկատմամբ հայտնաբերելու համար:

Նման առարկությունները անհիմն են հետևյալ պարզ պատճառով:

Եթե K համակարգում դիտողը, համեմատելով իր ժամացույցի ցուցմունքը K' -ում շարված ժամացույցների ցուցմունքների հետ, հայտնաբերում է իր ժամացույցի ետ ընկնելը, ապա K' -ի դիտողն էլ իր ժամացույցի

ցուցմունքը համեմատելով K -ում շարված ժամացույցների ցուցմունքների հետ, կհայտնաբերի իր ժամացույցի ետ ընկնելը: Նույնը կգրանցեն K և K' -ի դիտողները միմյանց քանոնների երկարությունները չափելիս: Այնպես որ այն, ինչ կարող է ասել K -ի դիտողը K' -ում ընթացող երևույթների մասին, նույնը կասի K' -ի դիտողը K -ում ընթացող երևույթների մասին: Երկուսն էլ իրավացի են, քանի որ այդպիսիք են շարժվող համակարգերում երևույթների տարածաժամանակային օբյեկտիվ հարաբերությունները, որոնք, ի դեպ, հարաբերականության սկզբունքի և լույսի արագության բացարձակության անմիջական հետևանքներն են:

2. Երկվորյակների պարադոքսը: Հատուկ հարաբերականության տեսության ստեղծումից հետո տարբեր հեղինակների կողմից բերվել են այսպես կոչված «պարադոքսներ», որոնք այս կամ այն կերպ «հակասում են առողջ բանականությանը»: Սակայն բոլոր այդ «պարադոքսները» արդյունք են այս կամ այն հարցի թյուրըմբռնման: Բերենք դրանցից առավել հայտնին «երկվորյակների պարադոքսը» Երկվորյակ եղբայրներից մեկն արագընթաց տիեզերանավով ուղևորվում է u , լուսատարի հեռավորության երկնային մարմին և ետ վերադառնում: Եթե տիեզերանավի արագությունը u է, ապա Երկրի ժամացույցով այդ ուղևորությունը կտևի

$$\tau = \frac{2l}{u} = \frac{2ct_0}{u},$$

իսկ տիեզերանավի ժամացույցով, ավելի կարճ՝

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - u^2/c^2}:$$

Այս բանաձևերի մեջ մտնող l , և u մեծությունների ընտրությամբ կարելի է ստանալ, օրինակ, որ ուղևորության վերջում տիեզերանավի ժամացույցով անցել է, օրինակ, $t_0 = 20$ տարի, իսկ երկրային ժամացույցով հարյուր կամ ավելի տարիներ: Այստեղ պարադոքսային է համարվում այն, որ խախտվում է հաշվարկի «տիեզերանավ» և «Երկիր» համակարգերի հավասարազորությունը: Երկրի վրա մնացած եղբայրը, եթե ապրեր, ապա կլիներ անցել, 140 տարեկան, իսկ տիեզերագնաց եղբայրը վերադարձել է Երկիր 40 տարեկան հասակում: Ինչում է բանը: Սա պարզաբանելու համար հիշենք, որ հարաբերականության սկզբունքը պահանջում է *իներցիալ հաշվարկի համակարգերի հավասարազորությունը*: Իսկ բերված օրինակում տիեզերանավի հետ կապված հաշվարկի համակարգը *ոչ իներցիալ* է: Զանի որ սկզբում Երկրի նկատմամբ այն գտնվել է դադարի վիճակում (եթե միևնույն արժեքի են բերվել նրանց ժամացույցները), հետո շարժվել է

արագացմամբ և ծեռք է բերել ս արագություն Հասնելով երկնային մար-
նին, կորացրել շարժման հետագիծը՝ ետ վերադառնալու համար, որը
նույնպես արագացմամբ շարժում է և, վերջապես, հասնելով երկիր, նորից
կանգ է առել (եթե համեմատել են նրանց ժամացույցները երկրորդ ան-
գամ): Նկատենք, որ տարբեր ՀԻՀ-երում գտնվող միևնույն երկու ժամա-
ցույցների ցուցմունքները իրար հետ կարող են համեմատվել միայն մեկ
անգամ: Այն փաստը, որ տարբեր ՀԻՀ-երի միևնույն ժամացույցների ցուց-
մունքները համեմատվել են երկու անգամ, արդեն նշանակում է հարա-
բերականության սկզբունքի խախտում:

Իսկ ի՞նչ կարելի է ասել արագացմամբ շարժվող ժամացույցի ցուց-
մունքի մասին. Պարզվում է, որ *ժամանակի դանդաղման (16.8) բանաձևը
ճիշտ է նաև հաշվարկի համակարգի արագացմամբ շարժման հետևյալ
երկու կարևոր դեպքերում*

ա) եթե հաշվարկի համակարգը ՀԻՀ-ի նկատմամբ կատարում է հա-
վասարաչափ շարժում կոր հետագծով՝ Օրինակ, մագնիսական դաշտում
արագ շարժվող լիցքի համար (16.8)-ը կիրառելի է.

բ) եթե ՀԻՀ-ի նկատմամբ հաշվարկի համակարգը շարժվում է ուղղա-
գիծ հավասարաչափ, բացառությամբ կարճ ժամանակահատվածների
(որոնց տևողությունը անհամեմատ կարճ է դիտարկվող լրիվ շարժման
տևողությունից), որոնց ընթացքում շարժումը կարող է կրել արագացող
բնույթ: Ինչպիսին, օրինակ, «Երկվորյակների պարադոքսում» տիեզերա-
նավի շարժումն է:

Ուրեմն, *արագացմամբ շարժվող ժամացույցը ՀԻՀ-ի ժամացույցից
միշտ ետ է ընկնում:* Դա սկզբունքային հնարավորություն է տալիս «ճանա-
պարհորդելու դեպի ապագան»:

§17. ԻՆՏԵՐՎԱԼ, ՆՐԱ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏՈՒԹՅՈՒՆ

Ինվարիանտ մեծությունները ֆիզիկայում ունեն մեծ դեր: Փմնական
խնդիրը, որ դնում է հարաբերականության տեսությունը, հենց ինվա-
րիանտ մեծությունների, հավասարումների, օրենքների հայտնաբերումն է
Նման մի ինվարիանտ մեծության կծանոթանանք այս պարագրաֆում:

Դիցուք կայացել են երկու պատահարներ, որոնք K և K' -ում բնութա-
գրվում են (x_1, t_1) , (x_2, t_2) և (x'_1, t'_1) , (x'_2, t'_2) կոորդինատներով: Տվյալ ՀԻՀ-ում
երկու պատահարների միջև *ինտերվալ* (հեռավորություն) ասելով հասկանում
են մի մեծություն, որի քառակուսին տրվում է այսպես

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 :$$

Այստեղ $t_{12} = t_1 - t_2$ - պատահարները բաժանող ժամանակն է, իսկ $l_{12} = |x_1 - x_2|$ - ընդհանուր տարածական հեռավորությունը: Այդ պատահարների միջև ինտերվալը K' -ում կլինի՝

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2 :$$

Օգտվելով Լորենցի ձևափոխություններից, կարելի է ցույց տալ, որ $s_{12}' = s_{12}$, կամ՝

$$c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 : \quad (17.2)$$

Ուրեմն, եթե ասում ենք «պատահարների միջև ինտերվալը s_{12} է», ապա այն ճշմարիտ է բոլոր ՀՀ-երի համար: Ինտերվալի ինվարիանտությունը հարաբերականության տեսության մեջ ունի հիմնարար դեր և տարբեր հարցերի պարզաբանման և խնդիրների լուծման կարևոր միջոց է:

Տարածության և ժամանակի հարաբերականությունը պարզորոշ բխում է ինտերվալի ինվարիանտությունից:

Կախված այն բանից, թե ինտերվալում որ բաղադրիչն է գերակշռում ժամանակայինը ($c t_{12} > l_{12}$), թե տարածականը ($c t_{12} < l_{12}$), տարբերվում են *ժամանականակնական* ($c t_{12} > l_{12}$) և *տարածանական* ($c t_{12} < l_{12}$) ինտերվալներ:

Ժամանականակնական ինտերվալներն իրական են: Եթե երկու պատահարներ բաժանված են ժամանականակնական ինտերվալով, ապա գոյություն ունի այնպիսի մի K' հաշվարկի համակարգ, որի նկատմամբ այդ երկու պատահարները տեղի կունենան միևնույն կետում ($l_{12}' = 0$) :

$$c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 : \quad (17.3)$$

Այդ դեպքում (17.3)–ում $l_{12}' = 0$ K' -ում այն ժամանակն է, որով բաժանված են նրա միևնույն կետում կատարվող երկու հաջորդական պատահարները (սեփական ժամանակ): Ուրեմն, միևնույն մարմնի հետ կատարվող ցանկացած երկու պատահարներ բաժանված են ժամանականակնական ինտերվալով: *Ժամանականակնական ինտերվալներով են բաժանված պատճառահետևանքային կապով կապված պատահարները:* Իսկապես, տարածության մի կետում «պատճառ» պատահարը մեկ այլ կետում «հետևանք» պատահար առաջացնելու համար անհրաժեշտ է մատերիական օղակի գոյությունը: Եվ քանի որ այդ միջանկյալ օղակը ինֆորմացիան պատճառից հետևանք չի կարող տեղափոխել ավելի արագ, քան լույսի արագությունն է վազկումում, ապա միշտ $c t_{12} \geq l_{12}$:

Տարածաժամանակ ինտերվալները կենդ էեն: Եթե երկու պատահարներ բաժանված են տարածաժամանակ ինտերվալով, ապա գոյություն ունի այնպիսի մի K' համակարգ, որի նկատմամբ այդ պատահարները տեղի կունենան միաժամանակ ($t' = 0$)

$$c^2 t_1'^2 - l_1'^2 = -l_{12}'^2 \quad (17.4)$$

Բնական է, որ տարածաժամանակ ինտերվալով բաժանված պատահարների միջև որևէ պատճառական կապ լինել չի կարող:

Պատահարների տարածաժամանակ կամ ժամանակամասնիկ լինելը բացարձակ է. K -ում ժամանակամասնիկ ինտերվալով բաժանված երկու պատահարներ չեն կարող K' -ում բաժանված լինել տարածաժամանակ ինտերվալով: Մասնավորապես, K -ում տարածության նույն կետում կատարված պատահարները չեն կարող K' -ում տեղի ունենալ միաժամանակ:

Լույսի հետ կատարվող բոլոր պատահարները միմյանցից բաժանված են *զրոյական ինտերվալով*: Այդ պատճառով $x_{12}=0$ ինտերվալները ($\alpha_{12}=\beta_{12}$) կոչվում են *լուսանման*: Պատճառահետևանքային կապերով կապված պատահարները կարող են բաժանված լինել նաև լուսանման ինտերվալով: Պարզ է, որ այդ դեպքում պատճառից հետևանք ինֆորմացիան հասցնողը լույսն է կամ մեկ այլ դաշտ:

Մեխանիկական ժամանակի ինվարիանտությունը: Ինտերվալի ինվարիանտությունից հետևում է *սեփական ժամանակի ինվարիանտությունը*: Այդ ցույց տալու համար դիտարկենք K' համակարգում անշարժ ($dl'=0$), մասնիկի հետ կատարված երկու անվերջ մոտ պատահարներ: Նման պատահարների միջև ինտերվալի համար K և K' -ում կունենանք.

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dl^2} \quad ds' = \sqrt{c^2 dt'^2 - dl'^2} = cd\tau_0 \quad (17.5)$$

որտեղ $dt' = d\tau_0$ սեփական ժամանակն է: Համաձայն ինտերվալի ինվարիանտության՝ $cd\tau_0 = \sqrt{c^2 dt^2 - dl^2}$, իսկ հաշվի առնելով, որ $dl/dt = v$ կունենանք.

$$d\tau_0 = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = imv \quad (17.6)$$

ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԿԱՆՈՆԸ

Նյութային մեխանիկայում Գալիլեյի ծնափոխությունների հիման վրա ստացվող արագությունների գումարման վեկտորական

$$v = v' + u \quad (18.1)$$

կանոնով կարելի է ստանալ լույսից մեծ արագություններ: Բնական է, որ արագությունների գումարման նման կանոնը չի կարող բավարարել հարաբերականության հատուկ տեսության պահանջներին, համաձայն որի լույսի արագությունը մատերիայի սահմանային արագությունն է և միևնույն է բոլոր հաշվարկի համակարգերում: Այս պայմաններին բավարարող արագությունների ծնափոխման կանոնը պետք է ստանալ, օգտվելով Լորենցի ծնափոխություններից:

Դիտարկենք K և K' ՀՀ-եր: Նրանցում պատահարի կոորդինատները կապված են Լորենցի ծնափոխություններով: Մասնիկի կամայական շարժման օրենք K' և K ՀՀ-երում արտահայտվում է հետևյալ առնչություններով՝

$$x' = x'(t'), y' = y'(t'), z' = z'(t'); \quad K' \text{-ում}, \quad (18.3)$$

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t); \quad K \text{-ում}: \quad (18.4)$$

Մասնիկի ակնթարթային արագությունը K' և K -ում որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$v' = (v'_x, v'_y, v'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right), \quad v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z}, \quad (18.5)$$

$$v = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}:$$

Դիֆերենցելով Լորենցի (15.14) ծնափոխությունները, հաշվի առնելով $u = \text{const}$, $c = \text{const}$ պայմանները՝

$$dx = \frac{dx' + udt'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + udx'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (18.6)$$

(18.5) ու (18.6)-ի օգնությամբ կստանանք K -ից K' անցման արագությունների ծնափոխության բանաձևերը վերջնական տեսքով.

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}, \quad v'_x = \frac{v'_x \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + uv'_x/c^2}, \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + uv'_x/c^2} \end{aligned} \right\} K \rightarrow K' \quad (18.7)$$

Համանման ձևով ստացվում են հակադարձ ձևափոխությունները՝

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}, \\ v'_z &= \frac{v_z \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} \end{aligned} \right\} K' \rightarrow K \quad (18.8)$$

Ինչպես Լորենցի ձեափոխությունները, ռելատիվիստական արագությունների գումարման (18.7), (18.8) առնչությունները դանդաղ շարժումների համար հանգում են (13.9) նյուտոնյան բանաձևերին: Ուշադրություն դարձրեք այն փաստին, որ (18.7) և (18.8) բանաձևերի կոտորակների հայտարարներում կանգնած է մասնիկի արագության միայն v_x բաղադրիչը, այսինքն՝ ՀՀ-երի հարաբերական շարժման ուղղությամբ մասնիկի արագության պրոյեկցիան: Նկատեց նաև, որ եթե մասնիկի շարժումը K' -ում չունի արագության լայնական բաղադրիչներ ($v'_y = v'_z = 0$), ապա այն չի ունենա արպիսից նաև K -ում ($v_y = v_z = 0$): Նման դեպքում բաց թողնելով արագությունների համար x ինդեքսը, կստանանք.

$$v = \frac{v' + u}{1 + uv'/c^2}, \quad v' = \frac{v - u}{1 - uv'/c^2} \quad (18.9)$$

Շեշտ է համոզվել, որ այս բանաձևերը արգելում են լույսից մեծ արագությամբ շարժումները: Եթե K -ի նկատմամբ $u = 0.9c$ արագությամբ շարժվող K' համակարգում մասնիկն ունի $v' = 0.8c$ արագություն, ապա արագությունների գումարման դասական կանոնը K -ում տալիս է լույսից մեծ արագություն $v = 1.7c$ (!): Այնինչ, համաձայն (18.9) կանոնի, մասնիկն ունի լույսից փոքր արագություն $v = 1.7c / 1.72 < c$. Եթե K' համակարգում տարածվող լույս է $v' = c$, ապա (18.9)-ից ստանում ենք $v = c$, որը համապատասխանում է լույսի արագության բացարձակությանը:

Լույսի արեդրացիա: Ենթադրենք մասնիկը շարժվում է K' -ի $X''Y''$ հարթության մեջ և նրա արագության վեկտորը X' առանցքի հետ կազմում է θ' անկյուն

$$v'_x = v' \cos \vartheta', \quad v'_y = v' \sin \vartheta', \quad v'_z = 0: \quad (18.10)$$

Այդ դեպքում մասնիկի շարժումը K -ում կընթանա XY հարթության մեջ, սակայն նրա արագության v վեկտորը X առանցքի հետ կկազմի այլ θ անկյուն.

$$v_x = v \cos \vartheta, \quad v_y = v \sin \vartheta, \quad v_z = 0: \quad (18.11)$$

Օգտվելով (18.7) բանաձևերից և հաշվի առնելով (18.10), (18.11) առնչությունները, ստանանք

$$v \cos \vartheta = \frac{v' \cos \vartheta' + u}{1 + v' u \cos \vartheta' / c^2}, \quad v \sin \vartheta = \frac{v' \sin \vartheta' \sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 + v' u \cos \vartheta' / c^2}:$$

Այստեղից կունենանք

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta' \sqrt{1 - u^2 / c^2}}{\cos \vartheta' + u / v'}: \quad (18.12)$$

$$v^2 = v'^2 \frac{1 + 2u \cos \vartheta' / v' - u^2 \sin^2 \vartheta' / c^2 + u^2 / v'^2}{(1 + u v' \cos \vartheta' / c^2)^2}: \quad (18.13)$$

Նկատենք, որ X առանցքի հետ մասնիկի արագության կազմած անկյունը K և K' համակարգերում տարբեր են: Ընդ որում այդ տարբերությունը չի վերանում համապատասխան դասական դեպքում, երբ (18.12) բանաձևում տեղադրում ենք $c = \infty$: Դա հասկանալի է, օրինակ, երկրի նկատմամբ ուղղաձիգ ընկնող անձրևի կաթիլները թեք են թվում շարժվող տրանսպորտից դիտողին: Հետաքրքիր է, որ անկյունների տարբերությունը K և K' համակարգերում մնում է նաև այն դեպքում, երբ դիտարկում ենք նրանցում լույսի նեղ փնջի տարածումը $v' = c$: Այդ դեպքում (18.13)-ից ստանում ենք $v = c$, ինչպես և պետք էր սպասել, իսկ (18.12)-ից

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta' \sqrt{1 - u^2 / c^2}}{\cos \vartheta' + u / c}: \quad (18.14)$$

Այս երևույթը, որն ստացել է *լույսի արեռացիա* անվանումը, հայտնաբերել է *Բրեդլին* 1727թ.: Դիտելով և ուսումնասիրելով աստղերի դիրքի տապեկան փոփոխությունները երկնակամարում, *Բրեդլին* հայտնաբերել է, որ, օրինակ, գեներում գտնվող Վիշապի γ աստղը դիտելու համար դիտակը պետք է ուղղել ոչ թե ուղղաձիգ վեր (այսինքն, դեպի գեներ), այլ թեքել ուղղաձիգից $\alpha = 20''.5$ անկյունով: Այս երևույթը *Բրեդլին* բացատրել է

Արեգակի շուրջը Երկրի ուղեծրային շարժմամբ և այդ անկյան համար ստացել հետևյալ բանաձևը

$$\operatorname{tg} \alpha = v_{\oplus} / c. \quad (18.15)$$

որը ճշգրիտ տալիս է դիտվող անկյունը, եթե հաշվի առնենք Երկրի ուղեծրային շարժման $v_{\oplus} = 30$ կմ/վ արագությունը:

Բրեդլիի (18.15) բանաձևն ստացվում է (18.14) առնչությունից, եթե դպես K' համակարգ ընտրենք արեգակենտրոն ՀԴՀ-ը, իսկ K -ն կապենք Երկրի հետ: Այս դեպքում $u = v_{\oplus}$, $\theta' = 90^\circ$, քանի որ աստղը գտնվում է Երկրի ուղեծրային արագության ուղղահայաց ուղղության վրա, իսկ $\alpha = 90^\circ$: ձ (α -ն լույսի ճառագայթի կազմած անկյունն է ուղղածիզի հետ): Արդյունքում ստանում ենք

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u}{c \sqrt{1 - u^2 / c^2}},$$

որը u/c մեծության գծային մոտավորությամբ համընկնում է (18.15)-ի հետ

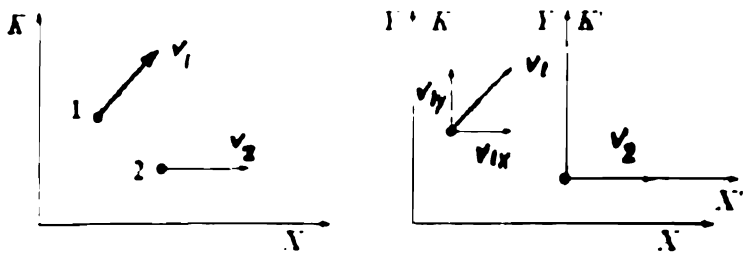
Հարաբերական արագությունը ռելատիվիստական մեխանիկայում: Դիցուք հաշվարկի K ինեդցիալ համակարգում ունենք v_1 և v_2 արագություններով շարժվող մասնիկներ (նկ. 3.11): Երկու մասնիկների հարաբերական արագությունը՝ մեկի արագությունն է՝ մյուսի հետ կապված հաշվարկի համակարգում: Ուրեմն, մասնիկների հարաբերական արագությունը որոշելու համար պետք է գտնել առաջին մասնիկի արագությունը երկրորդի հետ կապված հաշվարկի համակարգում:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու ուղղենք K ՀԴՀ-ի X առանցքը ուղղությամբ, իսկ երկրորդ մասնիկի հետ կապենք K' համակարգը (նկ. 3.11): Պարզության համար ենթադրենք, որ K -ում v_1 -ն ընկած է XY հարթության մեջ, $v_1(v_{1x}, v_{1y}, 0)$: Փաստորեն փնտրվող հարաբերական արագությունը $v_1'(v'_{1x}, v'_{1y}, 0)$ վեկտորն է, որի բաղադրիչները կստանանք, օգտվելով արագությունների ձևափոխման (18.8) կանոնից, ընդունելով $u = v_2$:

$$v'_{1x} = \frac{v_{1x} - v_2}{1 - v_{1x} v_2 / c^2}, \quad v'_{1y} = \frac{v_{1y} \sqrt{1 - v_2^2 / c^2}}{1 - v_{1x} v_2 / c^2}, \quad v'_{1z} = 0: \quad (18.17)$$

Հարաբերական այս արագության մոդուլի քառակուսու համար դժվար չէ ստանալ

$$v_1'^2 = \frac{(v_1 - v_2)^2 - [v_1 v_2]^2 / c^2}{[1 - (v_1 v_2) / c^2]^2}, \quad (18.18)$$



Նկ 3.11

որտեղ օգտվել ենք ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում սկալյար և վեկտորական արտահայտությունների բանաձևերից, հաշվի առնելով, որ $v_1 = v_2$, $v_{1x} = 0$, $v_{2x} = 0$:

Հիշենք, որ նյութոնյան մեխանիկայում հարաբերական արագությունը որոշվում է

$$v_1' = v_1 - v_2 \equiv \Delta v \quad (18.19)$$

բանաձևով, որն ստացվում է նաև (18.18) -ից, եթե նրանում տեղադրենք $c \rightarrow \infty$:

Հարաբերական արագության (18.18) բանաձևից մասնավորապես հետևում է, որ միմյանց հանդեպ մեծությամբ v արագությամբ շարժվող մասնիկները իրար են մոտենում ոչ թե $2v$, ինչպես ստացվում է (18.19) բանաձևի հիման վրա, այլ՝ $2v/(1 + v^2/c^2)$ արագությամբ:

ՆԱԴԻՐՆԵՐ

1. Յույց տվեք, որ զանգվածի ադիտիվությունը Քալիլեյի հարաբերականության սկզբունքի հետևանք է:

Ցուցում: Օգտվեք իմպուլսի պահպանման օրենքի Քալիլեյինվարիանտությունից:

2. Աստղագիտական դիտումները հանգեցրել են այսպես կոչված <աչի օրեջին տիեզերքում կամայական երկու զալակտիկաներ իրարից հեռանում են է Δ> արագությամբ, որը համեմատական է նրանց միջև Δ> հեռավորությանը՝ Δv=HΔ: որտեղ H=(5-10)10⁻¹¹ տարի⁻¹ կոչվում է <աչի հաստատուն>:

Ստացեք <աչի օրենքը> օգտվելով տարածության իզոտրոպությունից և Քալիլեյի ձևափոխություններից:

3. Լորենցի ձևափոխությունների օգնությամբ ապացուցեք ինտերվալի ինվարիանտությունը:

4. Ստացեք, մասնիկի արագացման բաղադրիչների ձևափոխության բանաձևերը օձադիստական մեխանիկայում:

5. Ստացեք Լորենցի ձևափոխությունները, երբ Հ-Հ-երի հարաբերական շարժման արագությունն ունի կամայական ուղղություն:

Պատասխան՝

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + u \left[\frac{t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{u\mathbf{r}'}{u^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1 \right) \right]; t = \frac{t' + u\mathbf{r}'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}:$$

6. Ստացեք լորենցյան կոնստման բանաձևը, օգտվելով նախորդ խնդրում ստացված Լորենցի ձևափոխություններից:

7. Օգտվելով 5 խնդրում ստացված ձևափոխություններից, ստացեք արագությունների ձևափոխության բանաձևերը:

ԳԼՈՒԽ IV

ՀԱՄԱԽՄԲԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ: ԻՄՊՈՒԼՍԻ ԵՎ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐԸ

§19. ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԵՐԻ ՀԱՄԱԽՈՒՄԲ: ԱԶԱՏՈՒԹՅԱՆ ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐ: ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐ

Տեսական և գործնական կարևորություն ներկայացնող շատ խրնդիր-ներում գործ ենք ունենում երկու և ավելի մարմիններից բաղկացած մեխա-նիկական համախմբի շարժման հետ: Նման համախմբի օրինակներ են ա-տոմը, մոլեկուլը, որոնք լիցքավորված մասնիկների համախմբեր են, Արե-գասնախն համակարգությունը, մեր աստղային համակարգը: Գալակտի-կան, որում կան մեծ թվով առանձին աստղային խմբեր՝ աստղակույտեր, կրկնակի աստղեր և այլն:

Մեխանիկական համախումբը մարմինների ցանկացած խումբ է, որի շարժումը ենթակա է ուսումնասիրության:

Համախմբում մասնիկները կարող են միմյանց հետ փոխազդել կամ չփոխազդել: Չփոխազդող մասնիկների համախմբի օրինակ է իդեալական գազը: Համախմբում մասնիկների փոխազդեցությունները կարող են կրել դաշտային կամ անմիջական բախման բնույթ:

1. *Ազատության աստիճաններ:* Համախմբի շարժումն ուսումնասիրե-լու համար նախ անհրաժեշտ է տալ նրա դիրքը տարածության մեջ

Այն *անկախ կոորդինատները, որոնք միարժեքորեն որոշում են հա-մախմբի դիրքը տարածության մեջ, կոչվում են ազատության աստիճան-ներ*

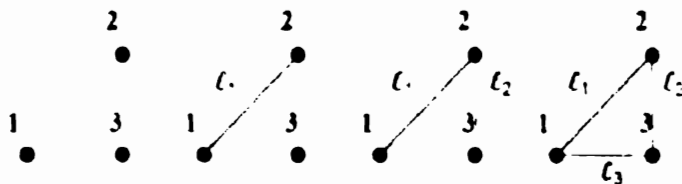
Նյութական կետն ունի եռեք ազատության աստիճան՝ դրանք մասնի-կի x, y, z : կոորդինատներն են: Եթե մասնիկի որոշ տեղափոխություններ ար-գելված են, ապա ասում են, որ նրա շարժման վրա դրված են *կապեր*: Օրի-նակ, եթե մասնիկը 1 երկարության ծողով կապված է Օ կետին, ապա նրա հնարավոր շարժումները կընթանան (շառավիղով գնդային մակերևույ-

թով, որի հավասարումը $(x^2 + y^2 + z^2 = r^2)$ մասնիկի կոորդինատներից մեկը կարտահայտի մյուս երկուսով. Ուրեմն, մեկ կապով մասնիկն ունի երկու ազատության աստիճան. Տրված կորով շարժվող մասնիկի դիրքը կորովի մեկ կոորդինատով (աղեղային կոորդինատը՝ բնական եղանակում, այսինքն օժտված կլինի մեկ ազատության աստիճանով:

Ասվածը առանց դժվարության կարելի է ընդհանրացնել կամայական n թվով մասնիկներից բաղկացած մեխանիկական համախմբի համար. Եթե այդ մասնիկների տեղաշարժերը որևէ կերպ արգելված չեն, ապա համախումբն օժտված կլինի $3n$ ազատության աստիճանով: *Յուրաքանչյուր կապ փոքրացնում է համախմբի ազատության աստիճանների թիվը մեկով:* Եթե համախմբի վրա դրված են s թվով կապեր, ապա նրա ազատության աստիճանների թիվը կլինի $f=3n-s$: Օրինակ, երեք մասնիկներից բաղկացած համախումբն ունի $3 \times 3=9$ ազատության աստիճան: Եթե f երկարության ծողով միացնենք այդ մասնիկներից որևէ երկուսը, ապա մասնիկների կոորդինատների միջև կհաստատենք լրացուցիչ կապ (նկ.4.1բ):

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_1^2, \quad (19.1)$$

որը կփոքրացնի ազատության աստիճանների թիվը մեկով: Եթե l_2 երկարության ծողով կապենք նաև երկրորդ և երրորդ մասնիկները (նկ.4.1գ):



Նկ.4.1

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_1^2, \quad (19.2)$$

ազատության աստիճանների թիվը կապակասի ևս մեկով. Վերջապես, կապելով $l_3 < l_1, l_2$ երկարության ծողով նաև առաջին և երրորդ մասնիկները (նկ.4.1դ):

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = l_3^2, \quad (19.3)$$

համախմբի ազատության աստիճանների թիվը կդարձնենք 6:

Բացառմապ պինդ մարմինը սահմանեցինք որպես նյութական կետերի համախումբ, որի շարժման ընթացքում մասնիկների միջև հեռավորու-

յունները մնում են անփոփոխ. Յույց տանք. որ բացարձակ պինդ մարմինն ծտված է 6 ազատության աստիճանով. Իրոք, պինդ մարմնի դիրքը տա-
րածության մեջ միարժեքորեն որոշված կլինի, եթե տրվեն մեկ ուղղի վրա
չգտնվող նրա որևէ երեք կետերի կոորդինատները. Այդ դեպքում մարմնի
քանկացած այլ կետի կոորդինատները կառելի է արտահայտել այդ կետե-
րի կոորդինատներով: Քանի որ այդ կետերը պատկանում են պինդ մարմ-
նին, ապա նրանց միջև հեռավորությունները չեն փոփոխվում: Ուրեմն, բա-
ցարձակ պինդ մարմնի ազատության աստիճանների քանակը 3 կապով 3
մասնիկներից բաղկացած համախմբի ազատության աստիճանների թիվն
է. այսինքն $3 \times 3 = 6$

Համախմբի ազատության աստիճանների թիվը միաժամանակ ցույց է տալիս նրա անկախ շարժումների քանակը: Իսկապես, շարժման օրենքը համախմբի ազատության աստիճան - կոորդինատների ժամանակային կախվածություններն արտահայտող առնչություններն են: Իսկ դրանցից յուրաքանչյուրը նկարագրում է մեկ անկախ շարժում:

Ուրեմն, մեխանիկական համախմբի շարժումն ուսումնասիրելու հա-
մար անհրաժեշտ է գրել նրա ազատության աստիճանների թվին հավա-
սար շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներ և լուծել դրանք. համապա-
տասխան սկզբնական պայմանների հաշվառմամբ: Շարժման սկզբնա-
կան պայմաններն ազատության աստիճանների և ըստ ժամանակի նրանց
առաջին կարգի ածանցյալների, այսինքն՝ կոորդինատների և արագու-
թյունների, արժեքներն են $t=0$ պահին: Եթե հայտնի են ժամանակի կամայա-
կան պահին համախմբի կոորդինատներն ու արագությունները, ապա ա-
տում են, որ հայտնի է համախմբի մեխանիկական վիճակը, քանի որ դրան-
ցով կառելի է որոշել համախմբի դիրքը ժամանակի հաջորդ պահին: Այն-
պես ու. շարժման սկզբնական պայմանները տալիս են համախմբի մեխա-
նիկական վիճակը ժամանակի սկզբնական պահին: Առանց մեխանիկա-
կան շարժման համախմբի մեխանիկական վիճակը փոփոխվել չի կարող:

2. Պաշպանվող մեծություններ: Շարժման հավասարումների միջո-
ցով համախմբի մեխանիկական վիճակի փոփոխության ուսումնասիրու-
թյունը բարդ մաթեմատիկական խնդիր է. որը միշտ չէ, որ հնարավոր է կա-
տարել անալիտիկ մեթոդներով: Իսկ այն դեպքերում, երբ անհայտ են հա-
մախմբում գործող ուժերի բնույթը, նրանց փոփոխման օրենքը, նման ու-
սումնասիրությունները դառնում են սկզբունքորեն անհնար: Բացի այդ,
որոշ համակարգերում (օրինակ, գազում) առանձին մասնիկների շարժ-
ման մանրագնին ուսումնասիրությունը պարզապես անիմաստ է, գործնա-

կանոններն անհնար.

Հարց է ծագում, գոյություն չունեն դինամիկ օրենքների հետևանք հանդիսացող ընդհանուր սկզբունքներ, որոնք հնարավորություն տալ շրջանցել նշված դժվարությունները և այլ կերպ մոտենալ համախմբելի շարժման ուսումնասիրությանը՝ Պարզվում է՝ կան. դրանք *պահպանման օրենքներն են*:

Ինչպես արդեն նշեցինք, համախմբի մեխանիկական շարժումը փոփոխում է նրա մեխանիկական վիճակը ժամանակի ընթացքում: Սակայն գոյություն ունեն մեխանիկական վիճակից (կոորդինատներից և արագություններից) կախված ֆիզիկական մեծություններ (այսպես կոչված, *վիճակ ֆունկցիաներ*), որոնք համախմբի մեխանիկական վիճակի փոփոխման ընթացքում մշտապես մնում են անփոփոխ, այսինքն պահպանվում են *Ղրանցից ֆիզիկայում առավել կարևոր են էներգիան, իմպուլսը և իմպուլսի մոմենտը*: Ֆիզիկայի հետագա դասընթացներում կծանոթանաք այ պահպանվող մեծությունների: Սակայն դրանք չունեն այն հիմնարար ուժը, որը խաղում են ֆիզիկայում էներգիան, իմպուլսը և իմպուլսի մոմենտը՝ վերջիններիս կարևորությունը բացատրվում է նրանով, որ նրանց կիրառելիության շրջանակները ընդգրկում են ֆիզիկայի և բնագիտության բոլոր բնագավառները: Ղրանք բնության համապարփակ օրենքներ են, որոնք դասվում են ժամանակակից ֆիզիկայի հիմքը կազմող փոքրաթիվ հիմնարար օրենքների շարքին:

Էներգիայի, իմպուլսի, իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքները կապված են ՀԻՀ-երում տարածության և ժամանակի համաչափությունների հետ: Օրինակ, պարզվում է, որ *էներգիայի պահպանման օրենքը կապված է ժամանակի համաստեփության, իմպուլսի պահպանման օրենքը՝ տարածության համաստեփության, իսկ իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքը՝ տարածության իզոտրոպության հետ*: Ասվածը պետք է հասկանալ այլ իմաստով, որ այդ պահպանման օրենքները կարելի է ստանալ Նյուտոնի 2-րդ օրենքից, հաշվի առնելով տարածության և ժամանակի նշված համաչափությունները: Այս հարցը առավել խորը կուսումնասիրեք տեսական մեխանիկայի դասընթացում:

3. Ուսումնասիրության պահպանման օրենքների մեթոդը:

Պահպանման օրենքները ֆիզիկական համակարգերի և երևույթների ուսումնասիրության հզոր միջոց են: Ղրանք օգնությամբ կարելի է ի հայտ բերել ֆիզիկական համակարգերի և երևույթների *առավել ընդհանուր հատկություններն ու օրինաչափությունները*: Պահպանման օրենքների մե-

թողի կարևորությունը պայմանավորված է նրա հետևյալ առավելություններով:

- այն անկախ է համախմբում մասնիկների շարժման հետագծից և գործող ուժերի կոնկրետ տեսքից, բնույթից: Այդ պատճառով այն կիրառելի է բոլոր համախմբերի համար: Եթե որևէ երևույթ հակասում է պահպանման օրենքներին, ապա անիմաստ է նման երևույթի իրականացման փորձ կատարել: Ֆիզիկայի զարգացման տարբեր շրջաններում մարդկությունը տարբեր տիպի հավերժական շարժիչներ կառուցելու ապարդյուն փորձեր է կատարել, որոնք հակասում են էներգիայի պահպանման օրենքին:

- համախմբում գործող ուժերի բնույթից պահպանման օրենքների անկախությունը թույլ է տալիս դրանք կիրառել նաև այն համախմբերի ուսումնասիրության խնդիրներում, որոնցում ընդհանրապես անհայտ են գործող ուժերը: Նման դեպքերում պահպանման օրենքների մեթոդը ուսումնասիրության միակ միջոցն է: Հիմնականում այդպիսին է վիճակը միջուկային և տարրական մասնիկների ֆիզիկայում:

- նույնիսկ այն դեպքերում, երբ համախմբում գործող ուժերը ճշգրիտ հայտնի են, պահպանման օրենքները կարող են էապես պարզեցնել խնդրի լուծումը, հաճախ հնարավորություն տալով շրջանցել բարդ մաթեմատիկական շատ գործողություններ: Այդ նպատակով որևէ նոր խնդիր լուծելիս, երբ արդեն գրված է շարժման հավասարումների համակարգը (այն սովորաբար ունենում է բավականաչափ բարդ մաթեմատիկական կառուցվածք), հարմար է նախ կիրառել պահպանման օրենքները: Այս ձևով կարելի է ստանալ լրացուցիչ առնչություններ, որոնց հաշվառումը կարող է էապես պարզեցնել հավասարումների համակարգը:

Նշենք հետևյալ կարևոր փաստը. *շարժման հավասարումները լուծելով ստանում ենք ուսումնասիրվող երևույթի սպառիչ պատկերը*: Այստեղ պահպանման օրենքները որևէ նոր բան ավելացնել չեն կարող, քանի որ շարժման հավասարումների լուծմամբ նրանք լիովին հաշվի են առնվում: Բոլորովին այլ է վիճակը, երբ խնդիրը լուծված է պահպանման օրենքների մեթոդով: Նման լուծումը արտահայտում է ուսումնասիրվող երևույթի առավել ընդհանուր օրինաչափությունները: Իսկ երևույթի մասին մանրամասներ ներկայացնող մի շարք հարցեր մնում են անորոշ: Դրանց պատասխանը կարելի է ստանալ միայն շարժման հավասարումները լուծելով: Դրանում կոամոդվեք երկու մարմինների բախման տարբեր ձևերը պահպանման օրենքների մեթոդով դիտարկելիս (տես գլուխ VI):

1. *Համախմբի իմպուլսը* համախմբի մեխանիկական վիճակը բնութագրող կարևորագույն մեծություններից է. որը պահպանվող մեծություն է:

Նյութական կետի իմպուլսը սահմանել ենք որպես նրա զանգվածի և արագության արտադրյալ.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (20.1)$$

Մեծ արագություններով շարժվող մասնիկի համար անհրաժեշտ է հաշվի առնել արագությունից զանգվածի կախվածությունը

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (20.2)$$

Պիտարկենք n մասնիկներից բաղկացած նյութոնյան համախմբ, որի $m_1, m_2, \dots, m_n$ զանգվածներով մասնիկներն ընտրված ՀՀ-ում ունեն $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ արագություններ. այսինքն օժտված են

$$\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1, \mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{p}_n = m_n \mathbf{v}_n$$

իմպուլսներով

Նյութոնյան համախմբի լրիվ իմպուլսը - համախմբը կազմող մասնիկների իմպուլսների վեկտորական գումարն է

$$\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{p}_i \quad (20.3)$$

Փոխազդող մասնիկներից բաղկացած ռելատիվիստական համախմբի լրիվ իմպուլսն իր մեջ ներառում է ոչ միայն մասնիկների ռելատիվիստական իմպուլսների գումարը, այլև մասնիկների փոխազդեցություններն իրականացնող դաշտերի $\mathbf{P}_f$ իմպուլսը.

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + \mathbf{P}_f :$$

Եթե համախմբում մասնիկները չեն փոխազդում. կամ նրանց փոխազդեցություններն իրականացվում են բախումների միջոցով. ապա $\mathbf{P}_f = 0$, և համախմբի ռելատիվիստական իմպուլսը կլինի

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} \quad (20.3')$$

Իմպուլսի ներմուծմամբ Նյուտոնի 2-րդ օրենքը ներկայացվում է հետևյալ կերպ.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad (20.4)$$

2. Համախմբի իմպուլսի փոփոխման հավասարումը:

Պիտարկենք մեխանիկական համակարգում որևէ i -րդ մասնիկի իմպուլսի փոփոխությունը Համաձայն (20.4) օրենքի

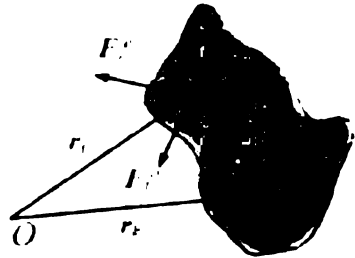
$$\frac{dp}{dt} = F, \quad (20.5)$$

որտեղ F_i -ն այդ մասնիկի վրա ազդող ուժերի համագործը:

Համակարգում մասնիկի վրա ազդող ուժերը կարելի է բաժանել երկու դասի՝ ներքին և արտաքին (նկ.4.2). Ներքին են կոչվում այն ուժերը, որոնք պայմանավորված են համախմբը կազմող մասնիկների միմյանց հետ յուրաքանչյուրի հետ: Արտաքին ուժերը բնութագրում են համախմբին լրացուցիչ մարմինների ազդեցությունները համախմբի մասնիկների վրա:

Համախմբը, որի վրա չեն ազդում արտաքին ուժեր, կոչվում է փակ:

Եթե համախմբը փակ չէ, ապա նրա կազմող i -րդ մասնիկի վրա ազդող ուժը ներկայացնում է ներքին F_i'' և արտաքին F_i' ուժերի համագործը



Նկ. 4.2

$$F_i = F_i'' + F_i' : \quad (20.6)$$

Բնական է՝ i -րդ մասնիկի վրա ազդող F_i'' ուժը համախմբի բոլոր մասնիկների կողմից ազդող ներքին ուժերի գումարն է

$$F_i'' = F_{i1} + F_{i2} + \dots + F_{in} = \sum_{k=1}^n F_{ik}, \quad (k \neq i), \quad (20.7)$$

որտեղ հատուկ նշված է $k \neq i$ պայմանը, քանի որ մասնիկը ինքն իր հետ չի փոխազդում: Հաշվի առնելով (20.6), (20.7) -ը, i -րդ մասնիկի իմպուլսի փոփոխության ժամանակային թափի համար (20.5)-ից կունենանք

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{ik} + F_i', \quad (k \neq i), \quad (20.8)$$

Հաջորդաբար տալով $i = 1, 2, \dots, n$ արժեքներ, կստանանք համախմբի մասնիկների համար համապատասխան հավասարումները

$$\frac{dp_i}{dt} = F_{i2} + F_{i3} + \dots + F_{in} + F_i';$$

$$\frac{dp_2}{dt} = F_2 + F_{21} + \dots + F_{2n} + F_2' ;$$

(20.9)

$$\frac{dp_n}{dt} = F_n + F_{n1} + \dots + F_{nn-1} + F_n' ;$$

Ուրեմն համախմբի յուրաքանչյուր մասնիկի իմպուլսը փոփոխվում է ինչպես ներքին, այնպես էլ արտաքին ուժերի ազդեցությամբ:

Ի՞նչ օրենքով է փոփոխվում համախմբի լրիվ իմպուլսը.

Այդ պարագեւու համար որոշենք համախմբի լրիվ (20.3) իմպուլսի ածանցյալն ըստ ժամանակի.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} + \dots + \frac{dp_n}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dp_i}{dt} . \quad (20.10)$$

որը, ինչպես տեսնում ենք, համախմբումբը կազմող մասնիկների իմպուլսների ժամանակային ածանցյալների գումարն է: Առանձին մասնիկների համար ստացել ենք (20.8) կամ (20.9) առնչությունները, որոնց հաշվառմամբ (20.10)-ից կստանանք

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{dp_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ij} + \sum_{i=1}^n F_i' = \\ &= (F_{12} + F_{21}) + (F_{13} + F_{31}) + F_1' + F_2' + \dots + F_n' : \end{aligned} \quad (20.11)$$

Այստեղ առաջին տողի աջ մասի կրկնակի գումարը կոչվում է համախմբի *ներքին ուժերի գլխավոր վեկտոր*, որը համախմբումբը կազմող մասնիկների վրա ազդող բոլոր ներքին ուժերի վեկտորական գումարն է: Բացված տեսքով այն ներկայացված է երկրորդ տողում, որտեղ փակագծերով առանձնացված են մասնիկների զույգ առ զույգ փոխազդեցության ուժերի գումարները: Համաձայն Նյուտոնի 3-րդ օրենքի, մասնիկների ցանկացած զույգ փոխազդեցության համար $F_{ij} + F_{ji} = 0$: Հետևաբար, ներքին ուժերի գլխավոր վեկտորը նույնաբար զրո է.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ij} = 0 . \quad (20.12)$$

Ներքին ուժերի ազդեցությունները համախմբի վրա համակշռված են Ի՞նչպես, ազդող և հակազդող զույգ ուժերը կիրառված են նույն համախմբի վրա, հավասար են մեծությամբ և ուղղված հակառակ՝ միևնույն ուղղի երկայնքով

Հաշվի առնելով (20.12) -ը, (20.11) -ն ընդունում է հետևյալ տեսքը

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i' \equiv F' \quad (20.13)$$

Ստացված հավասարումը *Նյուտոնի 2-րդ օրենքի ընդհանրացումն է յեղանակական համախմբի համար*: Այն ցույց է տալիս, որ համախմբի լրիվ իմպուլսը կարող է փոփոխվել միայն արտաքին ուժերի ազդեցությամբ: Ներքին ուժերը թեև կարող են փոփոխել համախմբի առանձին մասերի իմպուլսները, սակայն լրիվ իմպուլսը փոփոխել չեն կարող: Սա ներքին ուժերի գլխավոր վեկտորի զրո լինելու անմիջական հետևանքն է:

3. Ուժի իմպուլս: Նկատենք, որ t_0 -ից t ընկած ժամանակում արտաքին ուժերի համագործի ազդեցությամբ համախմբումը ձեռք է բերում լրիվ իմպուլսի աճ:

$$P(t) - P_0 = \int_{t_0}^t F(t) dt :$$

Այս առնչության աջ մասի ինտեգրալը կոչվում է t_0 -ից t ընթացքում համախմբի վրա ազդող *ուժի իմպուլս*: Պիտարկվող ժամանակում համախմբի լրիվ իմպուլսի աճը հավասար է արտաքին ազդող ուժի իմպուլսին: Ուրեմն, *ուժի ազդեցությունը որոշվում է ոչ միայն նրա մեծությամբ, այլև ազդման տևողությամբ*:

Բավականաչափ թույլ ուժի երկարատև ազդեցությունը կարող է համախմբի իմպուլսը փոփոխել ավելի մեծ չափով, քան մեծ ուժի կարճատև ազդեցությունը:

Մասնավորապես, սրանով կարելի է բացատրել նկ 4.3-ում պատկերված առաջագույն փորձը, երբ ներքին թելից արագ ձգելիս կտրվում է նախ թելը, իսկ դանդաղ ձգելիս՝ վերևի թելը: Այստեղ մեզ հետաքրքրող համախմբը, որի իմպուլսի փոփոխությունը անտեղք ջնադուրենք,  ձևովինն է Հավասարակշռության վիճակում թելերի նշան ուժերի տարբերությունը համակշռված է կշռաքարի ձևով: $T_1 - T_2 = mg$, որտեղից հետևում է՝ $T_1 > T_2$: Նշանակենք T_1 ձգման այն առավելագույն ուժը, որը նշանակում է թելը $\Delta\ell$ -ով դեռևս չկտրվելով: Ներքին թելի վրա ձգման ուժը դանդաղ մեծացնելիս նրա որոշակի $T_2 < T_1$ մոտեցի դեպքում T_1 -ը գերազանցում է T_2 -ն և վերևի թելը կտրվում է: Նկատենք, որ այս ընթացքում T_2 ուժը երկար ձևանակ ազդելով, կշռաքարին հարողորդում է իմպուլս, որի չափով կշռաքարը այդ ժամանակում կատարում է $\Delta\ell$ -ից մեծ տեղափոխություն:



Նկ 4.3

Ակնհայտ է, որ ներքևի թելը կտրվելու համար անհրաժեշտ է $T_2 > T_1$, ուստի այնպիսի կարճատև ծգում, որի ընթացքում կշռաքարի ստացած իմպուլսը չհասնի նրան տեղափոխել ΔP_0 չափով Γ -ա միշտ հնարավոր է:

Նման փորձերի կարելի է հանդիպել կրկեսային շատ համարներում, երբ փխրուն առարկաների վրա դրված ամուր ծողերը կտրվում են ակնթարթային հարվածից:

§21. ԻՆԵՐՑԻԱՅԻ ԿԵՆՏՐՈՆ ՆՐԱ ՇԱՐՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ: ՀԱՇՎԱՐԿԻ C ՀԱՄԱԿԱՐԳ

Նյութոտնյան համախմբի ամբողջական շարժման ուսումնասիրությանը կարելի է հանգեցնել նյութական կետի շարժման ուսումնասիրությանը Γ -ա կատարվում է համախմբի իներցիայի, կամ զանգվածի կենտրոն հասցության ներմուծմամբ:

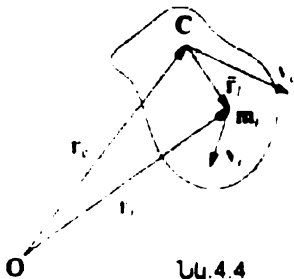
1. Իներցիայի կամ զանգվածի կենտրոն: Դիցուք $m_1, m_2, \dots, m_n$ զանգվածներով մասնիկները զբաղեցնում են $r_1, r_2, \dots, r_n$ շառավիղ-վեկտորներով բնութագրվող դիրքերը (նկ.4.4): Համախմբի իներցիայի կամ զանգվածի կենտրոնը սահմանվում է հետևյալ շառավիղ-վեկտորով

$$r_c = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} \quad (21.1)$$

Ածանցելով այս արտահայտության աջ և ձախ մասերն ըստ ժամանակի, հաշվի առնելով արագության սահմանումը և այն փաստը, որ նյութոտնյան մեխանիկայում զանգվածը շարժման վիճակից անկախ մեծություն է, կունենանք.

$$v_c = \frac{dr}{dt} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i} = \frac{P}{m} \quad (21.2)$$

Սա իներցիայի կենտրոնի արագությունն է, որը համախմբի լրիվ իմպուլսի ուրաբերությունն է նրա լրիվ զանգվածին նկատմամբ, որ իներցիայի կենտրոնի ներմուծմամբ համախմբի լրիվ իմպուլսը ներկայացվում է նյութական կետի իմպուլսի բաճառով:



$$P = \sum m v_i = mv, \quad (21.3)$$

նյութական կետ, որն օժտված է համախմբի լրիվ զանգվածով և ունի նրա ինեռցիայի կենտրոնի արագությունը: Տեղադրելով (21.13) արտահայտությունը համախմբի լրիվ իմպուլսի փոփոխման (20.13) օրենքում, կստանանք

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F' \equiv F', \quad (21.4)$$

որը նյութական կետի շարժման հավասարումն է: Ուրեմն, *ինեռցիայի կենտրոնը ներմուծմամբ համախմբի ամբողջական շարժման խնդիրը հանգեցվում է նրա ինեռցիայի կենտրոնում տեղավորված, համախմբի լրիվ զանգվածն ունեցող մասնիկի շարժման ուսումնասիրությանը*: Ընդ որում, համախմբի տարբեր կետերում ազդող ուժերը այդ դեպքում ենթադրվում են կիրառված ինեռցիայի կենտրոնում: Այս արդյունքը կազմում է համախմբի *ինեռցիայի կենտրոնի շարժման թեորեմի* բովանդակությունը:

Եական է, որ ինեռցիայի կենտրոնի շարժման վրա ներքին ուժերը չեն ազդող ազդել: Եթե հորիզոնի նկատմամբ անկյան տակ նետված արկը պարաբոլական հետագծի ինչ-որ կետում ներքին ուժերի ազդեցությամբ պայթի, ապա նրա բեկորները կթռչեն տարբեր ուղղություններով, սակայն նրանց ինեռցիայի կենտրոնը կշարունակի շարժվել նույն պարաբոլական հետագծով:

Համասեռ ծանրության ուժի դաշտում համախմբի զանգվածի կենտրոնը համընկնում է նրա ծանրության կենտրոնի հետ: Ծանրության կենտրոնը համախմբումբը կազմող մասնիկների զուգահեռ ծանրության ուժերի համագործի կիրառման կետն է:

Եթե համախմբը փակ է, ապա $\frac{dC}{dt} = const$:

2. Ինեռցիայի կենտրոնի հաշվարկի C համակարգը: Համախմբի ինեռցիայի կենտրոնի հետ կապված հաշվարկի համակարգը կոչվում է *ինեռցիայի կենտրոնի կամ C համակարգ*: Եթե համախմբումբը փակ է, ապա նրա C համակարգը կլինի ինեռցիալ: C համակարգից հարմար է օգտվել այն դեպքում, երբ ուսումնասիրվում են համախմբում մասնիկների միմյանց նկատմամբ շարժումները:

Պայմանավորվենք C համակարգում համապատասխան մեծությունները նշել տրիդա (-) նշանով: Այդ դեպքում փորձասենյակի հետ կապված ՀԻՀ-ում (որը կանվանենք լաբորատոր, կամ A համակարգ) մեծությունները C համակարգում համապատասխան մեծությունների հետ կապված

կլիներ հետևյալ կերպ

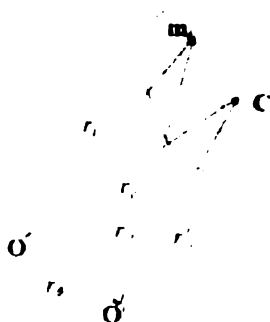
$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i + \bar{\mathbf{r}}_i; \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i + \bar{\mathbf{v}}_i; \quad (21.5)$$

Օգտվելով այս առնչություններից, հեշտ է ցույց տալ, որ

$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum m_i \bar{\mathbf{r}}_i = 0; \quad (21.6)$$

$$m\bar{\mathbf{v}} = \sum m_i \bar{\mathbf{v}}_i = 0;$$

Սրանք *հաշվարկի C համակարգի հիմնական հատկություններն են* որոնցից առաջինը արձանագրում է այն փաստը, որ նրանում *հաշվարկի սկզբնակետը C կետն է*, իսկ երկրորդը այն, որ նրա նկատմամբ *համախմբի լրիվ իմպուլսը զրո է*։



Նկ 4.5

Որոշենք համախմբի իներցիայի կենտրոնի դիրքը տարբեր ՀԻՀ-երի Օ՝ և Օ սկզբնակետերի նկատմամբ (նկ. 4.5)։ Եթե տարբեր ՀԻՀ-երում համախմբի իներցիայի կենտրոնը նրա միևնույն կետն է, ապա

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i'; \quad \mathbf{r}_i' = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i'}{\sum m_i};$$

Այն հեշտությամբ ստացվում է Օ կետի նկատմամբ համախմբի իներցիայի կենտրոնի (21.1) բանաձևում տեղադրելով $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \bar{\mathbf{r}}$ կապը (նկ. 4.5)։

Ռելատիվիստական մեխանիկայում իներցիայի կենտրոնի հասկացությունը իմաստագրվում է՝ Կարտիի է. իհարկե, (21.1)–ին համանման ձևով ներմուծել չափավոր-վեկտոր, և նրանով որոշվող կետն անվանել իներցիայի կենտրոն։ Սակայն ռելատիվիստական դեպքում այդ կետի դիրքը կախված է համախմբում մասնիկների արագությունների բաշխումից և տարբեր է տարբեր ՀԻՀ-երում։ Այսինքն այն *Լորենց-ինվարիանտ հասկացություն չէ*։

Փոխազդող մասնիկներից բաղկացած ռելատիվիստական համախմբի համար ընդհանուր դեպքում սխալ են իներցիայի կենտրոնի վերջնական հատկությունները։ Վերջիններս ճիշտ են միայն չփոխազդող կամ կոնտակտային փոխազդող մասնիկների ռելատիվիստական համախմբի համար (տես խնդիրը)։ Չնայած դրան, ռելատիվիստական մեխանիկայում լայնորեն օգտվում են *հաշվարկի C համակարգից*, որում համախմբի լրի

ռելատիվիստական իմպուլսը հավասար է զրոյի

$$\sum \vec{p} + \vec{P}_i = 0.$$

որտեղ $\vec{P}_i$ -ը մասնիկների փոխազդեցության դաշտերի լիով իմպուլսն է: Նման հաշվարկի համակարգ միշտ կարելի է գտնել: Ընդ որում այս պայմանից որոշվում է ոչ թե C համակարգի դիրքը, այլ նրա v_c արագությունը:

Կոնտակտային փոխազդող ռելատիվիստական համախմբի համար ճիշտ են դասական (21.2), (21.3) բանաձևերը

Ապացուցենք այս պնդումը երկու մասնիկներից կազմված համախմբի համար: Ածանցենք (21.1) -ը ըստ ժամանակի, ընդունելով $n = 2$.

$$v_i = \frac{m_1(v_1)v_1 + m_2(v_2)v_2}{m_1(v_1) + m_2(v_2)} + \frac{m_1(v_1)m_2(v_2) - \vec{m}_1(v_1)\vec{m}_2(v_2)}{[m_1(v_1) + m_2(v_2)]^2} (r_2 - r_1):$$

Ստացված արտահայտության աջ մասի երկրորդ գումարելին դիտարկող դեպքում նույնաբար զրո է: Իրոք, բախումների միջև ընկած ժամանակում $v = \text{const}$ և հետևաբար, $\vec{m}_i(v) = 0$: Բախումների ժամանակ $m_i(v) \neq 0$, բայց $r_2 - r_1 = 0$, քանի որ նյութական կետերը բախման պահին զբաղվում են տարածության միևնույն դիրքով: Ուրեմն, այս դեպքում ճիշտ կլինի նաև $\vec{P} = v \cdot \sum m(v)$ բանաձևը:

§22. ԻՄՊՈՒԼՍԻ ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔԸ

1. *Կայտնիության մեխանիկայում* համախմբի իմպուլսի պահպանման պայմանները պարզորոշ հետևում են նրա ժամանակային փոփոխությունն արտահայտող

$$d\vec{P} / dt = \vec{F}^* \quad (22.1)$$

հավասարումից: Ակնհայտ է, *եթե համախմբի վրա ազդող արտաքին ուժերի համագործը զրո է, ապա անկախ նրանում գործող ներքին ուժերի բնույթից համախմբի լիով իմպուլսն անփոփոխ կմնա ժամանակի ընթացքում արժեքն կպահպանվի*

$$\text{եթե } \vec{F} = \sum \vec{F}^* = 0, \text{ ապա } \vec{P} = \sum m_i v = \sum \vec{p}_i = \text{const}: \quad (22.2)$$

Իմպուլսի պահպանման համար ստացված (22.2) պայմանը կարող է լրականնալ երկու դեպքում, երբ արտաքին ուժեր չեն ազդում, այսինքն երբ համախմբը փակ է, և երբ համախմբի վրա ազդում են համակշռված

արտաքին ուժեր:

Չնայած փակ համախմբի լրիվ իմպուլսը պահպանվում է, սակայն նրա առանձին մասնիկների իմպուլսները ներքին ուժերի ազդեցությանը կարող են կրել անընդհատ փոփոխություններ: Ղա երևում է առանձին մասնիկի իմպուլսի փոփոխման (20.8) հավասարումից: Սակայն, իհարկե այս փոփոխությունները կատարվում են այնպես, որ համախմբի լրիվ իմպուլսը մնում է անփոփոխ: Ուրեմն, *Ներքին ուժերը համախմբում կարող են միայն առաջացնել իմպուլսի վերաբաշխում* եթե փակ համախմբի ինչ-որ մասում իմպուլսը աճել է, ապա դա կատարվել է համախմբի մյուս մասերի իմպուլսի նվազման հաշվին: Այս հմաստով (22.1) *հավասարումը պետք է դիտել որպես իմպուլսի պահպանման օրենքի առավել ընդհանուր ձևակերպում. որում ներկայացված է նաև համախմբի իմպուլսի փոփոխման պատճառը:*

Եթե փակ համախմբի լրիվ իմպուլսը պահպանվում է ցանկացած առանցքի երկայնքով, ապա *ոչ փակ համախմբի իմպուլսը կարող է պահպանվել որոշ ուղղություններով և փոփոխվել այլ ուղղություններով*։ Իսկապես, լրիվ իմպուլսի փոփոխությունն արտահայտող (22.1) վեկտորական հավասարումը համարժեք է երեք սկալար հավասարումների.

$$p_x = \sum m_i v_{ix} = F_x, \quad p_y = \sum m_i v_{iy} = F_y, \quad p_z = \sum m_i v_{iz} = F_z: \quad (22.2)$$

Այստեղից հետևում է, որ որևէ առանցքի երկայնքով արտաքին ուժերի համակշռման կամ բացակայության դեպքում համապատասխան առանցքով համախմբի լրիվ իմպուլսը կպահպանվի: Օրինակ, երկր ծանրության ուժի դաշտում լրիվ իմպուլսի հորիզոնական բաղադրիչները կպահպանվեն, իսկ ուղղաձիգ բաղադրիչը չի պահպանվի:

Հեշտ է ցույց տալ, որ եթե իմպուլսը պահպանվում է $K \ll c$ -ում, ապա այն կպահպանվի նաև ցանկացած այլ $K' \ll c$ -ում: Ղրա համար ստանանք իմպուլսի $K \rightarrow K'$ անցման բանաձևը: Գրենք K -ում և K' -ում լրիվ իմպուլսի արտահայտությունները.

$$P = \sum m_i v_i, \quad P' = \sum m_i v_i': \quad (22.4)$$

Օգտվելով Գալիլեյի

$$v = u + v' \quad (22.5)$$

ձևափոխություններից, կստանանք (22.4) իմպուլսների կապը՝

$$P = u \sum m_i + P': \quad (22.6)$$

Քանի որ ՀԻՀ-երը միմյանց նկատմամբ շարժվում են $u = const$ արագությամբ, ապա $P \rightarrow const$ պայմանից կրիսի՝ $P = const$:

Իմպուլսի պահպանման օրենքն ստացանք Նյուտոնի օրենքների օգնությամբ: Արդյո՞ք ճիշտ է իմպուլսի պահպանման օրենքը այն համախմբների համար, որոնք չեն ենթարկվում Նյուտոնյան մեխանիկայի օրենքներին, ինչպիսիք են, օրինակ, ռելատիվիստական, կամ ճառագայթման դաշտ պարունակող համախմբերը: Այս հարցի պատասխանը տալիս է յոթորդ, որը ցույց է տալիս իմպուլսի պահպանման օրենքի համընդհանուր ճնշումը: Իհարկե, այդ դեպքում, բացի մասնիկների իմպուլսներից, անհրաժեշտ է հաշվի առնել նաև նրանց փոխազդեցության դաշտերի իմպուլսը:

Համախմբի իմպուլսի պահպանման օրենքը փորձնական փաստերի ընդհանրացման արդյունք հանդիսացող բնության հիմնարար օրենք է, որը դեռևս չգիտի որևէ բացառություն: Այն փաստը, որ իմպուլսի պահպանման օրենքը մեխանիկայում ստացվում է Նյուտոնի օրենքներից, բնական է, քանի որ մատերիայի շարժման ցանկացած համապարփակ օբյեկտիվ օրենք պարունակվում է շարժման յուրաքանչյուր կոնկրետ ձևի հիմնական ռադասարոմներում:

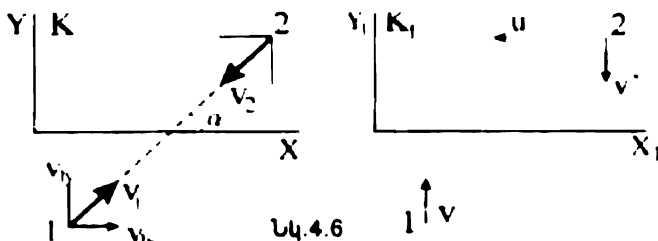
2. Ռելատիվիստական մեխանիկայում՝ զանգվածի և իմպուլսի (10.4) կապվածության օրենքները կարելի է ստանալ այն պայմանից, որ իմպուլսի պահպանման օրենքը իրականանա ցանկացած ՀԻՀ-ում:

Սա ցույց տալու համար քննարկենք երկու միևնույն m զանգվածներով մասնիկների բացարձակ ոչ առաձգական բախումը, որի հետևանքով առաջանում է նոր մասնիկ՝ ենթադրենք K ՀԻՀ-ում այդ մասնիկները շարժվում են իրար հանդեպ մեծությամբ հավասար v արագություններով, որոնք X առանցքի հետ կազմում են α անկյուն (նկ.4.6): Ակնհայտ է, որ այս համակարգում իմպուլսի պահպանման օրենքն իրականանում է, քանի որ բախումից առաջ զուգար-իմպուլսը զրո է, իսկ բախումից առաջացած մասնիկը գտնվում է դադարի վիճակում:

Այժմ պարզենք այս նույն երևույթի պատկերը մեկ այլ ՀԻՀ-ում. Շնորհիվ K_1 և K_2 ՀԻՀ-երը, որոնք K -ի նկատմամբ շարժվում են բախումից առաջ մասնիկների v_1 և v_2 արագություններով: Պարզ է, որ 1 մասնիկը K_1 -ում, իսկ 2 մասնիկը K_2 -ում շարժվում են միայն Y առանցքով մեծությամբ հավասար արագություններով, որը սնշանակենք:

Քննարկենք մասնիկների բախումը K -ում, որտեղ 1 մասնիկն ունի v արագություն (նկ. 4.6): Որոշենք 2 մասնիկի արագության Y բաղադրիչը, որը կնշանակենք v_y : Այս մասնիկը, ինչպես ասացինք, շարժվում է v արագությամբ K_2 -ի Y առանցքով և K_2 -ի հետ միախմբում արագությամբ տեղափոխվում է K_1 -ի նկատմամբ Հետևաբար երկու մասնիկների հարաբերական շարժման արագության Y բաղադրիչի համար (18.17) բանաձևի համաձայն (հաշվի առնելով, որ $v_{x1} = 0$) կառուցանք

$$v' = v\sqrt{1-u^2/c^2} \quad (22.6)$$



Ուրեմն K_1 ՀՀ-ում մասնիկների իմպուլսների Y բաղադրիչները տարբերվում են մեծությամբ. եթե մասնիկների զանգվածները համարենք անկախ նրանց շարժման վիճակից. $m v' < m v$. Հետևաբար բախումից առաջ K_1 -ում մասնիկների լրիվ իմպուլսը Y առանցքով տարբեր կլինի զրոյից, այն դեպքում, երբ բախումից հետո այդ ուղղությամբ իմպուլսը կլինի զրո (առաջացած նոր մասնիկը կշարժվի λ առանցքով): Այստեղից հետևում է, որ K_1 -ի Y առանցքով իմպուլսի պահպանման համար անհրաժեշտ է մասնիկի զանգվածը համարել կախված իր արագությունից այնպես, որ

$$m_1 v' = m_2 v. \quad (22.8)$$

որտեղից, (22.7)-ի հաշվածամամբ կունենանք

$$m_2 = \frac{m_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad (22.9)$$

Եթե դիտարկվող օբիեկտում կատարենք ասիմանային անցում $u \rightarrow 0$ / $v \rightarrow 0$, ապա m_1 -ը K_1 -ում կներկայացնի դադարի վիճակում գտնվող մասնիկի զանգվածը, որը համընկնում է նրա նյութական զանգվածի հետ և կոչվում է **դադարի կամ հանգստի զանգված** $m_1 = m$: Այդ դեպքում (22.9) բանաձևում $m_2 = m/\omega$ -ն կընդունի հետևյալ տեսքը

$$m(u) = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad (22.10)$$

որտեղ m/ω -ն մասնիկի զանգվածն է, որը դադարի վիճակում ունի m զանգված

Հանգստի զանգվածը ինվարիանտ մեծություն է. այսինքն միևնույնն է բոլոր ՀՀ-երում: Այդ պատճառով մասնիկի բնութագիր է հանդիսանում հենց նրա հանգստի՝ նյութական զանգվածը:

Զանգվածի ընդհանրացմամբ ստացվող մասնիկների լրիվ

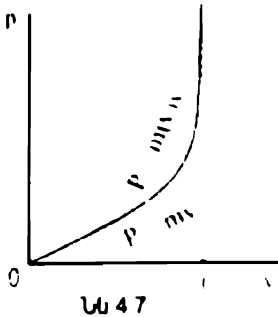
$$P = \sum \frac{m_i v_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} \quad (22.11)$$

ռելատիվիստական իմպուլսը կոնտակտային փոխազդեցություններում

պահպանվող մեծություն է

Նկ. 4.7 -ում պատկերված է նյութոսյան և ռելատիվիստական իմպուլսների արագությունից կախվածությունը: Նկատենք, որ նրանց միջև տարբերությունը ձևական է լույսին մոտ արագությունների տիրույթում:

Թեև ռելատիվիստական զանգված և իմպուլս մեծությունները սահմանեցինք այնպես, որ դիտարկվող կոնկրետ օրինակում իմպուլսը պահպանվի, բոլոր փորձնական փաստերը ցույց են տալիս, որ այդ կերպ սահմանված իմպուլսը պահպանվող մեծություն է մասնիկների կամայական կոնտակտային փոխազդեցության դեպքում: Ընդ որում փակ համախմբի լրիվ ռելատիվիստական իմպուլսը, որը ներառում է նաև մասնիկների փոխազդեցության դաշտերի իմպուլսը, համախմբում ընթացող ցանկացած պրոցեսում պահպանվում է:



§23. ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ, ԶՅՈՐՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Աշխատանք** Մարմինների վրա ուժի ազդեցությունները բազմազան են: Միևնույն ուժը կարող է առաջացնել մարմնի պտույտ, տեղափոխություն, դեֆորմացիա և այլն: Մարմինների վրա ուժի տարբեր ազդեցությունները քանակապես բնութագրելու համար ներմուծում են նոր ֆիզիկական մեծություններ: Օրինակ, ուժի պտտող ազդեցությունը բնութագրելու համար ներմուծվում է *ուժի մոմենտ* վեկտորը (տես §34), մարմինների մակերևույթների վրա ուժի ազդեցությունը բնութագրվում է *ճնշում* ֆիզիկական մեծությամբ և այլն:

Ուժի ազդեցությամբ մարմինները կարող են կատարել տեղափոխություն: *Մարմինների տեղափոխության վրա ուժի ազդեցությունը բնութագրվում է մեխանիկական աշխատանք սկալար ֆիզիկական մեծությամբ*: Դիցուք մասնիկը F համազոր ուժի ազդեցությամբ տեղափոխվում է 1-2 հետագծով (Նկ. 4.8): Ընդհանուր դեպքում F ուժը հետագծի տարբեր կետերում կարող է լինել տարբեր ինչպես մեծությամբ, այնպես էլ ուղղությամբ: Դիտարկենք մասնիկի տարրական տեղափոխություն, որի ընթաց

քում ազդող ուժը հնարավոր լինի համարել հաստատուն: *F* ուժի մեխանիկական աշխատանքը *dr* տարրական տեղափոխության վրա սահմանվում է որպես այդ մեծությունների սկալար արտադրյալ՝

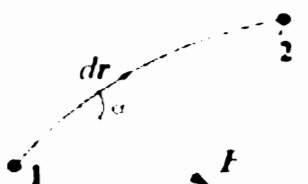
$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = F \cos \alpha ds = F_\alpha dl, \quad (23.1)$$

որտեղ α -ն *F* և *dr* վեկտորների կազմած անկյունն է, *dl* = *dr* -մասնիկ անցած տարրական ճանապարհը, *F* _{α} -ն ուժի պրոյեկցիան է տեղափոխության ուղղությամբ (հետագծին տարված շոշափողով): Ուժի տարրական աշխատանքը, կախված α անկյան արժեքից, կարող է լինել ինչպես դրական և բացասական, այնպես էլ զրո:

Ներկայացնելով համազոր ուժը իր բաղադրիչների միջոցով և տեղադրելով (23.1) աշխատանքի բանաձևում, կստանանք.

$$\begin{aligned} \delta A &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) d\mathbf{r} = F_1 d\mathbf{r} + F_2 d\mathbf{r} + \\ &\dots + F_n d\mathbf{r} = \delta A_1 + \delta A_2 + \dots + \delta A_n, \end{aligned} \quad (23.2)$$

որտեղ δA_i -երը բաղադրիչ ուժերի տարրական աշխատանքներն են մասնիկի *dr* տեղափոխության վրա: Ուրեմն, *համազոր ուժի աշխատանքը հավասար է բաղադրիչ ուժերի աշխատանքների հանրահաշվական գումարին*: Բնական է, տարբեր բաղադրիչ ուժեր միևնույն ներդրումը չունեն մասնիկի տվյալ տեղափոխության վրա: Այն ուժը, որի աշխատանքը դրական է ($\alpha < \pi/2$), նպաստում է մասնիկի տվյալ տեղափոխությանը և կոչվում է



Նկ 4 8

է *շարժիչ ուժ*: Եթե ուժի աշխատանքը բացասական է ($\alpha > \pi/2$), ապա այն տվյալ տեղափոխության վրա ունի արգելափող ազդեցություն և կոչվում է *դիմադրության ուժ*:

Ուժի շարժիչ կամ դիմադրության լինելը պայմանական է և կախված է քննարկող խնդրից: Միևնույն ուժը մի խնդրում

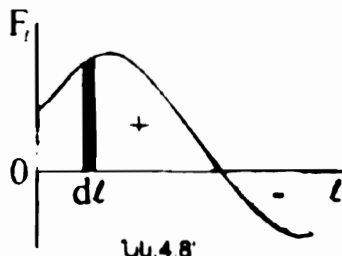
կարող է լինել շարժիչ, իսկ այլ խնդրում՝ դիմադրության ուժ: Օրինակ, բաժրացող մարմնի համար ծանրության ուժը ներկայանում է որպես դիմադրության ուժ, իսկ իջնողի համար՝ շարժիչ ուժ: Սակայն գոյություն ունենում են, որոնց աշխատանքը միշտ բացասական է, և այնպիսիք, որոնք ընդհանրապես աշխատանք չեն կատարում (*իդեալական ուժեր*, §28):

Գումարելով հետագծի տարբեր տեղամասերում ուժի (23.1) տարրական աշխատանքները, կստանանք դիտարկվող 1-2 տեղափոխության

վրա ուժի լիով աշխատանքը.

$$A = \int_1^2 F dr = \int_1^2 F_l dl : \quad (23.3)$$

Ընդհանրապես (23.3) ինտեգրալով որոշվող աշխատանքը կախված է ինչպես մասնիկի սկզբնական և վերջնական դիրքերից, այնպես էլ մասնիկի տեղափոխման հետագծի ձևից.



Նկ. 4.8

Սեխանիկական աշխատանքի (23.1) և (23.3) բանաձևերն ունեն պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն. Եթե հայտնի է աղեղային կորոդինատից (դիրքաթվից) ուժի $F_l(l)$ կախվածությունը (նկ. 4.8), ապա տարրական dl ճանապարհի վրա F_l ուժի աշխատանքը հավասար կլինի տարրական ուղղանկյան $F_l dl$ մակերեսին, իսկ լիով (23.3) աշխատանքը $F_l(l)$ «կորի տակ ընկած» պատկերի մակերեսին (նկ. 4.8):

Բերենք աշխատանքի հաշվման օրինակներ:

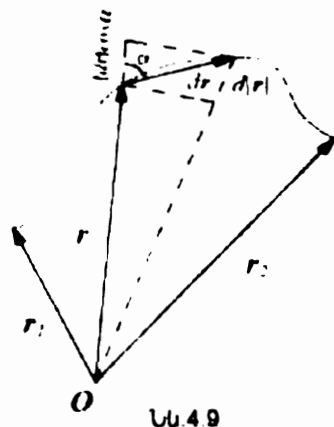
Մտածալկանության ուժի աշխատանքը: Դիցուք չդեֆորմացված վիճակում l_0 երկարություն ունեցող զսպանակի մի ծայրն ամրացված է Օ անշարժ կետին, իսկ մյուս ծայրից ամրացված մասնիկը տեղափոխվում է կամայական 1-2 հետագծով (նկ. 4.9): Հետագծի ցանկացած կետում մասնիկի վրա ազդում է առածալկանության

$$F_{el} = -k \xi \hat{r}$$

ուժը, որտեղ $\xi = r - l_0$ — զսպանակի դեֆորմացիայի չափն է: Մասնիկի տեղափոխության վրա այս ուժի տարրական աշխատանքը կլինի

$$\delta A = -k \xi \hat{r} d\hat{r} = -k \xi (dr)_r,$$

որտեղ $(dr)_r$ — ռ տեղափոխության պրոյեկցիան է շառավիղ-վեկտորի ուղղությամբ և հավասար է նրա մեծության անի (նկ. 4.9).



Նկ. 4.9

$$(dr)_r = |dr| \cos \alpha = d|r| = dr : \quad (23.4)$$

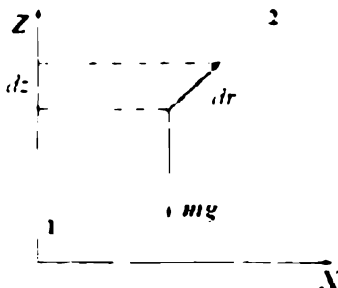
Հաշվի առնելով, որ $dr = d\xi$, տարրական աշխատանքը կներկայացնենք այսպես.

$$\delta A_p = -k \xi d\xi$$

լրիվ տեղափոխության վրա առաձգականության ուժի աշխատանքը կլինի

$$A_p = -k \int_0^L \xi d\xi = -\Delta \left(\frac{k\xi^2}{2} \right) \quad (23.5)$$

Կուլոնյան և գրավիտացիոն ուժերի աշխատանքը: Այս ուժերը տրվում են հետևյալ բանաձևով.



Ա. 4.10

$$F_i = \frac{\alpha}{r^2} \hat{r}, \quad \alpha = \begin{cases} -Gm_1m_2, \\ kq_1q_2 \end{cases}$$

Հաշվի առնելով (23.4)-ը, մասնիկի տեղափոխության վրա այս ուժի տարրական աշխատանքի համար կարող ենք գրել.

$$\delta A_i = \alpha \frac{r dr}{r^3} = \alpha \frac{dr}{r^2}.$$

որն ինտեգրելով, կստանանք լրիվ աշխատանքը

$$A_i = \alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\alpha}{r_2} + \frac{\alpha}{r_1} = -\Delta \left(\frac{\alpha}{r} \right). \quad (23.6)$$

Ժանրուքային ուժի աշխատանքը: Կոորդինատային Z առանցքն ուղղենք ուղղաձիգով և հաշվենք ուժի տարրական աշխատանքը (նկ. 4.10).

$$\delta A_g = mg dr = -mg dz.$$

որի ինտեգրումը տալիս է.

$$A_g = -\Delta(mgz): \quad (23.7)$$

Նկատենք, որ քննարկված ուժերի աշխատանքները կախված են միայն մասնիկի սկզբնական ու վերջնական դիրքերի կոորդինատներից և անկախ են շարժման հետաքոցից. դա հատուկ է ոչ բոլոր ուժերին. Օրինակ, չիման ուժերի աշխատանքը կախված է ոչ միայն մասնիկի սկզբնական և վերջնական դիրքերի կոորդինատներից, այլև հետաքոցի ձևից:

2. Հզորություն: Ուժի աշխատանք կատարելու թափը բնութագրում են **հզորություն** սկալար ֆիզիկական մեծությամբ. Այն ունի միավոր ժամանա-

յում ուժի կատարած աշխատանքի իմաստ.

$$N = \frac{dA}{dt} = F \frac{dr}{dt} = Fv : \quad (23.8)$$

Ուրեմն, ուժի զարգացրած հզորությունը ժամանակի ցանկացած պահին հավասար է մասնիկի արագության և ազդող ուժի սկալար արտադրյալին

Տարբեր մեքենաներ, սարքեր փոխարինում են մարդուն, կատարելով մեխանիկական աշխատանք. Բոլոր այդ սարքերը բնութագրվում են հզորությամբ, որն արտահայտում է նրանցում գործող ուժերի աշխատանք կատարելու թափը. Եթե հայտնի է սարքի հզորության կախումը ժամանակից, ապա նրա կատարած աշխատանքը կորոշվի հետևյալ բանաձևով.

$$A = \int N(t) dt : \quad (23.9)$$

Չափման միավորներ: Աշխատանքը ՄՄՀ-ում չափվում է ջորուներով (Ջ): Մեկ ջորուը մեկ նյութում ուժի աշխատանքն է, երբ նրա կիրառման կետն ուժի ազդման ուղղությամբ տեղափոխվում է մեկ մետրով. 1 Ջ = 1 Ն մ: Միավորների այս համակարգում հզորությունը չափվում է վատտերով (Վտ): Վատտը այն սարքի հաստատուն հզորությունն է, որը 1 վայրկյանում կատարում է 1 Ջ աշխատանք:

Միավորների CGS համակարգում աշխատանքի չափման միավորը էրգ-ն է.

$$1 \text{ էրգ} = 1 \text{ դին ամ} = 10^{-7} \text{ Ջ}:$$

§24. ՊՈՏԵՆՑԻԱԼԱՑԻՆ ՈւժԱԴԱՇՏԵՐ

Ուժադաշտը տարածության տիրույթ է, որում մասնիկի վրա ազդում է որոշակի օրինաչափությամբ փոփոխվող ուժ. Եթե ուժադաշտի յուրաքանչյուր կետում մասնիկի վրա ազդող ուժը ժամանակի ընթացքում մնում է անփոփոխ, ապա ուժադաշտը կոչվում է **ստացիոնար**.

Կետներվառիվ ուժեր, պոտենցիալային ուժադաշտ: Եթե ուժադաշտում մասնիկը տեղափոխվում է 1 կետից 2 կետը, ապա այդ տեղափոխության վրա դաշտի ուժերի աշխատանքը կախված կլինի, ընդհանրապես առած, ինչպես մասնիկի սկզբնական և վերջնական կոորդինատներից, այնպես էլ տեղափոխման հետագծի ծկից. Ֆիզիկայում առավել մեծ հետաքրքրություն են ներկայացնում այն ստացիոնար ուժադաշտերը,

որոնց աշխատանքն անկախ է մասնիկի տեղափոխման հետագծի ճկից՝ նման ուժադաշտերը կոչվում են պոտենցիալային՝ իսկ նրանցում գործող ուժերը կոնսերվատիվ՝ Կոնսերվատիվ ուժերի օրինակներ են առաձգականության, կուլոնյան, գրավիտացիոն, ծանրության ուժերը

Ցույց տանք, որ պոտենցիալային ուժադաշտում կամայական փակ հետագծով մասնիկի տեղափոխման վրա դաշտի ուժերի կատարած աշխատանքը զրո է։ Դիցուք 1 կետից մասնիկը տեղափոխվում է 2 կետը 1a2 և 1b2 տարբեր հետագծերով (նկ.4.11)։ Բանի որ դաշտը պոտենցիալային է, ապա

$$A_{1a2} = A_{1b2} \quad (24.1)$$

Մասնիկի 2b1 տեղափոխության վրա դաշտի ուժերի աշխատանքը հավասար է 1b2 տեղափոխման աշխատանքին՝ հակառակ նշանով.

$$A_{1b2} = -A_{2b1} \quad (24.2)$$

Եթե հաշվենք փակ հետագծով մասնիկի տեղափոխման վրա դաշտի ուժերի աշխատանքը, ապա (24.1)-ի և (24.2)-ի օգնությամբ կստանանք, որ այն զրո է.

$$A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1b2} = 0 \quad (24.3)$$

Ցույց տանք հակառակը. եթե ուժադաշտում կամայական փակ հետագծով մասնիկի տեղափոխման վրա դաշտի ուժերի աշխատանքը զրո է, ապա ուժադաշտը պոտենցիալային է։ Կամայական փակ հետագծով մասնիկի տեղափոխությունը կարող ենք տրոհել երկու հաջորդական տեղափոխությունների՝ 1a2 և 2b1 (նկ. 4.11)։ Ըստ պայմանի

$$A_{1a2} + A_{2b1} = 0 \quad (24.4)$$



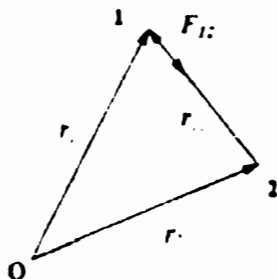
Օգտվելով դաշտի ստացիոնարության պայմանից, նորից կարող ենք գրել (24.2) առնչությունը, որի հաշվառմամբ (24.4)-ից կստանանք (24.1)-ը՝ դաշտի պոտենցիալային պայմանը։ Ուրեմն, կամայական փակ հետագծով մասնիկի տեղափոխման վրա դաշտի ուժերի աշխատանքի զրո լինելը ուժադաշտի պոտենցիալության անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է

Կենտրոնական ուժադաշտ։ Բոլոր ուժադաշտերը արդյունք են որո-

չակի մարմինների փոխազդեցության: Դաշտում մասնիկի վրա ազդող ուժը հենց այդ մարմինների ազդեցության արդյունքն է: Այն ուժերը, որոնք կախված են փոխազդող մասնիկների միջև հեռավորություններից և ուղղված են նրանց միացնող ուղղով, կոչվում են կենտրոնական: Կենտրոնական ուժերի օրինակներ են կուլոնյան, գրավիտացիոն, առաձգականության ուժերը: 1 մասնիկի վրա ազդող կենտրոնական ուժն ընդհանուր տեսքով կառելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ (նկ. 4.12):

$$\vec{F}_2 = f(r_2) \vec{r}_2, \quad (24.5)$$

որտեղ $\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_1$ մասնիկների փոխադարձ դիրքը բնութագրող շառավիղ-վեկտորն է:



Նկ 4.12



Նկ 4.13

Այն ուժադաշտը, որի տարրեր կենտրոնում մասնիկի վրա ազդող ուժերի ազդման գծերն անցնում են միևնույն O կետով, իսկ մեծությունները կախված են O կետից մասնիկի ունեցած r հեռավորությունից, կոչվում է կենտրոնական ուժադաշտ (նկ.4.13): O կետը կոչվում է ուժադաշտի ուժալի կենտրոն: Ատոմում կամ կրեպակալիին համակարգում միջուկի և կրեպակի ստեղծած դաշտերը կենտրոնական դաշտի օրինակներ են: Կենտրոնական ուժադաշտում մասնիկի վրա ազդում է կենտրոնական ուժ:

$$\vec{F} = f(r) \vec{r}, \quad (24.5')$$

որտեղ r -ը մասնիկի հեռավորությունն է O ուժալի կենտրոնից:

Յուրջ տանք, որ կենտրոնական ուժադաշտը պոտենցիալային է:

Որոշենք (24.5') կենտրոնական ուժի տարրական աշխատանքը:

$$\delta A = \vec{F}(r) d\vec{r} = f(r) (dr) = f(r) dr: \quad (24.6)$$

Կամայական 1-2 տեղափոխության վրա այս դաշտի ուժերի լրիվ աշխատանքը կլինի:

$$A = \int_1^2 f(r) dr = \Phi(r_2) - \Phi(r_1). \quad (24.7)$$

որտեղ $\Phi(r)$ -ը ուժի նախնական ֆունկցիան է և կախված է միայն r -ից՝ Ուրեմն, ստացրո՞ւ՛մք կենտրոնահամաչափ ուժադաշտը պոտենցիալային է, քանի որ (24.7)-ը անկախ է մասնիկի տեղափոխման հետագծի ձևից:

§25. ՊՈՏԵՆՑԻԱԼ ԷՆԵՐԳԻԱ, ԿԱՊԸ ՈւժԻ ՇԵՏ

Այն փաստը, որ պոտենցիալային ուժադաշտերում գործող ուժերի աշխատանքը կախված է միայն մասնիկի սկզբնական և վերջնական դիրքերի կոորդինատներից, հնարավորություն է տալիս այդ դաշտերը բնութագրել *պոտենցիալ էներգիա* սկալար ֆիզիկական մեծությամբ: Դիցուք պոտենցիալային ուժադաշտի կամայական D կետից մասնիկը տեղափոխում ենք նախապես ընտրված O կետը՝ քանի որ այս տեղափոխության վրա դաշտի ուժերի աշխատանքն անկախ է մասնիկի տեղափոխման հետագծի ձևից, ապա այն կարող է կախված լինել միայն և միայն O կետի նկատմամբ D կետի դիրքը բնութագրող r շառավիղ-վեկտորից:

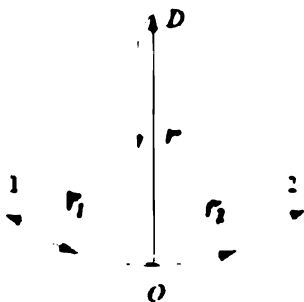
$$A_{D,O} = \int_O^D F dr = U(r): \quad (25.1)$$

Մասնիկի դիրքից (ֆիքսված O կետի նկատմամբ) կախված U սկալար ֆունկցիան կոչվում է *դաշտի D կետում մասնիկի պոտենցիալ էներգիա*: Կամայական երկու կետերի միջև մասնիկի տեղափոխման վրա դաշտի ուժերի կատարած աշխատանքը կարելի է արտահայտել U ֆունկցիայի նվազմամբ:

Իրոք, քանի որ դաշտի ուժերի աշխատանքն անկախ է տեղափոխման հետագծի ձևից, ապա մասնիկի 1-2 տեղափոխությունը կկատարենք այնպես, որ նրա հետագիծն անցնի ընտրված O կետով (նկ. 4.14): Այնպես որ կարող ենք գրել

$$A_{1,2} = A_{1,O} + A_{O,2} = A_{1,O} - A_{2,O} \quad (25.2)$$

որը (25.1)-ի հաշվառմամբ կընդունի հետևյալ տեսքը



Նկ 4.14

$$A_{12} = U'(r_1) - U'(r_2) = -\Delta U'(r); \quad (25.3)$$

Ուրեմն, մասնիկի կամայական 1-2 տեղափոխության վրա դաշտի ուժերի աշխատանքը հավասար է մասնիկի պոտենցիալ էներգիայի նվազմանը, իսկ տվյալ կետում մասնիկի պոտենցիալ էներգիան մնում է անորոշ՝ Սակայն, եթե տրվի մասնիկի պոտենցիալ էներգիայի արժեքը դաշտի որևէ կետում, ապա այդ կետից մասնիկը տեղափոխելով դաշտի տարբեր կետեր և չափելով դաշտի ուժերի աշխատանքը, (25.2) հավասարումից միաբաժանելով կորոշենք պոտենցիալ էներգիայի արժեքը դաշտի բոլոր կետերում: Ղա սովորաբար կատարվում է *պոտենցիալ էներգիայի գրոյական մակարդակի ընտրությամբ*: Այսինքն, նախապես պայմանավորվում են դաշտի ինչ-որ Օ կետում պոտենցիալ էներգիան համարել զրո:

Ղաշտում պոտենցիալ էներգիայի գրոյական մակարդակի ընտրությունը կոչվում է *պոտենցիալ էներգիայի նորմավորում*: Այժմ արդեն պարզ է դառնում, որ (25.1) առնչությամբ մասնիկի պոտենցիալ էներգիայի ներմուծման ժամանակ մենք լուրջությամբ ընդունել ենք Օ կետը որպես դաշտի պոտենցիալ էներգիայի գրոյական մակարդակ: Եթե պոտենցիալ էներգիան նորմավորված է, ապա դաշտի ցանկացած կետում այն թվապես հավասար կլինի այն աշխատանքին, որը կատարում են դաշտի ուժերը մասնիկը դիտարկվող կետից գրոյական մակարդակ տեղափոխելիս:

Համեմատելով (25.2) առնչությունը §23-ում առածգալականության, կուլոնյան, գրավիտացիոն, ժանրության ուժերի աշխատանքների համար ստացված (23.5)-(23.7) արտահայտությունների հետ, կստանանք այդ ուժադաշտերում մասնիկի պոտենցիալ էներգիաները.

$$U_{\text{el}}(r) = \frac{k\xi^2}{2} + C, \quad (25.4)$$

$$U_{\text{g}}(r) = \frac{\alpha}{r} + C, \quad U_{\text{ж}} = mgz + C, \quad (25.5)$$

Նորմավորման հետևյալ պայմանների ընտրությամբ.

$$U_{\text{el}}(0) = 0, \quad U_{\text{g}}(\infty) = 0, \quad U_{\text{ж}}(0) = 0, \quad (25.6)$$

(25.4) և (25.5) -ում անորոշ հաստատուն գումարելիները կդառնան զրո:

Հարկ է նշել, որ ֆիզիկական բոլոր բանաձևերը, որոնք կարող են համեմատվել փորձի արդյունքների հետ, պարունակում են միայն պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությանը, որն անկախ է նորմավորման պայմանից, Այնպես որ պոտենցիալ էներգիայի նորմավորումը ֆիզիկայում չունի մեծ կարևորություն:

Եկն մի դիտողություն: Պոտենցիալ էներգիան մասնիկի բնութագիրը

չէ Այն բնութագրում է կոնսերվատիվ փոխազդող մարմինների տեղեւորութեան մեխանիկական աշխատանք կատարելու ընդունակությունը։ Մասնիկը տվյալ դեպքում դաշտի էներգետիկ հատկությունների ուսումնասիրման պատիվ օգնելու է։

Ուրեմն՝ պոտենցիալային ուժադաշտի ազդեցությունը մասնիկի վրա բնութագրվում է երկու եղանակով. նրա վրա ազդող F ուժով և պոտենցիալ U էներգիայով։ Ուժադաշտի այս երկու բնութագրերը *համարժեք են* և նրանց միջև գոյություն ունեցող կապերով մեկի միջոցով կարելի է ստանալ մյուսը։

Ուժի և պոտենցիալ էներգիայի կապը: Դիցուք մասնիկը պոտենցիալային ուժադաշտում կատարել է dr տարրական տեղափոխություն։ Դաշտի ուժերի աշխատանքը մասնիկի դիտարկվող տեղափոխության վրա կլինի՝

$$\delta A = F dr = F_r dr : \quad (25.7)$$

Մյուս կողմից այդ աշխատանքը հավասար է մասնիկի պոտենցիալ էներգիայի նվազմանը.

$$\delta A = - dU, \quad (25.8)$$

որը (25.2) արտահայտությունն է մասնիկի տարրական տեղափոխության համար։ Գրված (25.7) և (25.8) առնչություններից հետևում է, որ եթե հայտնի է ուժադաշտում գործող ուժի տեսքը՝ $F(r)$, ապա պոտենցիալ էներգիան ցանկացած r կետում կորոշվի

$$U(r) = - \int F(r) dr \quad (25.9)$$

ինտեգրելով. որտեղ $r=0$ -ն ընտրված է որպես դաշտի պոտենցիալ էներգիայի զրոյական մակադրակ։

Եթե հայտնի է պոտենցիալ էներգիայի ֆունկցիան, ապա (25.7) և (25.8) առնչություններից կստանանք.

$$F_r = - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (25.10)$$

որը պոտենցիալ էներգիայի *գրադիենտն* է՝ հակառակ նշանով։ Ուրեմն դաշտի կողմից մասնիկի վրա ազդող F ուժի պրոյեկցիան տեղափոխության ուղղությամբ հավասար է այդ ուղղությամբ մասնիկի պոտենցիալ էներգիայի *գրադիենտին*՝ հակառակ նշանով։

Տարրական dr տեղափոխությունը և F ուժը ուղղանկյուն կոորդինա-

տալիս համակարգում ներկայացվում է այսպես:

$$dr = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz; \quad (25.11)$$

$$\mathbf{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z; \quad (25.12)$$

Դիտարկելով առանձին առանցքների երկայնքով մասնիկի տեղափոխության վրա դաշտի ուժի համապատասխան բաղադրիչի աշխատանքը և հավասարեցնելով այդ առանցքով մասնիկի $U(x, y, z)$ պոտենցիալ էներգիայի նվազմանը, կստանանք:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (25.13)$$

Դրանց հաշվառմամբ մասնիկի վրա ազդող (25.12) ուժը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$\mathbf{F} = - \left(\hat{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = - \text{grad} U \quad (25.14)$$

Փակագծում բերված արտահայտությունը սկալար U ֆունկցիայի գրադիենտն է ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում: Կատարելով

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (25.15)$$

նշանակումը, որը կոչվում է *նաբլա օպերատոր* (25.14) կապը կներկայացնենք այսպես.

$$\mathbf{F} = - \nabla U; \quad (25.16)$$

Ստացված (25.9) և (25.16) առնչությունները տալիս են պոտենցիալ էներգիայի և ուժի միարժեք կապը:

§26. ԿՈՆՍԵՐՎԱՏԻՎ ՈՒԺԵՐԻ ԱՇԽԱՏԱՆՔԸ ՀԱՄԱՆՄԲՈՒՄ

1. Արտաքին կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքը: Ծնթադրենք n մասնիկներից բաղկացած մեխանիկական համախումբը գտնվում է արտաքին պոտենցիալային դաշտում: Որոշենք այն աշխատանքը, որը կատարում են համախմբի տեղափոխության վրա արտաքին կոնսերվատիվ ուժերը տարրական dr ժամանակում

Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ ցանկացած մասնիկ պոտենցիալային ուժադաշտում օժտված է պոտենցիալ էներգիայով. Նշանա-

կենք համախումբը կազմող մասնիկների պոտենցիալ էներգիաները $U_1(r); U_2(r); \dots; U_n(r)$. որտեղ $r_1, r_2, \dots, r_n$ –ը մասնիկների դիրքերը բնութագրող շառավիղ-վեկտորներն են.

Արտաքին ուժադաշտում համախմբի պոտենցիալ էներգիան համախումբը կազմող մասնիկների պոտենցիալ էներգիաների գումարն է

$$U(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n U_i(r) \quad (26.1)$$

Դիցուք տարրական di ժամանակում համախումբը կազմող մասնիկները կատարել են $dr_1, dr_2, \dots$ տեղափոխություններ. Համաձայն նախորդ պարագրաֆում ստացված արդյունքի, յուրաքանչյուր մասնիկի տեղափոխության վրա դաշտի ուժերի աշխատանքը հավասար է համապատասխան մասնիկի պոտենցիալ էներգիայի նվազմանը

$$\delta A_i = -dU_i(r_i); \delta A_2 = -dU_2(r_2); \dots;$$

Գումարելով այս աշխատանքները կստանանք արտաքին կոնսերվատիվ ուժերի լրիվ աշխատանքը di ժամանակում.

$$\delta A_i = \sum_{i=1}^n \delta A_i = -\sum_{i=1}^n dU_i = -d \sum_{i=1}^n U_i(r) \quad (26.2)$$

Հաշվի առնելով (26.1)–ը, ստանում ենք, որ արտաքին կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքը հավասար է ուժադաշտում համախմբի պոտենցիալ էներգիայի նվազմանը

$$\delta A_i = -dU(r_1, r_2, \dots, r_n) \quad (26.3)$$

2. Ներքին կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքը: Դիտարկենք կոնսերվատիվ փոխազդող n մասնիկներից բաղկացած փակ համախումբ. Տարրական di ժամանակում յուրաքանչյուր մասնիկ կկատարի տեղափոխություն, որի հետևանքով համախումբը կփոխի իր կոնֆիգուրացիան:

Կոնֆիգուրացիայի փոփոխման վրա ներքին կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքը տարրական di ժամանակում ներկայացվում է համախմբում մասնիկների բաշխումից կախված սկալար ֆունկցիայի նվազմամբ

$$\delta A_{in} = -dU(r_1, r_2, \dots, r_n, \dots) \quad (26.4)$$

որտեղ U –ն կոչվում է համախմբի *սեփական պոտենցիալ էներգիա*

Ապացուցենք այս պնդումը նախ երկու մասնիկներից բաղկացած հա-

մախմբի համար (նկ 3.15):

Հաշվենք $d\mathcal{L}$ ժամանակում փոխազդեցության ուժերի աշխատանքը մասնիկների dr_1, dr_2 , տեղափոխությունների վրա

$$\delta A_{12} = F_{12} dr_1 + F_{21} dr_2 :$$

Օգտվելով Նյուտոնի 3-րդ օրենքից և ներմուծելով մասնիկների հարաբերական դիրքը բնութագրող $r_{12} = r_2 - r_1$ շառավիղ-վեկտորը, այդ աշխատանքը կներկայացնենք հետևյալ կերպ.

$$\delta A_{12} = F_{12} dr_{12} = f(r_{12}) dr_{12} = -dU_{12}(r_{12}), \quad (26.5)$$

որտեղ օգտվել ենք կենտրոնական ուժերի (24.5) ներկայացումից և նրանց կոնսերվատիվ լինելու հանգամանքից.

Այժմ դիտարկենք երեք մասնիկներից կազմված համախումբ (նկ. 4.16). Մասնիկների dr_1, dr_2, dr_3 , տեղափոխությունների վրա ներքին կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքը կլինի.

$$\begin{aligned} \delta A_{in} &= (F_{12} + F_{13}) dr_1 + (F_{21} + F_{23}) dr_2 + (F_{31} + F_{32}) dr_3 = \\ &= F_{12} dr_{12} + F dr_{13} + F_{23} dr_{23} = -dU_{12} - dU_{13} - dU_{23} : \end{aligned}$$

Ուրեմն՝

$$\delta A_{in} = \delta A_{12} + \delta A_{13} + \delta A_{23} = -d(U_{12} + U_{13} + U_{23}). \quad (26.6)$$

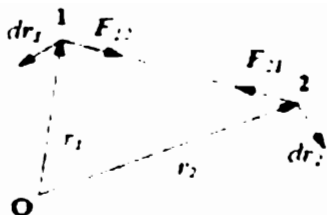
Ներքին կոնսերվատիվ ուժերի լրիվ աշխատանքը ներկայացվում է համախումբը կազմող *մասնիկների զույգ առ զույգ փոխազդեցության պոտենցիալ էներգիաների* գումարի՝

$$U(r_1, r_2, r_3) = U_{12}(r_{12}) + U_{13}(r_{13}) + U_{23}(r_{23}). \quad (26.7)$$

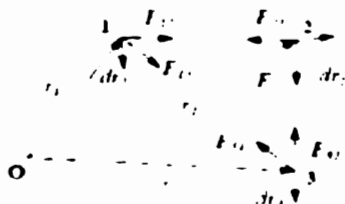
Նվազման տեսքով Զանի որ երկու մասնիկների փոխազդեցության պոտենցիալ էներգիան կախված է միայն նրանց միջև հեռավորությունից, ապա համախմբի սեփական պոտենցիալ էներգիան կախված կլինի նրանում մասնիկների բաշխումից, այսինքն կոնֆիգուրացիայից.

Բերված դատողությունները վերաբերվում են նաև կամայական թվով մասնիկներից բաղկացած համախմբին՝ Այնպես որ կարելի է անդել *կոնսերվատիվ ուժերով փոխազդող ցանկացած համախումբ բնութագրվում է իր կոնֆիգուրացիայից կախված սեփական պոտենցիալ էներգիա սկալար ֆունկցիայով*, որի նվազման հաշվին ներքին կոնսերվատիվ ուժերը կատարում են աշխատանք

$$\delta A_{in}^N = -dU : \quad (26.8)$$



Նկ 4.15



Նկ 4.16

Վերջավոր ժամանակում այդ աշխատանքը հավասար է՝

$$A_{12} = U_{11} - U_{12} = -\Delta U_{12} \quad (26.9)$$

որտեղ U_1 և U_2 -ը սեփական պոտենցիալ էներգիայի արժեքներն են համախմբի սկզբնական և վերջնական վիճակներում:

Համախմբի սեփական պոտենցիալ էներգիան աղիտիվ չէ. այսինքն հավասար չէ համախմբը կազմող մասերի սեփական պոտենցիալ էներգիաների գումարին: Անհրաժեշտ է նաև հաշվի առնել համախմբի տարբեր մասերի միջև փոխազդեցության պոտենցիալ էներգիան:

$$U_i = \sum U_{ij} + U_{im} \quad (26.10)$$

որտեղ U_{ij} -ն i -րդ մասի սեփական պոտենցիալ էներգիան է: Սեփական պոտենցիալ էներգիան կախված է մասնիկների միջև հեռավորություններից, որոնք ինվարիանտ են Պալիցեյի ձևափոխությունների նկատմամբ: Հետևաբար, *սեփական պոտենցիալ էներգիան Պալիցեյ-ինվարիանտ մեծություն է*:

§27. ԿԻՆԵՏԻԿ ԷՆԵՐԳԻԱ: ԿԻՆԵՏԻԿ ԷՆԵՐԳԻԱՍԻ

ՔԵՆՈՐԵՍԸ

Դիցուք ընտրված ՀԻՀ-ում m զանգվածով մասնիկը շարժվում է համագոր F ուժի ազդեցությամբ: Որոշենք մասնիկի dr տեղափոխության վրա F ուժի տարրական աշխատանքը: Հաշվի առնելով, որ

$$F = m \frac{dv}{dt}, \quad dr = v dt,$$

կստանանք

$$\delta A = F dr = m v dv = m v (dv),$$

Բանի որ dv վեկտորի պրոյեկցիան v ուղղությամբ հավասար է ար-

գության վեկտորի մոդուլի աճին, ապա

$$\delta A = m v d v = d \left(m v^2 / 2 \right) :$$

Համազոր ուժի տարրական աշխատանքը հավասար է մասնիկի առագությունից կախված

$$K = \frac{m v^2}{2} \quad (27.1)$$

մեծության աճին, որը կոչվում է մասնիկի *կինետիկ էներգիա*։ Ուրեմն մասնիկի տարրական տեղափոխության վրա համազոր ուժի աշխատանքը վերածվում է նրա կինետիկ էներգիայի աճին

$$dK = \delta A \quad (27.2)$$

Մասնիկի վերջավոր տեղափոխության դեպքում կունենանք

$$A = K_2 - K_1 \quad (27.3)$$

այսինքն, մասնիկի վրա ազդող *համազոր ուժի աշխատանքը անկախ ուժի ընույթից, հավասար է մասնիկի կինետիկ էներգիայի աճին* (կինետիկ էներգիայի թեորեմ)։ Եթե աշխատանքը դրական է, ապա մասնիկի կինետիկ էներգիան մեծանում է։ *Դիմադրության ուժերը փոքրացնում են մասնիկի կինետիկ էներգիան*։

Դիտարկենք մեխանիկական համախումբ, որի մասնիկներն ընտրված ՀԻՀ-ում ունեն $K_1, K_2, \dots$ կինետիկ էներգիաներ։ Համաձայն (27.2) արդյունքի, i -րդ մասնիկի կինետիկ էներգիայի աճը հավասար է նրա վրա ազդող համազոր ուժի աշխատանքին $dK_i = \delta A_i$ ։ Համախմբի բոլոր մասնիկների վրա ազդող ուժերի լրիվ աշխատանքը կլինի՝

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n dK_i = d \sum_{i=1}^n K_i = dK \quad (27.4)$$

որտեղ

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (27.5)$$

մեծությունը համախումբը կազմող մասնիկների կինետիկ էներգիաների գումարն է և կոչվում է *համախմբի կինետիկ էներգիա*։ Ուրեմն, *կինետիկ էներգիան աղիտիվ մեծություն է*։

Ստացված (27.4) արդյունքը *համախմբում գործող բոլոր ուժերի կատարած լրիվ աշխատանքը հավասար է նրա լրիվ կինետիկ էներգիայի աճին*։ Խայտնի է որպես համախմբի *կինետիկ էներգիայի թեորեմ*։

Զանի որ կինետիկ էներգիան արագությունից կախված քառակուսային ֆունկցիա է, ապա նրա արժեքը կախված է ընտրված հաշվարկի համակարգից: Ստանանք կինետիկ էներգիայի ձևափոխման օրենքը մի հաշվարկի համակարգից մեկ այլին անցնելիս: Դրա համար գրենք համախմբի կինետիկ էներգիան K և K' Հիշեցնում

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad K' = \sum_i \frac{m_i v_i'^2}{2}$$

Եթե K' -ը K -ի նկատմամբ շարժվում է u արագությամբ, ապա համաձայն Գալիլեյի ձևափոխությունների $v_i = v_i' + u$, այնպես որ

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2} (v_i' + u)^2 = K' + \frac{mu^2}{2} + uP', \quad (27.6)$$

Այստեղ $m = \sum m_i$ - համախմբի լրիվ զանգվածն է, իսկ $P' = \sum m_i v_i' = mv'$ -ը լրիվ իմպուլսը K' -ում: Հաշվի առնելով վերջինս, (27.6) -ը կներկայացնենք այսպես

$$K = K' + mu^2/2 + muv', \quad (27.7)$$

Եթե K' -ը C համակարգ է, $u = v_c$, այդ դեպքում $v_c' = 0$, և (27.7)-ից կստանանք

$$K = \bar{K} + \frac{mv_c^2}{2}, \quad (27.8)$$

Այս արդյունքը *Զրնիզի բերրման* է, որում աջ մասի առաջին անդամը համախմբի կինետիկ էներգիան է C համակարգում: Ուրեմն (27.8) -ը ներկայացնում է K -ից $\bar{K}$ իսկ (27.7)-ը K -ից կամայական K' -ին անցման կինետիկ էներգիայի ձևափոխման բանաձևերը:

§28. ԴԻՄՈՄԱՏԻՎ ՈՒԺԵՐ, ՆՐԱՅ ԱՇԽԱՏԱՆՔԸ

Համախմբում գործող ուժերը բաժանեցինք ներքին և արտաքին ուժերի: Բացի դրանից, ուժերը բաժանել ենք կոնսերվատիվի և ոչ կոնսերվատիվի, Կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքը միշտ կարելի է ներառյալցնել կոորդինատից կախված սկալար ֆունկցիայի նվազմամբ (§26): Ոչ կոնսերվատիվ ուժերի դադը ընդգրկում է դաշտային և կոնտակտային բնույթի բազմազան փոխազդեցություններ: Մրրկային էլեկտրական և

ազնիսական դաշտերը, թաց և չոր շփման ուժերը, քիմիական ու մկանս-
ն ուժերը ոչ կոնսերվատիվ փոխազդեցությունների օրինակ են Այստեղ
ենք կքննարկենք ոչ կոնսերվատիվ ուժերի երկու վարկեր դաս՝ Դրանք
ոչապախին և դիսիպատիվ ուժերն են.

Հոպպային կոչվում են այն ուժերը որոնք աշխատանքը մասնիկի կա-
նայական տեղափոխության վրա հավասար է զրոյի Այս դասի կարևորա-
յուն ներկայացուցիչը շարժվող լիցքի վրա B ինդուկցիայով մագնիսա-
յան դաշտի կողմից ազդող Լորենցի ուժն է

$$F = q[vB], \quad (28.1)$$

որը միշտ ուղղահայաց է լիցքի v արագությանը և հետևաբար, աշխա-
տանք չի կատարում

$$\delta A = q[vB]dr = q[vB]vdt = 0.$$

Համախմբի էներգիայի հաշվեկշռում այս ուժերը ներդրում չունեն:

1. *Դիսիպատիվ ուժերը շփման և դիմադրության ուժեր են:* Դիսիպա-
տիվ ուժերի ֆիզիկական բնույթի բացահայտումը դուրս է մեխանիկայի
լրջանակներից. Նշենք միայն, որ դրանք բարդ էլեկտրամագնիսական
նույթի փոխազդեցություններ են: Այստեղ կսահմանափակվենք փորձնա-
յանորեն ստացված շփման օրենքների շարադրանքով

Ի տարբերություն առածգականության, տիեզերական ծգողականութ-
ան, կոլոնյան ուժերի, որոնք կախված են միայն մարմինների փոխադարձ
լիցքից, շփման ուժերը կախված են նաև դիսիպատիվ փոխազդող մար-
մինների հարաբերական արագությունից: *Դիսիպատիվ փոխազդեցութ-
ան ցանկացած ուժ կարելի է ներկայացնել*

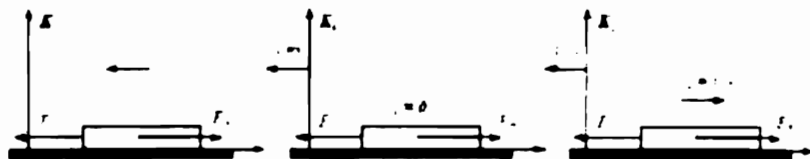
$$F = -k(v)v, \quad k(v) > 0 \quad (28.2)$$

շեքով, որտեղ v -ն փոխազդող մարմինների հարաբերական արագութ-
ունն է, իսկ $k(v)$ -ն դրական ֆունկցիա է: *Դիսիպատիվ ուժը միշտ հակա-
ռակ է ուղղված մարմինների հարաբերական շարժմանը*

Ինչպես ցանկացած ուժ, *դիսիպատիվ ուժերը բաժանվում են ներքի-
նի և արտաքինի:*

2. *Արտաքին դիսիպատիվ ուժերի աշխատանքը կախված հաշվարկի
համակարգի ընտրությունից կարող է լինել ինչպես բացասական այնպես
է դրական:* Իրոք, դիցուք փայտյա չորսուն սեղանով հավասարաչափ տե-
ղափոխվում է v արագությամբ (նկ.4.17ա) Պարզ է՝ սեղանի հետ կապված
 $K < \infty$ ուժի $F_{\text{ա}}$ ուժի աշխատանքը բացասական է: Եթե այս փոխազդե-

ցությունը դիտարկենք չորսուի շարժման ուղղությամբ $u = v$ արագությամբ շարժվող K_1 ՀԻՀ-ում, որում չորսուն կոնդախիտիկի հակառակ ուղղությամբ $v_1 = u - v$ արագությամբ, ապա չփման ուժի աշխատանքը կլինի դրական (նկ. 4.17գ): Մասնավորապես, չորսուի հետ կապված K_1 ՀԻՀ-ում F_1 ուժն աշխատանք չի կատարի (նկ. 4.17բ):



Նկ 4.17

3. Ներքին դիսիպատիվ ուժերի աշխատանքը միշտ բացասական է անկախ հաշվարկի համակարգի ընտրությունից: Այս պնդումը կապացուցենք, ներքին դիսիպատիվ ուժերը ներկայացնելով մարմինների զույգ առ զույգ դիսիպատիվ փոխազդեցությունների տեսքով: Դիսիպատիվ ուժերի (28.2) ընդհանուր բանաձևը համախմբի i -րդ և k -րդ մարմինների դիսիպատիվ փոխազդեցության համար ունի հետևյալ տեսքը

$$F_{ik} = -k(v_{ik})v_{ik} \quad (28.3)$$

որտեղ $v_{ik} = v_i - v_k$ -ն մարմինների հարաբերական արագությունն է (նկ. 4.17): dt ժամանակում համախմբի i և k մարմինների $dr = v_i dt$, $dr_k = v_k dt$ տեղափոխությունների վրա այդ ուժերի աշխատանքը կլինի

$$\delta A_{ik} = F_{ik} v_i dt + F_{ki} v_k dt,$$

որը Նյուտոնի 3-րդ օրենքի հաշվառմամբ կտա

$$\delta A_{ik} = F_{ik}(v_i - v_k)dt = F_{ik}v_{ik}dt$$

Օգտվելով դիսիպատիվ ուժի (28.3) բանաձևից, կստանանք

$$\delta A_{ik} = -k(v_{ik})v_{ik}^2 dt < 0, \quad (28.4)$$



Նկ 4.17

որը, շնորհիվ $k(v_{ik}) \geq 0$ պայմանի, միշտ բացասական մեծություն է: Համախմբում ներքին դիսիպատիվ ուժերի լրիվ աշխատանքը տարական dt ժամանակում բոլոր զույգ դիսիպատիվ փոխազդեցության ուժերի կատարած աշխատանքների գումարն է

$$\delta A_{\text{int}}' = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(v_i) v_i^2 dt < 0: \quad (28.5)$$

Ստացված արտահայտությունն ապացուցում է մեր պնդումը:

Այն փաստը, որ ներքին դիսիպատիվ ուժերի աշխատանքը բացասական է կամայական հաշվարկի համակարգում, հետևում է նրանից, որ այդ աշխատանքը կախված է միայն մարմինների *հարաբերական արագություններից* որոնք ինվարիանտ են Գալիլեյի ձևափոխության նկատմամբ:

Ստացված արդյունքը լուսաբանենք պարզագույն օրինակով: Դիցուք սեղանին դրված տախտակը տեղափոխվում է այնպես, որ նրա վրա դրված չորսուն սահելով ետ է մնում տախտակից (նկ.4.18): Քանի որ մեզ հետաքրքրում է տախտակ - չորսու համախմբի շարժումը, ապա ներքին դիսիպատիվ ուժերն այստեղ տախտակի կողմից չորսուի վրա ազդող F_{12} , և չորսուի կողմից տախտակի վրա ազդող F_{21} չփման ուժերն են Համաձայն Նյուտոնի 3-րդ օրենքի

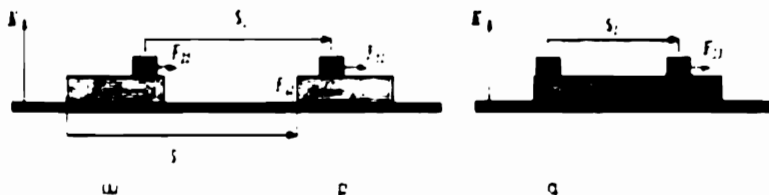
$$F_{12} = -F_{21} \quad (28.6)$$

Որոշենք այս ուժերի աշխատանքը t_1 -ից t_2 ժամանակում սեղանի և տախտակի հետ կապված K և K' հաշվարկի համակարգերում:

Նկ.4.18ա-ն պատկերում է մարմինների դիրքերը սեղանի հետ կապված ՀՀ-ում. ժամանակի t_1 և t_2 պահերին: Դիտարկվող ժամանակում սեղանի նկատմամբ տախտակը կատարել է s_1 իսկ չորսուն՝ s_2 տեղափոխություններ: Հաշվենք այդ ընթացքում չփման ուժերի աշխատանքը

$$\delta A_{\text{int}}' = F_{12}s_1 + F_{21}s_2 = -F_{12}(s_2 - s_1) < 0 \quad (28.7)$$

Չորսուի վրա ազդող չփման ուժը կատարել է դրական աշխատանք, իսկ տախտակի վրա ազդող չփման ուժի աշխատանքը բացասական է: Քանի որ, տախտակից ետ մնալու պատճառով, չորսուն սեղանի նկատմամբ կատարել է ավելի փոքր տեղափոխություն ($s_2 > s_1$), ապա ներքին չփման ուժերի լրիվ աշխատանքը բացասական է:



Նկ. 4.18

Այժմ դիտարկենք նույն երևույթը տախտակի հետ կապված հաշվարկի համակարգում. Նկ. 4.18բ-ում պատկերված են չորսուի սկզբնական և

վերջնական դիրքերը տախտակի հետ կապված ՀՀ-ում Պարզ է այս ՀՀ-ում տախտակն անշարժ է Հետևաբար, նրա վրա ազդող չփման ուժն աշխատանք չի կատարի: Ուրեմն ներքին դիսիպատիվ ուժերի լրիվ աշխատանքն այս ՀՀ-ում կլինի.

$$\Delta A_{\text{int}}' = -F_{\text{int}} s_1' < 0 \quad (28.8)$$

Նկատենք, որ տարրեր ՀՀ-երում ներքին դիսիպատիվ ուժերի աշխատանքները նույնն են. $A_{\text{int}} = A_{\text{int}}'$ Դրանում կհամոզվեք (28.8) -ում հաշվի առնելով Քալիլեյի $s_1' = s_1$, s_2 ծանադիսությունները:

Քննարկենք դիսիպատիվ փոխազդեցության տարրեր ծնեը.

4. Չոր չփման ուժեր. Այսպես են կոչվում հրար հպված պինդ մարմինների հարաբերական շարժմանը խոչընդոտող, նրանց հպման մասերում առաջացող ուժերը: Ընդ որում ենթադրվում է, որ հպվող մակերևույթների միջև բացակայում են հեղուկ կամ գազային միջնորմները: Կախված հպվող պինդ մարմինների հարաբերական շարժման ձևից, տարբերվում են *սահքի* և *զլորման չփման* ուժեր:

Պարզվում է, չոր չփման ուժերն առաջանում են ոչ միայն մի պինդ մարմինը մեկ այլ պինդ մարմնի մակերևույթով շարժվելիս, այլ նաև նման հարաբերական շարժման փորձ կատարելիս: Վերջին դեպքում առաջացող չփման ուժերը կոչվում են *դադարի* կամ *կցորդման չփման* ուժեր: Դադարի չփումը չոր չփման ուժերի կարևոր առանձնահատկությունն է. Այնպես որ, առապել ընդհանուր տեսքով, *չոր չփման ուժերը* կարելի է սահմանել որպես չփման ուժեր, որոնք *չեն վերանում չփվող մարմինների հարաբերական արագությունը գրոյի ձգտեցնելիս*: Հակառակ դեպքում գործ կունենանք, այսպես կոչված, *թաց կամ մածուցիկ չփման ուժերի հետ*:

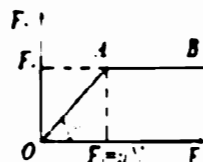
Չոր չփման ուժերի վարքը կարելի է ուսումնասիրել պարզագույն փորձերով: Դիցուք փորձատեղանին դրված փայտյա չորսուն ծգում ենք հորիզոնական ուղղությամբ (նկ.4.19ա): Ուղղածիզ ուղղությամբ չորսուի վրա ազդող ծանրության ուժը համակշռված է սեղանի դեֆորմացիայով



Նկ 4 19ա



Նկ 4 19բ



Նկ 4 20

պայմանավորված ռեակցիայի ուժով $N = mg$ ։ Կիրառելով արտաքին F ուժ, կտեսնենք, որ մինչև որոշակի F_0 արժեքն այն մեծացնելիս չորսուն չի փոխում իր դադարի վիճակը։ Այս երևույթի բացատրությունը միակն է. սեղանի և չորսուի իպվող մակերևույթների անհարթությունների (նկ. 4.19բ) պատճառով առաջացել է չորսուի մակերևույթի վրա կիրառված չփման ուժ F_n որը մեծությամբ հավասար է արտաքին ուժին և հակառակ է ուղղված նրան

$$F_n = -F, \text{ քանի դեռ } F \leq F_0 \quad (28.9)$$

Այս փաստը նկ. 4.20-ում գրաֆիկորեն ներկայացված է ՕԱ հատվածով, որտեղ պատկերված է չորսուի վրա ազդող F_n ուժի մեծության կախվածությունը արտաքին ազդող ուժից։ Արտաքին ուժի F_0 արժեքը, որից սկսվում է չորսուի սահեը սեղանի մակերևույթով, կոչվում է *դադարի առավելագույն չփման ուժ*։ Ավելացնելով չորսուի վրա համանման մեկ, երկու, երեք չորսուներ, կտեսնենք, որ *դադարի առավելագույն չփման ուժը* ստանում է $2F_0$, $3F_0$, $4F_0$ արժեքները։ Նկատենք սակայն, որ նույնքան անգամ մեծանում է նաև ռեակցիայի N ուժը՝ $2mg$, $3mg$, $4mg$ ։

Ուրեմն, *դադարի առավելագույն չփման ուժի և մակերևույթների միջև գործող ռեակցիայի ուժի հարաբերությունը հաստատուն մեծություն է*

$$F_n/N = \mu = \text{const} \quad (28.10)$$

Այն կոչվում է *դադարի առավելագույն չփման գործակից* և կախված է չփվող մակերևույթների նյութի տեսակից և նրանց իդկվածության աստիճանից։ (28.10) առնչությունը փորձնականորեն ստացել է Ամոնտոնը (1699թ.) և կրում է նրա անունը (*Ամոնտոնի օրենք*)։ Նկատենք, սակայն, որ դադարի չփման ուժն աշխատանք չի կատարում։

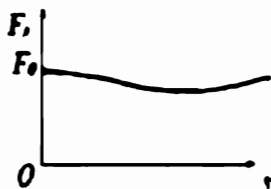
Այժմ ենթադրենք չորսուն սահում է սեղանի մակերևույթով՝ և արագությամբ v շարժումը հավասարաչափ է, ապա չփման ուժը նորից համակչում է արտաքին ուժին $F_n = F$ ։ Եթե շարժումն արագացող է, ապա $F_n > F$ ։ Թե՛ մեկ, թե՛ մյուս դեպքում F ուժի արժեքը, ընդհանրապես ասած, կախված է չորսուի և արագությունից։

Նկ. 4.21-ում բերված է արագությունից չփման ուժի մեծության բնութագրական կախվածությունը։ $v = 0$ դեպքում գրաֆիկը ներկայացնում է F_0 բարձրությամբ ուղղաձիգ հատված։ Այն ցույց է տալիս, որ դադարի վիճակում չփման ուժը կարող է ընդունել 0-ից F_0 միջակայքի ցանկացած արժեք կախված արտաքին $F < F_0$ ուժի մեծությունից (նկ. 4.21ա,բ)։ Կուլոնի կողմից կատարված փորձերը ցույց են տվել, որ դադարի առավելագույն չփման ուժի համար Ամոնտոնի (28.10) օրենքը կիրառելի է նաև սահեի

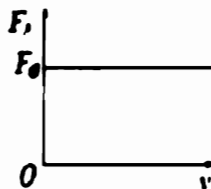
չիման համար, միայն թե այս դեպքում μ -ն, ընդհանրապես ասած, ֆունկցիա է չորսուի արագությունից: Արագության մեծացմանը զուգընթաց չիման ուժը նախ նվազում է: Ընդունելով նվազագույն արժեք, այն սկսում է աճել (նկ.4.21ա): Ինչպէս, Կուլոնը փորձնականորեն պարզել է, որ արագությունից μ -ի կախումը բավականաչափ թույլ է, և գործնական շատ խնդիրներ լուծելիս կարելի է μ -ն համարել արագությունից անկախ հաստատուն գործակից: Նկ.4.21բ-ում և 4.20-ում գրաֆիկների հորիզոնական հատվածներն արտահայտում են հենց այդ փաստը: Այս մոտավորության չորսուի վրա ազդող չիման ուժը, որը կոչվում է *սահքի չիման ուժ* իսկ μ -ն *սահքի չիման գործակից* անկախ է արագությունից և որոշվում է

$$F_{\mu} = \mu N \quad (28.11)$$

բանաձևով (Կուլոն-Ամոնտոնի օրենք)



Նկ.4.21ա



Նկ.4.21բ

Վերադառնալով նկ.4.20-ում պատկերված գրաֆիկին՝ նկատում ենք, որ $F > \mu N$ դեպքում չորսուն կշարժվի արագացմամբ.

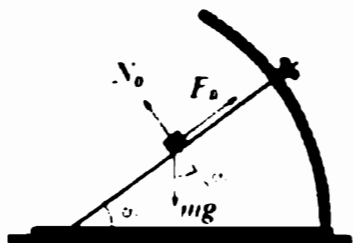
$$a = \frac{F - \mu N}{m} :$$

Պարզ է նաև, որ $F = \mu N$ դեպքում չորսուն կարող է գտնվել ինչպես հավասարաչափ շարժման, այնպես էլ դադարի վիճակում:

Սահքի չիման գործակցի չափումը: Գոյություն ունեն սահքի չիման

գործակցի չափման զանազան եղանակներ: Պրանցից պարզագույնը և հարմարը μ -ի որոշումն է՝ թեք հարթության վրայով մարմինը հավասարաչափ սահեցնելով:

Նկ.4.22-ում պատկերված սարքը ներկայացնում է ուսումնասիրվող նյութից պատրաստած թեք հարթություն, որի կազմած անկյունը հորիզոնի հետ կարելի



Նկ.4.22

է ահուն փոփոխել: Ընտրելով α անկյունն այնպես, որ թեք հարթությանը շրտուն սահի հաստատուն արագությամբ, կարող ենք գրել.

$$N_0 = mg \cos \alpha_0; \quad F_0 = \mu N_0 = mg \sin \alpha_0 \quad (28.12)$$

Այսինքն շարժման հավասարման պրոյեկցիաներն են թեք հարթությանը զուգահեռ և ուղղահայաց ուղղություններով, որոնցից հետևում է.

$$\mu = \tan \alpha_0 \quad (28.13)$$

Չափելով α_0 անկյունը, կորոշենք սահքի շփման գործակցի արժեքը

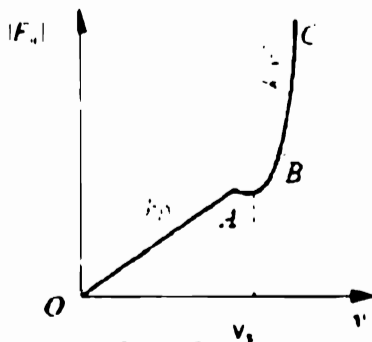
5. Թաց շփման ուժեր: Այսպես են կոչվում հեղուկ կամ գազային միջավայրում շարժվող պինդ մարմնի վրա ազդող շփման ուժերը. Բացի հեղուկի մածուցիկության ուժերից (§95), որոնք ազդում են շարժվող պինդ մարմնի վրա, պինդ մարմնի մակերևույթը ենթարկվում է նաև նորմալ ճնշման ուժերի ազդեցությանը, որոնց համագործ ունի պինդ մարմնի շարժմանը հակառակ ուղղված բաղադրիչ. Այն կոչվում է *միջավայրի դիմադրության ուժ* որը նույնպես արգելակում է մարմնի շարժումը. Մեծ արագությամբ շարժվող մարմնի վրա միջավայրի դիմադրության ուժը կարող է թվապես անհամեմատ գերազանցել մածուցիկության ուժին: Փորձնական ճանապարհով դժվար է տարբերել այդ ուժերը և, սովորաբար, դրանք միավորելով դիտում են մեկ ուժ: Այս գումարային ուժը, որն ուղղված է պինդ մարմնի շարժմանը հակառակ, պայմանականորեն կանվանենք *թաց շփման ուժ* և նշանակենք F_* (տես գլուխ XIII):

Փորձնականորեն հաստատված է, որ *ծայինից փոքր արագություններով շարժման դեպքում թաց շփման ուժերը համեմատական են արագության առաջին աստիճանին*

$$F_* = -k_1 v, \quad (28.14)$$

Նկ 4 23-ում պատկերված գրաֆիկում (28.14) օրենքն իրականանում է արագությունների OA միջակայքում: Միջակայքում ծայինից մեծ արագություններով պինդ մարմնի շարժման դեպքում թաց շփման ուժերը ունեն արագությունից *քառակուսային կախվածություն*

$$F_* = -k_2 v^2, \quad (28.15)$$



Նկ 4 23

Նկ. 4.23-ում այն համապատասխանում է արագությունների BC տիրույթին: Միջանկյալ արագությունների AB տիրույթում չփման ուժի արագությունից կախվածությունը բավականին բարդ է:

Շփման k_1 և k_2 գործակիցները և արագությունների OA, AB, BC տիրույթները (Նկ 4.23) կախված են պինդ մարմնի ծնկից, չափերից, մակերևույթի վիճակից և հեղուկի ֆիզիկական հատկություններից:

§29. ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԷՆԵՐԳԻԱՑԻ ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ

ՕՐԵՆՔ

Դիտարկենք փոխազդող մասնիկներից կազմված մեխանիկական համախումբ, որը ենթարկվում է արտաքին կոնսերվատիվ և ոչ կոնսերվատիվ ուժերի ազդեցությանը: Համաձայն կինետիկ էներգիայի թեորեմի համախմբում գործող բոլոր ուժերի կատարած լրիվ աշխատանքը հավասար է կինետիկ էներգիայի աճին

$$dK = \delta A: \quad (29.1)$$

Բաժանենք համախմբում գործող ուժերը ներքին և արտաքինի, իսկ վերջիններս էլ կոնսերվատիվի և ոչ կոնսերվատիվի: Այդ դեպքում նրանց աշխատանքը կներկայացվի այսպես.

$$\delta A = \delta A_m^c + \delta A_m^d + \delta A_e^c + \delta A_e^d: \quad (29.2)$$

Հիշենք, որ ներքին կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքը հավասար է համախմբի կոնֆիգուրացիայից կախված սեպիական պոտենցիալ էներգիայի նվազմանը

$$\delta A_m^c = -dU_c, \quad (29.3)$$

իսկ արտաքին կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքը արտաքին ուժադաշտում համախմբի պոտենցիալ էներգիայի նվազմանը.

$$\delta A_e^c = -dU_e: \quad (29.4)$$

Հաշվի առնելով (29.3), (29.4) –ը (29.2) –ում, տեղադրելով վերջինս կինետիկ էներգիայի թեորեմն արտահայտող (29.1) առնչության մեջ և տեղափոխելով պոտենցիալ էներգիայով անդամները հավասարման ձախ մասը, կստանանք.

$$d(K + U + U_e) = \delta A_m^d + \delta A_e^d: \quad (29.5)$$

Փակագծում գրված արտահայտությունը համախումբը կազմող մաս-

զիվների կոորդինատներից և արագություններից (այսինքն՝ համախմբի մեխանիկական վիճակից) կախված մեծություն է

$$E = K + U + U' \quad (29.6)$$

որը կոչվում է *համախմբի լրիվ մեխանիկական էներգիա*։ Զանի որ մեխանիկական էներգիայի գումարելիներից մեկը սեփական պոտենցիալ էներգիան, աղիտիվ չէ, ապա *աղիտիվ չէ նաև համախմբի լրիվ մեխանիկական էներգիան*։ Այն հավասար է համախմբի բաղկացուցիչ մասերի մեխանիկական էներգիաների գումարին, ավելացրած այդ մասերի միմյանց հետ փոխազդեցության էներգիան։

$$E = \sum E_i + U'_{\dots} \quad (29.7)$$

Որտեղ E_i և i -րդ մասի լրիվ մեխանիկական էներգիան է Պառնալով (29.5) առնչությունը, (29.6) ի հաշվառմամբ կունենանք

$$dE = \delta A_m^{\mu} + \delta A_i^{\mu} : \quad (29.8)$$

Համախմբի մեխանիկական վիճակի վերջավոր փոփոխությունների դեպքում, երբ համախմբը 1 վիճակից անցնում է 2 վիճակին, (29.8) առնչությունից կստանանք.

$$E_2 - E_1 = A_m^{\mu} + A_i^{\mu} \quad (29.9)$$

լրիվ մեխանիկական էներգիայի փոփոխությունը հավասար է համախմբում գործող ոչ կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքին։ Այստեղից հետևում է մեկ այլ կարևոր արդյունք՝ *մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքը ոչ կոնսերվատիվ փոխազդեցություններից զերծ համախմբի մեխանիկական էներգիան պահպանվում է*

$$E = K + U + U' = const : \quad (29.10)$$

Նկատենք, որ պահպանվում է համախմբի լրիվ մեխանիկական էներգիան, իսկ կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաները կարող են փոխվել, փոխարկվելով մեկը մյուսին.

$$\Delta K = -\Delta U - \Delta U'$$

(29.9) առնչությունից հետևում է, որ *լրիվ մեխանիկական էներգիան կարող է պահպանվել նաև ոչ կոնսերվատիվ ուժերի առկայության դեպքում*։ Միայն թե դրա համար անհրաժեշտ է, որ

$$A_m^{\mu} + A_i^{\mu} = 0, \quad (29.11)$$

այսինքն, ներքին դիսիպատիվ ուժերի բացասական աշխատանքով համախմբի լրիվ մեխանիկական էներգիայի նվազումը անընդհատ լրացվի արտաքին ոչ կոնսերվատիվ ուժերի դրական աշխատանքով։ Այդպիսին է,

օրինակ. գնացքի լրիվ մեխանիկական էներգիան. երբ այն մեծությամբ հաստատուն արագությամբ շարժվում է ճանապարհի հորիզոնական տեղամասով Այդ ընթացքում նրանում գործող ներքին դիսիպատիվ ուժերը ինչպես նաև օդի կողմից ազդող թաց չվման ուժերի բացասական աշխատանքով պայմանավորված լրիվ էներգիայի նվազումը անընդհատ լրացվում է շարժիչի դրական աշխատանքով

Եթե մեխանիկական համախումբը փակ է, այսինքն՝ նրանում բացակայում են արտաքին ուժերը, ապա ստացված բոլոր բանաձևերում անհրաժեշտ է տեղադրել $U_i = 0$, $A_{in}^* = 0$: Այդ դեպքում կունենանք

$$E = K + U_i \quad (29.12)$$

այնպես որ

$$E_2 - E_1 = A_{in}^* \leq 0 \quad (29.13)$$

Ուրեմն, փակ համախմբի մեխանիկական էներգիան պահպանվում է եթե նրանում բացակայում են ներքին դիսիպատիվ ուժերը: Հակառակ դեպքում, ինչպես երևում է (29.13) առնչությունից, այն անընդհատ կնվազի

Հարց է առաջանում, ու՞ր է «կորչում» ներքին դիսիպատիվ ուժերի աշխատանքով պայմանավորված լրիվ մեխանիկական էներգիայի նվազած մասը: Այս հարցի մանրագնին փորձնական ուսումնասիրություններ ֆիզիկայի մյուս բաժիններում, ինչպես նաև հարակից բնական գիտություններում, հանգեցրել են էներգիայի պահպանման համընդհանուր օրենքի հաստատմանը: *էներգիան չի ծնվում և չի ոչնչանում այլ մի ձևից փոխարկվում է այլ ձևի՝ համարժեք քանակությամբ* Այդ պատճառով հարևողավ ընդլայնել էներգիայի հասկացությունը, ներառելով մատերիայի շարժման այլ ձևերին հատուկ էներգիաները (քիմիական, ջերմային, էլետրամագնիսական, միջուկային և այլն): Ընդ որում *ներքին դիսիպատիվ ուժերի աշխատանքով նվազած մեխանիկական էներգիան վերածվում է համարժեք քանակությամբ ջերմային էներգիայի*:

Այսպիսով, էներգիայի պահպանման համընդհանուր օրենքը վերաբերվում է բոլոր ֆիզիկական երևույթներին, նաև նրանց, որոնք չեն նկարագրվում Նյուտոնի օրենքներով, և հանդիսանում է փորձնական փաստերի ընդհանրացում ներկայացնող բնության *հիմնարար օրենք*:

Եթե ունենք միայն մեկ մասնիկ, ապա (29.6) և (29.9) բանաձևերում անհրաժեշտ է տեղադրել $U_i = 0$, $A_{in}^* = 0$.

$$E_2 - E_1 = A^* \quad (29.14)$$

$$E(r, v) = K(v) + U(r), \quad (29.15)$$

որտեղ r, v -ն ընտրված ՀԻՀ –ում մասնիկի շառավիղ-վեկտորն է և արագությունը:

§30. ՖԻԼԻՏ ԵՎ ԻՆՖԻԼԻՏ ՇԱՐՓՈՒՄՆԵՐ: ՀԱՎԱՄԱՐԱԿԵՌՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ուսումնասիրենք արտաքին պոտենցիալային ուժադաշտում մասնիկի շարժման որոշ ընդհանուր օրինաչափություններ

Տեսանք, որ ոչ կոնսերվատիվ ուժերի բացակայությամբ մասնիկի մեխանիկական էներգիան պահպանվում է

$$E = K(v) + U(r) = \text{const} \quad (30.1)$$

Ջանի որ կինետիկ էներգիան ոչ բացասական ֆունկցիա է, ապա՝

$$K = E - U(r) \geq 0, \text{ կամ } E \geq U(r): \quad (30.2)$$

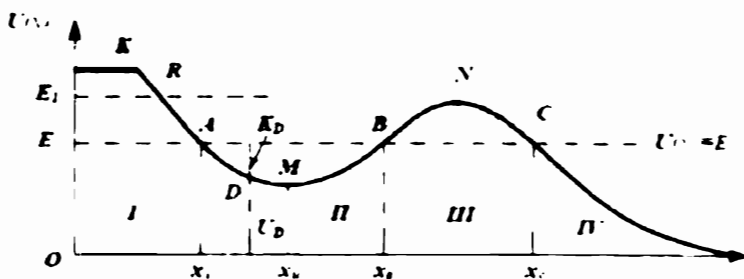
Ստացված առնչությունը որոշում է տարածության այն տիրույթները, որոնցում կարող է գտնվել տվյալ E էներգիայով մասնիկը: Տարածության այլ տիրույթներում մասնիկի կինետիկ էներգիան կլինի բացասական: Շա բացառում է այդ տիրույթներում մասնիկի գտնվելը:

Ասվածը լուսաբանենք տրված արտաքին $U(x)$ ուժադաշտում մասնիկի միաչափ շարժման դիտարկմամբ (նկ.4.24): Եթե մասնիկին հաղորդված է E լրիվ էներգիա, ապա այն կարող է գտնվել X առանցքի միայն որոշակի տիրույթներում, որոնք որոշվում են $U(x) < E$ պայմանով: Նկ. 4.24-ում պատկերված պոտենցիալ ուժադաշտում այդ պայմանը տալիս է X առանցքի երկու տարբեր տիրույթներ

$$x_4 \leq x \leq x_*, \quad x \geq x_*$$

Ուրեմն, տրված E էներգիայով մասնիկը դիտարկվող ուժադաշտում կարող է գտնվել X առանցքի II և IV տիրույթներում: Ընդ որում այն չի կարող մի թույլատրելի տիրույթից անցնել մյուս թույլատրելի տիրույթ: Դրան խանգարում է այդ տիրույթները բաժանող BC “պոտենցիալային արգելք”: AB -ում մասնիկի շարժումը սահմանափակված է տարածության վերջավոր (x_4, x_*) տիրույթում: Մասնիկի նման շարժումը կոչվում է *ֆինիտ*: Դիտարկվող տիրույթում մասնիկը կարող է միայն տատանումներ կատարել: Թույլատրելի տիրույթի կամայական D կետում մասնիկի պոտեն-

ցիալ և կինետիկ էներգիաների արժեքները որոշվում են $U(x)$ պոտենցիալ ֆունկցիան պատկերող կորից ցած և վեր ընկած հատվածների երկարությոններով: Օրինակ, D կետում մասնիկը օժտված է U_1 պոտենցիալ և K_1



Նկ 4.24

կինետիկ էներգիաներով և նրա վրա ազդում է $F_x = -dU/dx$, ուժ, որն ուղիված է X առանցքով: Հարծվելով աջ, մասնիկի պոտենցիալ էներգիան նվազում է, իսկ կինետիկը աճում: Պոտենցիալ իրոքի հատակում (M կետը մասնիկի վրա ազդող ուժը դառնում է զրո ($F_x=0$) և փոխում նշանը ընդունելով X առանցքին հակառակ ուղղություն: Այնպես որ M-ից B մասնիկը շարժվում է դանդաղելով (կինետիկ էներգիան նվազում է, իսկ պոտենցիալ էներգիան աճում), և B կետում այն կանգ է առնում: Զանի որ այդ կետում նրա վրա ազդում է դեպի M կետն ուղղված ուժ, ապա մասնիկը սկսում է շարժվել ետ: A, B, C կետերը կոչվում են *շրջման կետեր*: *Շրջման կետերը $E=U(x)$ հավասարման լուծումներն են*

Եթե մասնիկը գտնվում է IV տիրույթում և շարժվում է դեպի ծախ, ապա հասնելով C շրջման կետին, վերադառնում է և գնում «անվերջություն»: Մասնիկն նման շարժումը կոչվում է *ինֆինիտ*:

Արտաքին պոտենցիալային ուժադաշտում մասնիկի շարժման վարքը կախված է ինչպես պոտենցիալ $U(x)$ ֆունկցիայից, այնպես էլ մասնիկին հաղորդված լրիվ մեխանիկական էներգիայի չափից: Օրինակ, դիտարկվող ուժադաշտում E, էներգիայով մասնիկի շարժումն ինֆինիտ է: Հասնելով շրջման R կետին, մասնիկը կգնա անվերջություն (Նկ. 4.24):

Ինչ կկատարվի, եթե արտաքին ուժադաշտում մասնիկի վրա ազդեն նաև դիսիպատիվ ուժեր: Հնորիվ դիսիպատիվ ուժերի բացասական աշխատանքի, մասնիկի լրիվ մեխանիկական էներգիան *անընդհատ կնվազի*: Այդ նվազումը կշարունակվի այնքան, քանի դեռ մասնիկը շարժման մեջ է: Այստեղ անհրաժեշտ է տարբերել երկու դեպք, երբ մասնիկը շարժ-

վում է թաց և չոր շփման ուժերի ազդեցությամբ:

Քանի որ թաց շփման դեպքում բացակայում է դադարի շփումը, ապա II տիրույթում շարժվող մասնիկի տատանումների լայնույթը նվազելով ի վերջո կդառնա զրո: Մասնիկը կանգ կառնի պոտենցիալ հորի մինիմումին համապատասխանող x_0 կետում և այդ դիրքում կմնա որքան ասես երկար ժամանակ: Ուժադաշտի այն կետերը, որոնցում մասնիկի վրա ուժ չի ազդում, կոչվում են *հավասարակշռության դիրքեր*: Պարզ է, դրանք ուժադաշտում մասնիկի պոտենցիալ էներգիայի էքստրեմումի կետերն են, քանի որ նրանցում

$$F = -\nabla U = 0 \quad (30.3)$$

Հավասարակշռությունը լինում է կայուն, անկայուն և անտարբեր:

Կայուն է հավասարակշռության այն դիրքը, որից մասնիկի անվերջ փոքր շեղման դեպքում առաջանում է դեպի հավասարակշռության դիրքն ուղղված ուժ: Այս պայմանին բավարարում են ուժադաշտում պոտենցիալ էներգիայի մինիմումին համապատասխանող կետերը (M կետը նկ. 4.24-ում): Այս դիրքից շեղելիս մարմինը կկատարի տատանումներ:

Անկայուն է կոչվում հավասարակշռության այն դիրքը, որից շեղելիս առաջանում են մասնիկն այդ դիրքից հեռացնող ուժեր: Անկայուն հավասարակշռության դիրքերը պոտենցիալ էներգիայի մաքսիմումի կետերն են (N կետը նկ. 4.24-ում):

Անտարբեր է կոչվում հավասարակշռության այն դիրքը, որից կամայական փոքր շեղման դեպքում մասնիկի հավասարակշռությունը չի խախտվում: Այդ պայմանին բավարարում է K դիրքը նկ. 4.24-ում:

Չոր շփման ուժերի դեպքում վիճակը տարբեր է: Մասնիկը կարող է կանգ առնել կայուն հավասարակշռության դիրքին մոտ կետում և պահվել նրանում դադարի շփման ուժով: Դա կոչվում է *կանգադիր երևույթ*:

§31. ՌԵԼԱՏԻՎԻՍՏԱԿԱՆ ԷՆԵՐԳԻԱ: ԻՄՈՒԼՍԻ, ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ,

ՈՒԺԻ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Կինետիկ էներգիայի թեորեմը ճիշտ է նաև ռելատիվիստական մեխանիկայում: Անհրաժեշտ է միայն փոփոխել մասնիկի կինետիկ էներգիայի

$$K = mv^2/2 \quad (31.1)$$

բանաձևը և ստանալ կինետիկ էներգիայի ռելատիվիստական արտահայ-

տությունը Այդ նպատակով օգտվենք ռելատիվիստական զանգվածի

$$m(v) = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (31.2)$$

բանաձևից: Տեղադրելով այստեղ $v = p/m(v)$ և բարձրացնելով քառակուսի, կստանանք

$$p^2 + m^2 c^2 = m^2(v) c^2: \quad (31.3)$$

Դիֆերենցելով այս արտահայտությունը, հաշվի առնելով, որ m հանգստի զանգվածը հաստատուն մեծություն է, կունենանք.

$$p dp = m(v) c^2 dm(v),$$

որի ծախ մասում $p = m(v)v$ առնչության հաշվառումը կտա

$$v dp = c^2 dm(v): \quad (31.4)$$

Մյուս կողմից, աշխատանքի բանաձևից ունենք.

$$A = \int_1^2 F dr = \int_1^2 \frac{dp}{dt} v dt = \int_1^2 v dp. \quad (31.5)$$

որտեղ օգտվեցինք ռելատիվիստական դինամիկայի հիմնական

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (31.6)$$

հավասարումից և $dr = v dt$, $v dp = v(dp)$, $= v dp$ առնչություններից:

Աշխատանքի համար ստացված (31.5) բանաձևը ճիշտ է ինչպես դասական, այնպես էլ ռելատիվիստական մեխանիկայում: Այն հաշվելու համար անհրաժեշտ է ունենալ արագության և իմպուլսի կապը: Ռելատիվիստական մեխանիկայում (31.5) ինտեգրալում (31.4) բանաձևի հաշվառումը կտա.

$$A = c^2 \int_{m_0}^{m(v)} dm(v) = c^2 \Delta m(v). \quad (31.7)$$

Այստեղ $m(v_1)$ և $m(v_2)$ -ը մասնիկի զանգվածի արժեքներն են սկզբնական և վերջնական վիճակներում Ուրեմն, *ռելատիվիստական մեխանիկայում ուժի կատարած աշխատանքը որոշվում է միայն և միայն մասնիկի ռելատիվիստական զանգվածի աճով*: Եթե մասնիկը շարժումն սկսել է դադարի վիճակից, ապա $m(0) = m_0$, ապա նշանակելով վերջնական արագությունը v , (31.7) աշխատանքի համար կունենանք.

$$A = m(v) c^2 - m_0 c^2 = K(v) - K(0). \quad (31.8)$$

որ, կինետիկ էներգիայի թեորեմն է ռելատիվիստական մեխանիկայում: Զանի որ դադարի վիճակում կինետիկ էներգիան զրո է. $K(0) = 0$, ապա

$$K(v) = [m(v) - m]c^2 = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] \quad (31.9)$$

Սա կինետիկ էներգիայի բանաձևն է ռելատիվիստական մեխանիկայում: Փոքր արագությունների դեպքում շարքի վերածելով (31.9)–ում հայտարարն ըստ $v \ll c$ փոքր մեծության աստիճանների

$$(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} (v^2/c^2) + \dots$$

տեղադրելով (31.9)–ում և արհամարհելով v^2/c^2 –ուց բարձր կարգի անդամները, կստանանք կինետիկ էներգիայի բանաձևի նյուտոնյան (31.1) արտահայտությունը:

Կատարենք նշանակում.

$$E = m(v)c^2, \quad (31.10)$$

և անվանենք այն մասնիկի ռելատիվիստական էներգիա: Այդ դեպքում (31.9) բանաձևից կունենանք

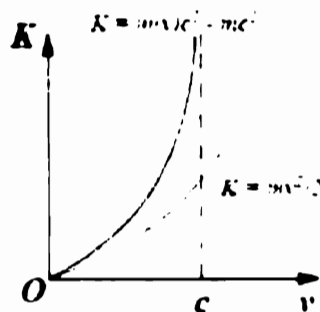
$$E = K(v) + mc^2 = K(v) + E_0, \quad (31.11)$$

որտեղ

$$E_0 = mc^2 \quad (31.12)$$

մեծությունը դադարի վիճակում գտնվող մասնիկի ռելատիվիստական էներգիան է, որը կոչվում է *հանգստի էներգիա*:

Նկ.4.25-ում բերված կորերը արտահայտում են մասնիկի նյուտոնյան և ռելատիվիստական կինետիկ էներգիաների կախվածությունն արագությունից: Ինչպես դասական և ռելատիվիստական մյուս մեծությունները, տարբերությունն իական է լույսին մոտ արագությունների տիրույթում: Նկատենք, որ բոլոր ռելատիվիստական մեծությունները նշված տիրույթում մեծ են նյուտոնյան մեծություններից:



Նկ 4.25

Զանի որ մասնիկի ռելատիվիստական և կինետիկ էներգիաներն իրարից տարբերվում են հաստատուն

մեծությամբ (դադարի էներգիայով), ապա կինետիկ էներգիայի թեորեմը ձևավորվում է նաև ռելատիվիստական էներգիայի համար.

$$A = \Delta K = \Delta E : \quad (31.13)$$

2. Իմպուլսի և էներգիայի ձևափոխությունները: Եթե (31.3) առնչության մեջ հաշվի առնենք հանգստի և ռելատիվիստական էներգիաների (31.12) և (31.10) արտահայտությունները, կստանանք՝

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2, \quad (31.14)$$

որը մասնիկի էներգիայի և իմպուլսի կապն է. Նկատենք, որ

$$E^2 - p^2 c^2 = E_0^2 \quad (31.15)$$

մեծությունը, ինվարիանտ է Լորենցի ձևափոխությունների նկատմամբ. թեև ռելատիվիստական իմպուլսն ու էներգիան փոփոխվում են $K \rightarrow K'$ -ից K' -ին անցնելիս: Ձևափոխության այդ բանաձևերը կարելի է ստանալ օգտվելով արագությունների ձևափոխման բանաձևերից: Օրինակ.

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m(1+uv'_x/c^2)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v'^2/c^2)}} \left(\frac{v'_x + u}{1+v'_x u/c^2} \right) = \\ &= \frac{m(1+uv'_x/c^2)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v'^2/c^2)}} = \frac{p'_x + uE'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}; \end{aligned}$$

Համանման ձևով կստանանք մյուս ձևափոխությունները.

$$p_x = \frac{p'_x + uE'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad E = \frac{E' + up'_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}; \quad (31.16)$$

Նկատենք, որ

$$p_x, p_y, p_z, E/c^2 \quad (31.17)$$

մեծությունները ձևափոխվում են պատահարի x, y, z, t կոորդինատաների ձևափոխության բանաձևերով: Պատահարների միջև ինտերվալի (§17) ինվարիանտությունից հետևում է (31.17) –ով կազմված համապատասխան մեծությունների ինվարիանտությունը.

$$p^2 - E^2/c^2 = p'^2 - E'^2/c^2 = imv, \quad (31.18)$$

որը c^2 հաստատուն արտահղիչի ճշտությամբ համընկնում է (31.15)-ի հետ: Ի դեպ, (31.15) արդյունքը դժվար չէ ստուգել, օգտվելով էներգիայի և իմպուլսի (31.16) ձևափոխություններից:

Բերենք ևս երկու օգտակար առնչություններ.

Ռելատիվիստական էներգիայի և իմպուլսի բանաձևերից հետևում է.

$$p = Ev/c^2. \quad (31.18)$$

իսկ (31.11)-ի հաշվառմամբ, (31.15)-ից ստանում ենք.

$$pc = \sqrt{K(K + 2mc^2)} \quad (31.19)$$

Վերջինս *կինետիկ էներգիայի և իմպուլսի կապն է* ռելատիվիստական մեխանիկայում: Մասնիկի դանդաղ շարժումների դեպքում, երբ $K \ll mc^2$ (31.19)-ը տալիս է կինետիկ էներգիայի և իմպուլսի դասական կապը.

$$p = \sqrt{2mK}. \quad (31.20)$$

հակառակ սահմանում՝ $K \gg mc^2$, (ուլտրառելատիվիստական շարժում).

$$p = K/c. \quad (31.21)$$

3. Ուժի ձևափոխությունը: Նյուտոնյան մեխանիկայում, շնորհիվ տարածության և ժամանակի բացարձակության, ուժը Գալիլեյ-ինվարիանտ մեծություն է: Տարածության և ժամանակի հարաբերականությունը հանգեցնում է նրան, որ *ուժը ձևափոխվում է մի ՀՀ-ից մեկ այլին անցնելիս*.

Ուժի ձևափոխության բանաձևերը կստանանք օգտվելով ռելատիվիստական դինամիկայի

$$dp/dt = F \quad (31.22)$$

հավասարումից և ռելատիվիստական էներգիայի փոփոխման թափն առտահայտող

$$dE/dt = Fv \quad (31.23)$$

հավասարումից, որը ներկայացնում է *կինետիկ էներգիայի թեորեմը*:

Ջանի որ (31.22) և (31.23) հավասարումները ձիշտ են ցանկացած ՀՀ-ում, ապա ուժի ձևափոխման օրենքը կարելի է ստանալ այդ հավասարումների ձախ մասերի ձևափոխություններից: Այդ նպատակով բերված հավասարումներում dt ժամանակից անցնենք սեփական $d\tau$ ժամանակին՝

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt. \quad (31.24)$$

որը, ինչպես գիտենք, ինվարիանտ մեծություն է (§17): F -ի փոխարեն ներմուծելով, այսպես կոչված, *Մինկովսկու ուժը*

$$F_{\mu} = F \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (31.25)$$

(31.22) և (31.23) հավասարումները կներկայացնենք այսպես

$$dp/d\tau = F_v, \quad dE/d\tau = F_v v; \quad (31.26)$$

Զանի որ սեփական ժամանակն ինվարիանտ է, ստացված հավասարումների ծախ մասերը ձևափոխվում են ինչպես պատահարի կոորդինատները: Ուրեմն, նույն կերպ կձևափոխվեն նաև աջ մասերը:

$$F_{u_1}, F_{u_2}, F_{u_3}, F_{u_4} v/c^2 \quad (31.27)$$

Տեղեկության համար ներկայացնենք $K \rightarrow K'$ անցման ուժի ձևափոխության բանաձևը վեկտորական տեսքով.

$$F = \frac{F' \sqrt{1-u^2/c^2} + u[(uF')(1 - \sqrt{1-u^2/c^2}) + (v'F')u^2/c^2]}{1 + uv'/c^2}, \quad (31.28)$$

որտեղ F' -ը K' ՀՀՀ-ում v' արագությամբ շարժվող մասնիկի վրա ազդող ուժն է, իսկ u -ն K' -ի արագությունն է K -ի նկատմամբ:

Եթե K' -ում մասնիկի արագությունը փոքր է ($v'^2 \ll c^2$), ապա նրանում մասնիկի վրա ազդող ուժը պետք է համընկնի նյութոնյան F^0 ուժի հետ: Տեղադրելով (31.28)-ում $v' = 0$ (այդ դեպքում մասնիկը K համակարգում կշարժվի u արագությամբ), կստանանք K' և K համակարգերում *մասնիկի վրա ազդող նյութոնյան և ռելատիվիստական ուժերի միջև կապը*.

$$F = F^0 \sqrt{1-u^2/c^2} + u(uF^0)[1 - \sqrt{1-u^2/c^2}]/c^2; \quad (31.29)$$

Վերածելով այս ուժերը մասնիկի u արագությանը զուգահեռ և ուղղահայաց բաղադրիչների, (31.29)-ի փոխարեն կստանանք.

$$F_{\parallel} = F^0, \quad F_{\perp} = F^0 \sqrt{1-u^2/c^2}; \quad (31.30)$$

Ուրեմն, ունենալով մասնիկի վրա ազդող նյութոնյան ուժը, կարելի է (31.29) կամ (31.30) բանաձևերով որոշել նրա վրա ազդող ռելատիվիստական ուժը կամայական իներցիալ համակարգում:

Օգտվելով (31.23)-ից, ռելատիվիստական դիմամիկայի հիմնական (31.22) հավասարումը կարելի է ներկայացել հարմար տեսքով.

$$F = \frac{d}{dt} m(v)v = m(v) \frac{dv}{dt} + \frac{v}{c^2} \frac{dE}{dt} = m(v)a + v(vF)/c^2;$$

Տեղադրելով վերջինս (31.22) հավասարման մեջ, կստանանք *ռելատիվիստական շարժման հավասարումը հետևյալ տեսքով*.

$$m(v)dv/dt = F - v(vF)/c^2; \quad (31.31)$$

Ինչպես արդեն նշել ենք (§10), ռելատիվիստական մեխանիկայում մասնիկի արագացումը ընդհանուր դեպքում չունի նրա վրա ազդող ուժի ուղղությունը, այդ պատճառով այստեղ մասնիկի շարժումը շատ ավելի

բարդ է, քան նյութափոխան մեխանիկայում: Դա ակնհայտորեն երևում է նաև (31.31) հավասարումից:

4. Ռելատիվիստական համախմբի դինամիկա: Ի տարբերություն նյութափոխան մեխանիկայի, *ռելատիվիստական մեխանիկայում մասնիկի դինամիկայից համախմբի դինամիկային անցումը* անհամեմատ բարդ խնդիր է: Այնուամենայնիվ, տանք ռելատիվիստական համախմբերի դինամիկայի որոշ օրինաչափություններ:

Եթե մեզ հետաքրքրում է համախմբի շարժումը որպես ամբողջություն, ապա վերանայով նրանում ընթացող շարժումներից, համախումբը կարող ենք դիտել որպես լրիվ E էներգիա, P իմպուլս և m հանգստի զանգված ունեցող մարմին և այնպես, որ մասնիկի համար ստացված բոլոր առնչությունները ձիշտ են համախմբի ամբողջական շարժման համար: Մնում է պարզել, թե *ինչ պետք է հասկանալ՝ համախմբի ռելատիվիստական էներգիա իմպուլս և հանգստի զանգված ասելով*: Ընդհանուր դեպքում, երբ համախումբը բաղկացած է փոխազդող ռելատիվիստական մասնիկներից, նրա էներգիան, իմպուլսը, հանգստի զանգվածը կներկայացվեն այսպես.

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2 / c^2}} + E_{\text{int}}, \quad (31.32)$$

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i}{\sqrt{1 - v_i^2 / c^2}} + P_{\text{int}}, \quad (31.33)$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i + \tilde{E}_{\text{int}} / c^2: \quad (31.34)$$

Քննարկենք նախ էներգիայի արտահայտությունը: Այստեղ $m_i(v_i) c^2$ -ն i -րդ մասնիկի ռելատիվիստական էներգիան է (այն չի պարունակում միայն մյուս մասնիկների հետ փոխազդեցության էներգիան), իսկ E_{int} -ը ներկայացնում է համախմբի մասնիկների փոխազդեցության էներգիան:

Նյութափոխան մեխանիկայում E_{int} -ը սեփական պոտենցիալ էներգիան է (տես § 26), որը կախված է տվյալ պահին համախմբի կոնֆիգուրացիայից (մասնիկների բաշխումից): Հեշտ է նկատել, որ սեփական պոտենցիալ էներգիա հասկացության հիմքում ընկած է տարածության և ժամանակի բացառականությունը, այսինքն՝ ակնթառթային փոխազդեցության գաղափարը: Իսկապես, *կախված լինելով տվյալ պահին մասնիկների կոորդինատներից*, նրանցից որևէ մեկի դիրքի փոփոխության դեպքում *համա-*

խմբի սեփական պոտենցիալ էներգիան անմիջապես ընդունում է նոր կոնֆիգուրացիային համապատասխանող արժեքը: Այնինչ հասկանալի է, որ փոխազդեցության տարածման վերջավոր արագության պատճառով համախմբի միուս մասնիկները դիտարկվող տեղաշարժը «կազան» ուշացումով Այդ պատճառով *ռելատիվիստական մասնիկներից բաղկացած համախմբերի համար - սեփական պոտենցիալ էներգիա» հասկացությունը կիրառելի չէ:* Ուրեմն ի՞նչ հասկանալ *ռելատիվիստական մասնիկների փոխազդեցության էներգիա* ասելով:

Համախմբերում փոխազդեցություններն իրականացվում են մատերիական դաշտերով: E_+ -ը հենց այդ դաշտերի էներգիան է: Այն ավելի անառու կարելի է պատկերացնել, ներկայացնելով համապատասխան դաշտերը հատուկ մասնիկների հոսքի տեսքով: Օրինակ, էլեկտրամագնիսական դաշտը կարելի է պատկերել որպես տարբեր էներգիաներ ունեցող վանտների համախումբ: Այդ դեպքում E_+ -ը *ներկայացնում է դաշտը կազմող քվանտների գումար էներգիան:* Նման ձևով *ռելատիվիստական ինպուլսի* (31.33) արտահայտության մեջ P_+ անդամը մասնիկների փոխազդեցությունն իրականացնող *դաշտերի լրիվ իմպուլսն է:* Ինչ վերաբերում հանգստի էներգիայի E_0 -² անդամին, ապա այն այդ *դաշտերի լրիվ զանգվածն է:* *համախմբի իներգիայի կենտրոնի համակարգում:*

Ընդհանուր դեպքում E_+ և P_+ անդամների համար որևէ արտահայտություն գրելն անհնար է: Այդ պատճառով *ռելատիվիստական մասնիկների համախմբի դինամիկան* հնարավոր է լինում կառուցել միայն հանմատաքար պարզ դեպքերում: Դրանցից են չփոխազդող մասնիկների համախումբը և այն պարզ համախմբերը, որոնցում մասնիկների փոխազդեցությունները կրում են կոնտակտային բախումների բնույթ: Նման համախմբերի ուսումնասիրությամբ կգբաղվենք դաժնթացի հետագա պարզաթվերում: Այստեղ նկատենք միայն, որ փոխազդեցության բացակայության շնորհիվ չփոխազդող մասնիկներից կազմված համախմբում

$$E = \sum E_i = K + mc^2; \quad P = \sum P_i. \quad (31.35)$$

որտեղ

$$K = \sum K_i; \quad m = \sum m_i. \quad (31.36)$$

Փակ համախմբի լրիվ էներգիան և իմպուլսը պահպանվում են: Համախմբի էներգիայի պահպանումը համարժեք է նրա *ռելատիվիստական զանգվածի պահպանմանը:*

Դիտարկենք չփոխազդող մասնիկներից բաղկացած փակ համախումբ: Նշանակենք P, E և P', E' նրա լրիվ իմպուլսն ու էներգիան համապատասխանաբար K և K' ՀԻՀ-երում: Նրանց միջև կապը տրվում է ծնափոխության (31.16) բանաձևերով, որտեղ

$$E = \sum E_i; \quad P = \sum P_i: \quad (32.1)$$

Այս համախմբի համար (31.15) -ը նույնպես ինվարիանտ է և միշտ բացասական: Եթե $n = 1$, այդ ինվարիանտը $-m^2 c^2$ է: Բանի որ (31.15) -ը ճիշտ է յուրաքանչյուր մասնիկի համար, ապա $n > 1$ դեպքում (31.15') -ը նույնպես կլինի բացասական:

$$P^2 - E^2 / c^2 = P'^2 - E'^2 / c^2 = - \sum m_i^2 c^2 \quad (32.2)$$

Շեղաբար, միշտ կարելի է ընտրել K' համակարգն այնպես, որ նրանում $P' = 0$: Պարզ է՝ դա համախմբի իներցիալի կենտրոնի համակարգն է, որի համար (32.1)-ից կունենանք (քանի որ $P_1 = P_2 = 0$, ապա x ինդեքսը բաց կբրդնենք).

$$P = \frac{v_i \bar{E}}{c^2 \sqrt{1 - v_i^2 / c^2}}, \quad E = \frac{\bar{E}}{\sqrt{1 - v_i^2 / c^2}}, \quad (32.3)$$

որտեղ $\bar{E} = \sum \bar{E}_i = \sum (\bar{K}_i + m_i c^2)$ համախմբի լրիվ էներգիան է C համակարգում: Օգտվելով (32.3)-ից կստանանք K -ի նկատմամբ C համակարգի արագությունը.

$$v_i = c^2 P / E: \quad (32.4)$$

Բանի որ (32.2) ինվարիանտը բացասական է, ապա $E > cP$: Ուրեմն, *իներցիալի կենտրոնի արագությունը միշտ փոքր է լույսի արագությունից* $v_i < c$:

Որոշենք համախմբի ռելատիվիստական զանգվածը որպես լրիվ իմպուլսի և արագության հարաբերություն.

$$M(v_i) = \frac{P}{v_i} = \frac{\bar{E}}{c^2 \sqrt{1 - v_i^2 / c^2}} = \frac{E}{c^2} = \frac{M}{\sqrt{1 - v_i^2 / c^2}}, \quad (32.5)$$

որտեղ օգտվեցինք (32.3) առնչություններից: Ստացված արտահայտության մեջ *համախմբի հանգստի զանգվածի* դեր կատարում է

$$M = \bar{E} / c^2 = \sum m_i + \bar{K} / c^2 \quad (32.6)$$

մեծությունը, որտեղ m_i -երը մասնիկների հանգստի զանգվածներն են, իսկ

$\tilde{K}$ –ն համախմբի կինետիկ էներգիան է C –ում:

Համախմբի զանգվածի (32.6) արտահայտության հաշվառմամբ նրա լրիվ իմպուլսի և էներգիայի (32.3) բանաձևերը ճշգրիտ համընկնում են նյութական կետի համաձայն բանաձևերի հետ (32.6) –ից հետևում է, որ համախմբի դադարի զանգվածը մասնիկների դադարի զանգվածների գումարից մեծ է $\tilde{K}/c^2$ մեծությամբ: Հետևաբար, համախմբի ներքին կինետիկ էներգիան մեծացնում է նրա իներտ զանգվածը $\tilde{K}/c^2$ չափով:

(32.6)–ի ներմուծմամբ (32.3)–ը համընկնում է նյութական կետի համանման բանաձևի հետ: Ուրեմն C և K համակարգերում լրիվ իմպուլսի և էներգիայի կապի բանաձևերը (32.6)–ի հաշվառմամբ կտան՝

$$P = \frac{\sum m_i + \tilde{K}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v, \quad E = \frac{\sum m_i + \tilde{K}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c^2, \quad (32.7)$$

Քանի որ համախմբը փակ է, և բացակայում են մասնիկների միջև փոխազդեցությունները, ապա (32.7)–ով տրվող մեծությունները կպահպանվեն:

Չփոխազդող մասնիկներից բաղկացած համախմբի ներքին կինետիկ էներգիայի և զանգվածի կապի համար ստացված (32.6) կարևոր արդյունքը կարելի է տարածել էներգիայի բոլոր տեսակների վրա:

Ենթադրենք փոխազդող n մասնիկները կազմում են փակ համախմբ: Ենթադրենք նաև, որ C համակարգում մասնիկների արագությունները շատ փոքր են լույսի արագությունից: Այդ դեպքում համախմբի վարքը C –ում կարող ենք նկարագրել նյուտոնյան մեխանիկայի շրջանակներում: Եթե մասնիկները փոխազդում են կոնսերվատիվ ուժերով, ապա C –ում համախմբի լրիվ մեխանիկական էներգիան կպահպանվի՝

$$\tilde{H} = \tilde{K} + U_i = const, \quad (32.8)$$

թեև լրիվ կինետիկ էներգիան կփոխվի ժամանակի ընթացքում: Եթե C համակարգը K –ի նկատմամբ չարժվում է լույսին մոտ արագությամբ, ապա մասնիկների լրիվ իմպուլսը K –ում կտրվի նույն (32.7) բանաձևով՝

$$P_i = \frac{\sum m_i + \tilde{K}/c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} v_i, \quad P_i = P_j = 0, \quad (32.9)$$

որը, սակայն, ժամանակի ընթացքում կարող է փոփոխվել $\tilde{K}$ –ի փոփոխման պատճառով: Սա չի հակասում համախմբի լրիվ իմպուլսի պահպանման օրենքին, քանի որ մասնիկների գումարային (32.9) իմպուլսը դեռևս համախմբի լրիվ իմպուլսը չէ K –ում: Այստեղ պետք է հաշվի առնել այն, որ

համախմբի U , պոտենցիալ էներգիային համապատասխանում է U/c^2 դադարի զանգված։ Այդ պատճառով $K < H$ -ում համախմբի լրիվ իմպուլսը կարող ենք ներկայացնել այսպես.

$$P_x = P_x' + \frac{v_x U_x / c^2}{\sqrt{1 - v_x^2 / c^2}} = \frac{\Sigma m + \tilde{H} / c^2}{\sqrt{1 - v_x^2 / c^2}} v_x, \quad P_y = P_y' = 0, \quad (32.10)$$

որը, ի տարբերություն (32.9)-ի, կապահանձվի ժամանակի ընթացքում չփոխվի, դիտարկվող համախմբի լրիվ իմպուլսը կլինի.

$$P = \frac{M\tilde{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad M = \Sigma m + \tilde{H} / c^2: \quad (32.11)$$

Այս բանաձևերը մեծ կիրառություն ունեն միջուկային ֆիզիկայում, քանի որ միջուկները բնութագրվում են U , -ի բավականաչափ մեծ արժեքներով ($U < 0$)

Միջուկի բաղկացուցիչ մասերի (նեյտրոնների, պրոտոնների) գումար հանգստի զանգվածի և միջուկի հանգստի զանգվածի տարբերությունը.

$$\Delta m = \Sigma m_i - M = \tilde{H} / c^2, \quad (32.13)$$

կոչվում է *զանգվածի դեֆեկտ* և բնութագրում է *միջուկի կապի էներգիան* (միջուկը քայքայելու համար անհրաժեշտ նվազագույն աշխատանքը).

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = -\tilde{H}: \quad (32.14)$$

Միջուկի կապի էներգիայի և զանգվածի դեֆեկտի միջև այս առնչությունը, որը զանգվածի և էներգիայի (31.10) ընդհանուր կապի մասնավոր արտահայտությունն է, հաստատվել է միջուկային վերափոխումների ուսումնասիրության բազմաթիվ փորձերում:

էներգիայի և զանգվածի համարժեքությունը ներկայացնող $E = m(v)c^2$ բանաձևը ռելատիվիստական մեխանիկայի ամենանշանավոր արդյունքներից է։ Այն ցույց է տալիս, որ *էներգիան անբաժանելի է զանգվածից և հակառակը՝ Ցանկացած ΔE չափով էներգիայի հաղորդումը, անկախ հաղորդման եղանակից, մեծացնում է համախմբի իներտ զանգվածը*

$$\Delta m = \Delta E / c^2 \quad (32.15)$$

յափով՝ Մասնավորապես, զսպանակը դեֆորմացված վիճակում բնութագրվում է ավելի մեծ իներտ զանգվածով, քան չդեֆորմացված վիճակում։ Շնորհիվ այդ տարբերությունը հավասար է U/c^2 , որտեղ U -ն դեֆորմացված զսպանակի առաձգականության էներգիան է։

§33. ՖՈՏՈՆ: ԴՈՂԱԵՐԻ ԷՖԵԿՏԸ ՕՊՏԻԿԱՑՈՒՄ

1. *Դադադրի զանգվածից զուրկ մասնիկներ:* Ռելատիվիստական ֆիզիկական բացատրում է *դադադրի զանգվածից զուրկ* մասնիկների գոյությունը: Ռելատիվիստական իմպուլսի և էներգիայի բանաձևերից հետևում է: որ $m=0$ մասնիկը կարող է ունենալ զրոյից տարբեր ռելատիվիստական իմպուլս, էներգիա և հետևաբար, զանգված միայն այն դեպքում, եթե այն *շարժվում է լույսի c արագությամբ*

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}: \quad (33.1)$$

Այդ դեպքում (33.1) բանաձևերը զանգվածի, էներգիայի և իմպուլսի համար տալիս են $0/0$ տիպի անորոշություններ, որոնք և ապահովում են այդ մասնիկների ֆիզիկական մեծությունների վերջավոր արժեքները, Այս մասնիկների էներգիայի և իմպուլսի կապը տրվում է

$$E = pc \quad (33.2)$$

բանաձևով, որն ստացվում է (31.14)–ում $m = 0$ տեղադրելով:

Ուրեմն, *հանգստի զանգվածից զուրկ մասնիկները կարող են գոյություն ունենալ միայն վակուումում լույսի արագությամբ շարժման վիճակում՝ Նրանց կանգառը համարժեք է նրանց կլանվելուն, վերանալուն:*

Ժամանակակից ֆիզիկական գործ ունի այդպիսի երկու մասնիկների հետ: Դրանք են *ֆոտոնը և նեյտրինոն*: v հաճախությամբ բնութագրվող ֆոտոնն ունի

$$E = h\nu \quad (33.3)$$

էներգիա, համաձայն (33.2) բանաձևի՝

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (33.4)$$

իմպուլս, իսկ $E = mc^2$ բանաձևի օգնությամբ կորոշենք ֆոտոնի զանգվածը

$$m = \frac{h\nu}{c^2}: \quad (33.5)$$

Կլանվելով ատոմի կողմից, ֆոտոնը նրան հաղորդում է իր իմպուլսն ու էներգիան և ընդհակառակը՝ առաքելով ֆոտոն, ատոմը կորցնում է: (33.4) իմպուլս՝ ֆոտոնի առաքման ուղղությամբ, (33.3) էներգիա, և նրա

հետ կապված (33.5) զանգված

2. **Ֆոտոնային գազի ճնշումը:** Հաշվենք կոդի (երկարությամբ խորանարդային արկղում լեկտրամագնիսական ճառագայթման դաշտի ճնշումը. եթե միավոր ժապավում ճառագայթման էներգիան հավասար է U ճառագայթման դաշտը չներկայացնենք որպես քառասյին շարժվող մեծ թվով ֆոտոններից բաղկացած «գազ» (ֆոտոնային գազ)՝ Յուրաքանչյուր ֆոտոն օժտված է E էներգիայով. իսկ խորանարդի նիստից անդրադառնալիս (կլանվում է և նորից ճառագայթվում հսկայական ուղղությամբ) նրան հաղորդում է $\Delta p_i = 2Ec$ իմպուլս: Որևէ նիստի վրա ֆոտոնային գազի ճնշումը միավոր ժամանակում նիստի միավոր մակերեսին հաղորդված իմպուլսն է՝ Շարժման քառասյունության պատճառով ցանկացած պահին դեպի յուրաքանչյուր նիստ կշարժվեն հավասար քանակով ֆոտոններ. այսինքն՝ $N/6$ հատ ֆոտոն, որոնք միավոր ժամանակում տվյալ պատի հետ կբախվեն ($N/6$) (c/t) անգամ՝ Ուրեմն միավոր ժամանակում յուրաքանչյուր նիստին հաղորդված իմպուլսը. այսինքն՝ ֆոտոնային գազի կողմից ազդող ուժը. կլինի՝

$$F = (N/6)(c/t)\Delta p_i = NE/3t,$$

իսկ ճնշումը

$$P = F/t^2 = NE/3t^3 = nE/3 = U/3, \quad (33.6)$$

որտեղ ներմուծված է ֆոտոնային գազի խտությունը՝ $n = N/t^3$ և հաշվի է առնվում որ $L = nE$ Ուրեմն, ֆոտոնային գազի ճնշումը հավասար է ճառագայթման դաշտի էներգիայի խտության մեկ երրորդին:

Արեգակը մեկ վայրկյանում Երկրի մակերևույթի միավոր մակերեսին հաղորդում է շուրջ 10^8 էրգում/վ ճառագայթային էներգիա (Արեգակնային հաստատուն): Կանգնելով, այդ ճառագայթումն առաջացնում է 10^8 Կ դինում = $3 \cdot 10^3$ դինում ճնշում (անդրադառնալիս ճնշումը կլինի երկու անգամ մեծ): Սա փոքր ճնշում է. որը Երկրի ուղեծրային շարժման վրա գործնականում չի ազդում: Սակայն գիտատղի չափազանց նոսր պոչի վրա. որի միավոր զանգվածին համապատասխանող (այնական հատվածի մակերեսը շատ մեծ է. Արեգակի ճառագայթային ճնշումը էական է և արեգակնային քամու (Արեգակից առաքվող մասնիկների հոսք) հետ միասին որոշում է գիտատղի ծզված տեսքը:

3. Ուլտրառեչադիֆուստական մասնիկներ:

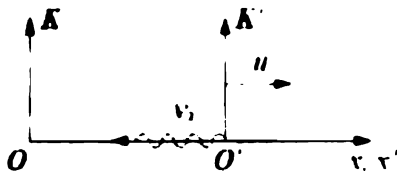
Մասնիկի էներգիայի և իմպուլսի

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 \quad (33.7)$$

ապում E_0 , հանգստի էներգիան անփոփոխ է. իսկ $p^2 c^2$ անդամը անսահմանորեն աճում է մասնիկի արագությունը (ուլյի արագությանը մոտենալիս): Հետևաբար, միշտ կարելի է ցույց տալ արագությունների այնպիսի տի-

րույթ, որում $p \cdot c \gg E_m$ և (33.7)-ի աջ մասում հանգստի էներգիան կարելի անտեսել: Արագությունների նման արժեքները կոչվում են *ուլտրառելատիվիստական*, որոնցով շարժվող մասնիկի էներգիայի և իմպուլսի կապը համանման է ֆոտոնի համար գործող (33.2) կապին: Սակայն սա չի նշանակում, թե ուլտրառելատիվիստական մասնիկները ցուցաբերում են ֆոտոնին հատուկ վարք: Օրինակ, միշտ կարելի է ընտրել $u < c$ արագությամբ շարժվող ՀԻՀ, որում ուլտրառելատիվիստական մասնիկը կգտնվի դադարի վիճակում: Բայց դա անհնար է կատարել ֆոտոնի համար, քանի որ ՀՀ կարելի է կապել միայն հանգստի զանգված ունեցող մարմնի հետ որը չի կարող շարժվել լույսի արագությամբ:

4. Դոպլերի էֆեկտը օպտիկայում: Այն, որ բոլոր ՀՀ-երում ֆոտոնը շարժվում է միևնույն c արագությամբ, իհարկե, չի նշանակում, թե բոլոր ՀՀ-երում ֆոտոնն ունի միևնույն զանգվածը, էներգիան և իմպուլսը: Վերջիններն անկախ են ֆոտոնի շարժման արագությունից և փոխվում են մի հաշվարկի համակարգից մյուսին անցնելիս: Ֆոտոնի հաճախության փոփոխման շնորհիվ (Դոպլերի էֆեկտ) Դոպլեր Կ' համակարգում անշարժ ա-



Նկ. 4.2

տոմն առաքում է ν_0 հաճախության ֆոտոն (Նկ. 4.26), որի E' էլեկտրական դաշտի տատանումներն ունեն ռետկալ տեսքը.

$$E' = E_0' \sin 2\pi\nu_0(t' + x'/c) \quad (33.8)$$

Համաձայն հարաբերականության սկզբունքի, K ՀԻՀ-ում ֆոտոնի էլեկտրական դաշտի տատանումները կարտահայտվեն նույն բանաձևով.

$$E = E_0 \sin 2\pi\nu(t + x/c), \quad (33.9)$$

որտեղ ν -ն K-ում գրանցված ֆոտոնի հաճախությունն է: Անտեսելով տարածման ընթացքում ֆոտոնի էներգիայի կորուստները, առաքման և ընդունման պահերին էլեկտրական դաշտի տատանման լայնությունների համար կարող ենք գրել. $E_0 = E_0'$:

Հավասարեցնելով նաև (33.8), (33.9) ալիքների փուլերը և օգտվելով Լորենցի ձևափոխություններից, կստանանք ν և ν_0 հաճախությունների միջև կապը.

$$\nu\left(1 + \frac{x}{c}\right) = \nu_0\left(t' + \frac{x'}{c}\right) = \nu_0\left(t + \frac{x}{c}\right)\left(1 - \frac{u}{c}\right) / \sqrt{1 - u^2/c^2},$$

որտեղից կստանանք

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}} \approx v_0 (1 - u/c), \quad (33.10)$$

որտեղ հավասարության երկրորդ մասում շարքի վերածելով արմատը շատ u/c մեծության աստիճանների, սահմանափակվեցինք գծային մոտավորությամբ։ Ստացված (33.10) բանաձևն արտահայտում է *Պոլլերի երկայնական էֆեկտը* օպտիկայում, որից պարզ երևում է, որ հեռացող լույսի աղբյուրից ($u > 0$) ընդունում ենք նրա առաքածից ավելի փոքր հաճախության լույս ($\nu < \nu_0$ - *կարմիր շեղում*)։ Սուտեցող լույսի աղբյուրից ստացվող լույսը ($u < 0$) ունի ավելի մեծ հաճախություն, քան այն առաքվել է աղբյուրի կողմից ($\nu > \nu_0$ - *մանուշակագույն շեղում*)։

Եթե լույսի աղբյուրը շարժվում է տեսագծին ուղղահայաց (նկ. 4.27), ապա դիտվում է *Պոլլերի լայնական էֆեկտը*, որը ժամանակի դանդաղման ժելատինիստական էֆեկտի արտահայտությունն է լուսային ալիքի պարբերության համար։ Իրոք, համաձայն այդ էֆեկտի՝

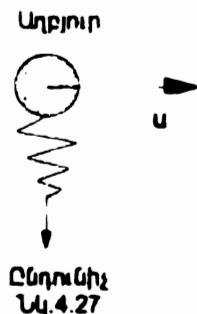
$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2},$$

որտեղ τ և τ_0 -ն ընդունված և առաքված լույսի ալիքների պարբերություններն են։ Ալիքի $\nu = 1/\tau$ հաճախության համար կունենանք՝

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} : \quad (33.11)$$

Ուրեմն, *Պոլլերի լայնական էֆեկտում ընդունված ալիքի հաճախությունը միշտ փոքր է առաքված ալիքի հաճախությունից*։

Ֆոտոնի հաճախության (33.10) և (33.11) փոփոխությամբ էլ հենց պայմանավորված է նրա էներգիայի և իմպուլսի ձևափոխությունը։



ԻՄՊՈՒԼՍԻ ՄՈՄԵՆՏԻ ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔԸ:

§34. ՄՈՄԵՆՏՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ: ԻՄՊՈՒԼՍԻ ՄՈՄԵՆՏԻ ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔԸ

1. Իմպուլսի և ուժի մոմենտներ: Համարմքի մեխանիկական վիճակ բնութագրող մեկ այլ կարևոր մեծություն է *իմպուլսի մոմենտ* վեկտորը՝ մասնիկի իմպուլսի մոմենտը O կետի նկատմամբ սահմանվում է այսպես.

$$L = [rp] = m[rv]. \quad (34.1)$$

որտեղ r -ը մասնիկի դիրքը բնութագրող շառավիղ-վեկտորն է O կետի նկատմամբ, p ն իմպուլսը (նկ 5.1)՝ սահմանված L վեկտորն ուղղահայաց է r , p վեկտորներին և նրանց հետ կազմում է այդ եռյան նույն մեծությունը հապասար է

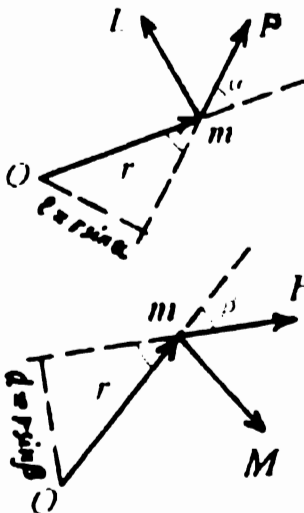
$$L = pr \sin \alpha \equiv p^{\perp} r,$$

որտեղ r -ը իմպուլսի ուղղության վրա C կետից իջեցրած ուղղահայացի երկարությունն է և կոչվում է *իմպուլսի բազուկ*։

Ածանցենք իմպուլսի մոմենտն ըստ ժամանակի.

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{dr}{dt} p - r \frac{dp}{dt} \right]. \quad (34.2)$$

Այդ մասում առաջին գումարելին, որպես զուգահեռ վեկտորների վեկտորական արտադրյալ, նույնաբար զրո է $[rv] = m[rv] = 0$ Եթե O կետն իներցիալ հաշվարկի համակարգում անշարժ է, ապա նրա նկատմամբ մասնիկի իմպուլսի ածանցյալն ըստ ժամանակի հավասար է մասնիկի վրա ազդող համապարփակ ուժին՝ Այնպես



Նկ 5.1

$$\mathbf{F}'' = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,i} \quad (k \neq i) \quad (34.8)$$

Հաշվի առնելով (34.8)-ը, առանձին մասնիկների համար (34.7) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$\begin{aligned} d\mathbf{L}_1/dt &= [\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_{1,2}] + [\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_{1,3}] + \dots + [\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_{1,n}]; \\ d\mathbf{L}_2/dt &= [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_{2,1}] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_{2,3}] + \dots + [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_{2,n}]; \\ &\dots\dots\dots \\ d\mathbf{L}_n/dt &= [\mathbf{r}_n \mathbf{F}_{n,1}] + [\mathbf{r}_n \mathbf{F}_{n,2}] + \dots + [\mathbf{r}_n \mathbf{F}_{n,n-1}]; \end{aligned} \quad (34.9)$$

Համախմբի լրիվ իմպուլսի մոմենտը սահմանվում է որպես համախմբը կազմող մասնիկների Օ կետի նկատմամբ իմպուլսի մոմենտների վեկտորական գումար՝

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i \quad (34.10)$$

Մեր նպատակն է ստանալ համախմբի լրիվ իմպուլսի մոմենտի ժամանակային փոփոխությունը նկարագրող հավասարումը։ Որա համար ըստ ժամանակի ածանցենք (34.10) լրիվ իմպուլսի մոմենտի վեկտորը՝ հաշվի առնենք (34.9) հավասարումները.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \frac{d\mathbf{L}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} + \dots + \frac{d\mathbf{L}_n}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{i,j}] = \sum_{j=1}^n [\mathbf{r}_j \mathbf{F}_{j,1}] = \\ &= ([\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_{1,2}] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_{2,1}] + \dots + [\mathbf{r}_n \mathbf{F}_{n,1}]) + \\ &+ ([\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_{2,3}] + [\mathbf{r}_3 \mathbf{F}_{3,2}] + \dots + [\mathbf{r}_n \mathbf{F}_{n,2}]) + \dots + \\ &\dots + [\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_{1,n}] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_{2,n}] + \dots + [\mathbf{r}_n \mathbf{F}_{n,n-1}]; \end{aligned} \quad (34.11)$$

Ստացված արտահայտության երրորդ և չորրորդ տողերում առանձնացված են մասնիկների զույգ առ զույգ փոխազդեցության ուժերի մոմենտները։ Հաշվի առնելով Նյուտոնի 3-րդ օրենքը

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}, \quad (34.12)$$

և ենթադրելով, որ մասնիկները փոխազդում են կենտրոնական ուժերով,

$$\mathbf{F}_i = f(r_i) \hat{\mathbf{r}}_i \quad (34.13)$$

որտեղ $\mathbf{r}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ -ն i -րդ և k -րդ մասնիկների հարաբերական դիրքը բնութագրող շառավիղ-վեկտորն է. (34.11)-ում երրորդ և չորրորդ տողերում փափագների արտահայտությունները, որոնք ներկայացնում են ներքին ուժերի գումար մոմենտը (*ներքին ուժերի մոմենտի գլխավոր վեկտոր*), կոառնան նույնաբար զրո հսկայաբն. յուրաքանչյուր փակագիծ ներկայացնում է այսպիսի արտահայտություն

$$[\mathbf{r} \mathbf{F}_i] + [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_i = f(r_i) [\mathbf{r}_i \hat{\mathbf{r}}_i] \equiv 0.$$

որտեղ օգտվեցինք (34.12) և (34.13) -րդ

Ուրեմն *ներքին ուժերը չեն կարող փոփոխել համախմբի լրիվ իմպուլսի մոմենտը*։ Այնպես որ Օ կետի նկատմամբ *համախմբի լրիվ իմպուլսի մոմենտի ածանցյալն ըստ ժամանակի հավասար է նույն կետի նկատմամբ արտաքին ուժերի գումար մոմենտին*։

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum [\mathbf{r} \mathbf{F}] \equiv \mathbf{M} : \quad (34.14)$$

Սա մոմենտների հավասարումն է մեխանիկական համախմբի համար։ Համաձայն որի համախմբի լրիվ իմպուլսի մոմենտը կարող է փոփոխվել միայն և միայն արտաքին ուժերի մոմենտի ազդեցությամբ։ Ընդ որում, ժամանակում համախմբի իմպուլսի մոմենտի աճը հավասար է՝

$$\Delta \mathbf{L} = \int_0^t \mathbf{M} \cdot dt : \quad (34.15)$$

3. Համախմբի իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքը։ Մոմենտների (34.14) հավասարումը տալիս է համախմբի իմպուլսի մոմենտի պահպանման ապամանները։

Եթե արտաքին ուժերի մոմենտը Օ կետի նկատմամբ զրո է, ապա այդ կետի նկատմամբ համախմբի լրիվ իմպուլսի մոմենտը կպահպանվի

$$\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r} \hat{\mathbf{p}}] = \text{const. եթե } \mathbf{M} = 0 \quad (34.16)$$

Կերբինս կարող է իրականանալ իետկյալ կարևոր դեպքերում.

- եթե մեխանիկական համախմբը փակ է, $\mathbf{F}_i^e = 0$, $\mathbf{M}^e = 0$ ։ Այս դեպքում իմպուլսի մոմենտը պահպանվում է ՀԻՀ-ի կամայական անշարժ կետի նկատմամբ։



կ 5.3

-երբ համախումբը գտնվում է կենտրոնահամաչափ ուժաղաշտում Այդ դեպքում ուժային O կենտրոնի նկատմամբ զրո է յուրաքանչյուր մասնիկի վրա ազդող արտաքին ուժի մոմենտը (նկ.5.3). $M = 0$, քանի որ կենտրոնահամաչափ ուժաղաշտի ուժ մար $F = f(r)\vec{r}$. Այդպիսին է մոլորակային համակարգի վիճակը Արեգակի ձգողությամբ դաշտում

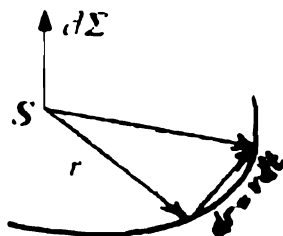
Նկատենք, որ կենտրոնահամաչափ ուժաղաշտում համախմբի լրիվ իմպուլսի մոմենտը պահպանվում է ուժաղաշտի O կենտրոնի նկատմամբ Կամայական այլ կետի նկատմամբ այլ պահպանվի.

Թեև O կետի նկատմամբ զրո է յուրաքանչյուր մասնիկի վրա ազդող արտաքին ուժի մոմենտը, սակայն առանձին մասնիկների իմպուլսի մոմենտները չեն պահպանվում, քանի որ նրանցից յուրաքանչյուրի վրա ազդող ներքին ուժերի մոմենտը տարբեր է զրոյից: Մասնավոր դեպքում, երբ մասնիկների միջև փոխազդեցությունները բացակայում են, համախմբ յուրաքանչյուր մասնիկի իմպուլսի մոմենտը կպահպանվի ուժաղաշտի O կենտրոնի նկատմամբ Օրինակ, առանձին մոլորակի շարժումն ուսումնասիրելիս երբեմն կարելի է անտեսել այլ մոլորակների կողմից նրա վրա ազդող ուժերն ու Արեգակի նկատմամբ նրա իմպուլսի մոմենտը համարել անփոփոխ: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր մոլորակի շարժման համար ձիշ է այսպես կոչված՝ մակերեսների օրենքը.

4. **Մակերեսների օրենքը:** Դիցուք Արեգակի նկատմամբ մոլորակ դիրքը տրվում է r շառավղի-վեկտորով (նկ.5.4) Տարրական dr ժամանակում մոլորակը կկատարի $d\varphi$ տեղափոխություն, որի ընթացքում շառավղի-վեկտորը կգծի տարրական սեկտոր: Եռանյուն φ նշանակալի մակերեսը կառելի է ներառյալցնել հետևյալ վեկտորով

$$d\Sigma = \frac{1}{2} [r\varphi] dr, \quad (34.17)$$

որն ուղղված է սեկտորի մակերեսային ռեզահայաց, իսկ մեծությամբ հավասար է եռանյունի մակերեսին: Միավոր ժամանակում շ-



կ 5.4

շակիղ-վեկտորի գծած մակերևույթի մակերեսը կոչվում է *սեկտորային արագություն*

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}| = \frac{L}{2m} \quad (34.18)$$

Այստեղ հաշվի առանք, որ Արեգակի նկատմամբ մոլորակի իմպուլսի յոմենտը տրվում է $L = m|\mathbf{r}|$ բանաձևով, որտեղ m -ը մոլորակի զանգվածն է Ուրեմն, մոլորակի իմպուլսի մոմենտը համեմատական է նրա սեկտորային արագությանը

$$L = 2m\dot{\Sigma} = \text{const} \quad (34.19)$$

Եթե ուժաղաշտում մասնիկի իմպուլսի մոմենտը պահպանվում է, ապա մասնիկը շարժվի հաստատուն սեկտորային արագությամբ:

Այստեղից կարելի է կատարել երկու հետևություն *կենտրոնահամաչափ ուժաղաշտում մասնիկը՝*

- շարժվում է *հարթ կորով* (հետագիծն ընկած է ուժային կենտրոնով և մասնիկի սկզբնական արագությամբ անցնող հարթության մեջ);
- *նրա շառավիղ-վեկտորը հավասար ժամանակներում գծում է հավասար մակերեսներ*

Այս հետևանքներն էլ հենց կոչվում են *մակերեսների օրենք*, որը իմպուլսի յոմենտի պահպանման օրենքի արտահայտությունն է կենտրոնահամաչափ ուժաղաշտում ձիշտ է նաև հակառակ պնդումը. *Եթե տեղի ունի (34.19) -ը, ապա մասնիկը շարժվում է կենտրոնահամաչափ ուժաղաշտում:*

5. Իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքի համընդհանուր բնույթ:

Իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքն ստանալիս օգտվեցինք Նյուտոնի օրենքներից և ենթադրեցինք, որ համախմբում գործում են կենտրոնական ուժեր Արդյոք ձիշտ է իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքը այն համախմբերում, որոնք չեն ենթարկվում նյութոսնյան մեխանիկայի օրենքներին Փոփոք ցույց է տալիս, որ բոլոր փակ համախմբերի համար իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքը գործում է, միայն պետք է հաշվի առնել նաև միկրոմասնիկների սեփական իմպուլսի մոմենտները (այսպես կոչված *սպինը*), ինչպես նաև ուժաղաշտերի իմպուլսի մոմենտները Այսպես ձևակերպված *իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքը պետք է դիտել որպես բնության հիմնարար օրենք, որը հանդիսանում է փորձնական փաստերի ընդհանրացման արդյունք*

§35. ՍԵՓԱԿԱՆ ԻՄՊՈՒԼՍԻ ՄՈՄԵՆՏ

1. Իմպուլսի մոմենտ վեկտորը կախված է այն կետի ընտրությունից որի նկատմամբ այն հաշվվում է։ Ընտրված O կետի նկատմամբ ունենք

$$L = \sum [rp] \quad (35.1)$$

Այդ կետից r_0 -ով հեռացված անշարժ O' կետի նկատմամբ համախմբի լրիվ իմպուլսի մոմենտը կլինի

$$L' = \sum [r'p] \quad (35.2)$$

Թանի որ (նկ. 5.5)

$$r = r_0 + r' \quad (35.3)$$

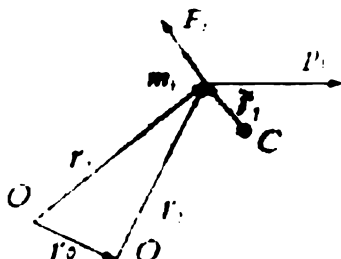
ապա L և L' վեկտորների կապի համար կստանանք

$$L = \sum [rp] = \sum [r'p] + [r_0 \sum p] = L' + [r_0 P]:$$

Այս բանաձևից հետևում է, որ լրիվ իմպուլսի մոմենտը կախված չէ սկզբնականի դիրքից, եթե ընտրված հիմնական լրիվ իմպուլսը գրո է

$$L = L', \text{ եթե } P = \sum p_i = 0: \quad (35.4)$$

Այդ հատկությամբ օժտված է հաշվարկի C համակարգը



Նկ 5.5

Ուրեմն, հաշվարկի C համակարգում համախմբի իմպուլսի մոմենտը անկախ է սկզբնականի ընտրությունից և ներկայացնում է համախմբի իմպուլսի մոմենտի բնութագրական առժեքը։ Այն կոչվում է համախմբի սեփական իմպուլսի մոմենտ։

Ստանանք հաշվարկի A և C համակարգերում համախմբի իմպուլսի մոմենտների կապը։ Ըստ սահման

ման

$$L = \sum m_i [rv], \quad L' = \sum m_i [\tilde{r}\tilde{v}] \quad (35.5)$$

Թանի որ $r = \tilde{r} + \tilde{r}_0$, $v = \tilde{v} + \tilde{v}_0$, ապա

$$L = \sum m_i [(\tilde{r} + \tilde{r}_0)(\tilde{v} + \tilde{v}_0)] =$$

$$= \sum m [\vec{r} \cdot \vec{v}] = \sum m \vec{r} \times \vec{v} \cdot \vec{r} + \sum m_i \vec{v} \cdot \sum m [\vec{r}, \vec{v}] :$$

Ստացված արտահայտության երկրորդ և երրորդ գումարելիները չնրոհիվ հաշվարկի C համակարգի (21.6) հատկությունների նույնաբար գրո են. Հետևաբար, լաբորատոր համակարգում իմպուլսի մոմենտը կապված է համախմբի սեփական իմպուլսի մոմենտի հետ հետևյալ առնչությամբ

$$L = L_0 + [r, P], \quad (35.6)$$

որտեղ P — m_0 — համախմբի լրիվ իմպուլսն է A համակարգում:

Լաբորատոր հաշվարկի համակարգում համախմբի լրիվ իմպուլսի մոմենտը հավասար է սեփական իմպուլսի մոմենտին, ավելացրած համախմբի ամբողջական շարժման $[r, P]$ իմպուլսի մոմենտը

2 Ուժի մոմենտը նույնպես կախված է սկզբնական ընտրությունից Չրինակ. O և O' կետերի նկատմամբ ուժի մոմենտները կապված են հետևյալ կերպ (նկ.5.5).

$$M = \sum [r, F] = \sum [r', + r_0] \times F = \sum [r', F] + r_0 \times \sum F,$$

կամ

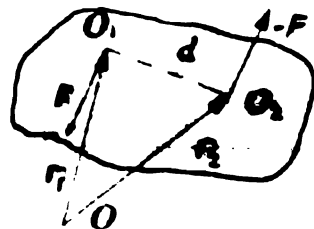
$$M = M' + r_0 \times \sum F$$

Ստացվածից անմիջապես հետևում է, որ ուժի մոմենտն անկախ կլինի սկզբնական ընտրությունից, եթե համախմբի վրա ազդող ուժերը լինեն համակշռված.

$$M = M', \text{ եթե } \sum F = 0: \quad (35.7)$$

Մասնավորապես, դա տեղի ունի, երբ համախմբի վրա ազդում է ուժագույգ (նկ. 5.6) Հեշտ է համոզվել, որ ուժագույգի մոմենտը նկարում շերված O, O', O'' կետերից յուրաքանչյուրի նկատմամբ ունի միանույն նկարի հարթությանն ուղղահայաց, դեպի մեզ ուղղված ուղղությունն ու $M = F \cdot d$ մեծությունը, որտեղ d -ն ուժերի ազդման գծերի միջև հեռավորությունն է (ուժագույգի բազուկ):

Եթե համախմբի վրա ազդող արտաքին ուժերի համագործը գրո է, ապա համախմբի իներցիայի կենտրոնը շարժվում է



Նկ 5.6

ուղղագիծ և հավասարաչափ՝ Այդ դեպքում նրա ինտեգրալի կենտրոն հետ կապված հաշվարկի C համակարգը կլինի ինտեգրալ և նրանում չմենտների հավասարումը կընդունի

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (35.7)$$

տեսքը, որտեղ L - ն համախմբի սեփական իմպուլսի մոմենտն է, իսկ M - ինտեգրալի կենտրոնի նկատմամբ արտաքին ուժերի գումար մոմենտը Հետագայում, ոչ ինտեգրալ հաշվարկի համակարգեղում շարժումներ ուսումնասիրության ժամանակ կտեսնենք, որ (35.8) մոմենտների հավասարումը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ արտաքին ուժերը միմյանց չեն հավասարում, այսինքն, երբ հաշվարկի C համակարգը ոչ ինտեգրալ է (§55)

§36. Ուժի ԵՎ ԻՄՊՈՒԼՍԻ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐԸ ԱՌԱՅՔԻ ՆԿԱՏԱՄԱՐՔՆԵՐԻ շԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ ԵՄԹՎՈՂ ՄԿԱՐԱԿԵՏԻ ՆԿԱՏԱՄԱՐՔ

1. Առանցքի նկատմամբ ուժի և իմպուլսի մոմենտները: Անհրաժեշտ տարբերել կետի նկատմամբ որոշված ուժի և իմպուլսի մոմենտները առանցքի նկատմամբ ուժի և իմպուլսի մոմենտներից, Կետի նկատմամբ մոմենտը վեկտոր է, իսկ առանցքի նկատմամբ մոմենտը կետի նկատմամբ մոմենտի պրոյեկցիան է այդ կետով անցնող առանցքի վրա

Մոմենտների (34.14) հավասարումը պրոյեկտելով O կետով անցնող ուղղանկյուն կոորդինատային առանցքների վրա, կստանանք երեք մասլար հավասարումներ.

$$L_k = M_k \quad (k = x, y, z) \quad (36.1)$$

Այստեղ L_k , M_k մեծությունները կոչվում են **իմպուլսի և ուժի մոմենտներ** k առանցքի նկատմամբ Մասնավորապես.

$$\frac{dL_j}{dt} = M_j, \quad (36.2)$$

հավասարումը կոչվում է **անշարժ Z առանցքի նկատմամբ մոմենտների հավասարում** Այստեղից հետևում է, որ **եթե որևէ առանցքի նկատմամբ արտաքին ուժերի գումար մոմենտը հավասար է զրոյի, ապա համապատասխան առանցքի նկատմամբ իմպուլսի մոմենտը պահպանվում է** Այս իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքն է անշարժ առանցքի նկատմամբ.

$$L_z = \text{const, եթե } M_z = 0: \quad (36.3)$$

Առանցքի նկատմամբ ուժի մոմենտի յաջափակյալ իմաստը պարզելու համար ներկայացնենք r և F վեկտորները Z առանցքին զուգահեռ և ուղղահայաց բաղադրյալների գումարի տեսքով (նկ.5.7)

$$r = r_{\parallel} + r_{\perp}, \quad F = F_{\parallel} + F_{\perp} + F_{\perp\perp}$$

Հաշվի առնելով այս ներկայացումները O կետի նկատմամբ ուժի մոմենտը յուրյնի հետևյալ տեսքը.

$$M = [r_{\parallel} F_{\perp}] + [r_{\perp} F_{\parallel}] + [r_{\parallel} F_{\perp\perp}] + [r_{\perp} F_{\parallel}] + [r_{\perp} F_{\perp\perp}] + [r_{\parallel} F_{\perp\perp}].$$

Ջե կողմի չորրորդ և հինգերորդ անդամները, որպես զուգահեռ վեկտորների վեկտորական արտադրյալներ՝ նույնաբար զրո են, իսկ երկրորդ, տրորդ և վերջին զուգարելիներն ուղղահայաց են Z առանցքին, հետևաբար զրո են այդ առանցքի վրա նրանց պրոյեկցիաները: Ուրեմն, Z առանցքի վրա ուժի մոմենտի պրոյեկցիան կորոշվի

$$M_z = [r_{\perp} F_{\perp}] \quad (36.4)$$

նաձուով: Նույն ձևով Z առանցքի նկատմամբ իմպուլսի մոմենտը կլինի

$$L_z = [r_{\perp} p_{\perp}] \quad (36.5)$$

2. Հարժիպ սկզբնակետի եկատմամբ մոմենտների հավասարումը: Ճախ հարկ է լինում դիտարկել համախմբի իմպուլսի մոմենտը շարժվող Օ սկզբնակետի, կամ նրանով անցնող առանցքի նկատմամբ: Դիցուք որված ՀԿ-ում O կետը շարժվում է v_0 , իսկ համախմբի մասնիկները v ազուրյուններով (նկ.5.8): Տվյալ պահին O կետի նկատմամբ համախմբի Σ իմպուլսի մոմենտը կլինի

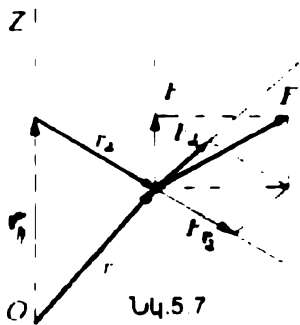
$$L = \sum m_i [r_i v_i] \quad (36.6)$$

Որոշենք ըստ ժամանակի նրա աձանցյալը.

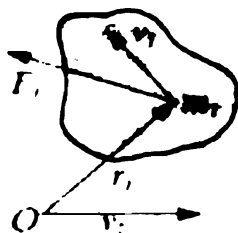
$$\dot{L} = \sum m_i [\dot{r}_i v_i] + \sum m_i [r_i \dot{v}_i] \quad (36.7)$$

Բայց այստեղ r_i -ը O կետի նկատմամբ i -րդ մսիկի v_i արագությունը չէ, այլ շնորհիվ O ի շարժման, այն հավասար է

$$\dot{r}_i = v_0 + v_{ri} \quad (36.8)$$



Նկ.5.7



Նկ.5.8

Հաշվի առնելով նաև Նյուտոնի 2 -րդ օրենքը $m\dot{v} = F$, և օգտվելով
 իներցիալի կենտրոնի արագության բանաձևից, կստանանք մոմենտների
 հետևյալ հավասարումը.

$$L = M + m[v, v_0]. \quad (36.9)$$

Ստացվածը *մոմենտների հավասարումն է շարժվող O սկզբնակետի
 նկատմամբ*: Եթե O կետը համընկնում է իներցիալի կենտրոնի հետ, ապա
 $v_0 = v$, և (36.9)-ը համընկնում է (35.8)-ի հետ.

Նկատենք, որ սովորական տեսքով մոմենտների (34.14) հավասարու-
 մը կիրառելի է նաև այն դեպքում, երբ O կետը շարժվում է v_0 ին զուգահեռ
 v_0 արագությամբ:

§37. ԱՆՇԱՐՔ ԱՌԱՆՅՔԻ ԵՈՒՋ ՀԱՄԱՌՄԻ ՊՏՈՒՅՑ

Բնության մեջ տարածված շարժումներից է անշարժ առանցքի շուրջ
 համախմբի պտույտը. Աստղագիտական դիտումները ցույց են տալիս, որ
 իրենց իներցիալի կենտրոնով անցնող առանցքների շուրջ պտույտը հա-
 տուկ է ոչ միայն մոլորակներին, առանձին աստղերին, կրկնակի և բազմա-
 կի աստղերին, այլև աստղակույտներին, գալակտիկաներին, նրանց խմբե-
 րին. Ընդհանրապես, եթե համախմբում մասնիկները կատարում են ֆի-
 նիտ շարժումներ, ապա դրանք հիմնականում պտույտներ են իներցիալի
 կենտրոնով անցնող առանցքների շուրջ. Պտտական շարժումը մեծ տա-
 րածում ունի նաև մեզ չորսպատող ամենատարբեր երևույթներում. Նման
 շարժման հետ մենք հանդիպում ենք թե՛ մթնոլորտում ու ջրամբարներում
 և թե՛ տարբեր էլեկտրական և մեխանիկական սարքերում.

Ստանանք մոմենտների հավասարումը պտտվող համախմբի հա-
 մար:

1. *Իմպուլսի մոմենտի b աեկտրալիին արագության կապը*: Նախ դի-
 տարկենք m զանգվածով մասնիկ, որն անշարժ առանցքի շուրջը $[\Omega r]$
 արագությամբ պտտվելուց բացի, կատարում է նաև առանցքին զուգահեռ
 v_1 և շառավղային v_2 (առանցքից հեռացնող, կամ մոտեցնող) արագություն-
 ներով շարժումները (նկ 5.9).

$$v = [\Omega r] + v_2 + v_1 \quad (37.1)$$

Առանցքի նկատմամբ մասնիկի իմպուլսի մոմենտը, ինչպես ցույց տրվեց նախորդ պարագրաֆում, պայմանավորված է միայն պտտական շարժման $[\Omega r]$ արագությամբ.

$$L_z = m[r_z[\Omega r]] = m r_z^2 \Omega = I \Omega. \quad (37.2)$$

քանի որ առանցքին զուգահեռ և շառավղային շարժումների իմպուլսի մոմենտները C կետի նկատմամբ ուղղահայաց են Z առանցքին: Ստացված (37.2) արտահայտության մեջ $I = m r_z^2$ մեծությունը՝ մասնիկի զանգվածի և դիտարկվող առանցքից նրա ունեցած հեռավորության քառակուսու արտադրյալը, կոչվում է մասնիկի *իներցիայի մոմենտ* Z առանցքի նկատմամբ.

Այժմ դիտարկենք ու մասնիկներից բաղկացած համախումբ, որը պտտվում է իր *իներցիայի C կենտրոնով* անցնող անշարժ Z առանցքի շուրջը, ընդ որում յուրաքանչյուր i -րդ մասնիկի v_i արագությունն արտահայտվում է (37.1) բանաձևով եթե տարբեր մասնիկներ պտտվում են տարբեր Ω_i անկյունային արագություններով, ապա ասում են՝ *համախմբի պտույտը դիֆերենցիալ է*, իսկ եթե բոլոր մասնիկները պտտվում են միևնույն Ω անկյունային արագությամբ՝ *պտույտը համասեռ է*։

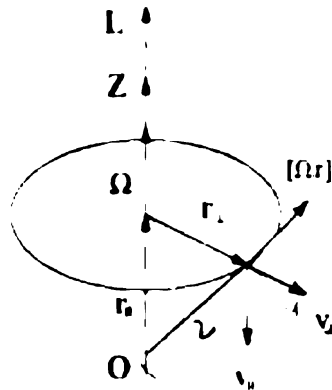
Համասեռ պտույտի մասնավոր դեպք է պինդմարմնային պտույտը, որում բացակայում են արագության v_1 և v_2 բաղադրիչները:

Դիֆերենցիալ պտտվող համախմբում ներքին դիսփակատիվ փոխազդեցությունները ձգտում են հավասարեցնել տարբեր մասնիկների պտտման անկյունային արագությունները (տես այս գլխի վերջում խնդիրը): Դրա շնորհիվ որոշ ժամանակ հետո դիֆերենցիալ պտույտը վերածվում է համասեռի: Այնպես որ, կդիտարկենք համասեռ պտույտի դեպքը.

Համասեռ պտտվող համախմբի որևէ i -րդ մասնիկի իմպուլսի մոմենտը, համախմբի *իներցիայի կենտրոնով* անցնող Z առանցքի նկատմամբ, կորոշվի (37.2)-ին համանման բանաձևով

$$L_{iz} = m_i r_{iz}^2 \Omega = I_i \Omega. \quad (37.3)$$

Իսկ համախմբի սեփական իմպուլսի մոմենտը Z առանցքի նկատմամբ կլինի



Նկ. 5.9

$$L_1 = \Omega \sum m_i r_{i1}^2 = I \Omega. \quad (37.4)$$

որտեղ

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n m_i r_{i1}^2. \quad (37.5)$$

մեծությունը *համախմբի իներցիայի մոմենտն է Z առանցքի նկատմամբ:*

Իներցիայի մոմենտն ադիտիվ մեծություն է այն հավասար է համախմբը կազմող մասնիկների իներցիայի մոմենտների գումարին. Իներցիայի մոմենտը դիտարկվող առանցքի շուրջ համախմբի զանգվածի բաշխման բնութագիր է

Այս ենթակետում ստացված հիմնական արդյունքն արտահայտվում է (37.4) բանաձևով. *անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող համախմբի իներցիայի մոմենտն այդ առանցքի նկատմամբ հավասար է նույն առանցքի նկատմամբ համախմբի իներցիայի մոմենտի և պտտման անկյունային արագության արտադրյալին.*

2. Պտտական շարժման դինամիկայի հիմնական հավասարումը: Տեղադրելով (37.4) բանաձևը մոմենտների (36.2) հավասարման մեջ, կստանանք համատեղ պտտվող համախմբի համար անշարժ առանցքի շուրջ պտտական շարժման դինամիկայի հիմնական հավասարումը

$$\frac{d}{dt} (I \Omega) = M_1. \quad (37.6)$$

Անշարժ առանցքի շուրջ պտտվող *պինդ մարմնի համար* I -ն հաստատուն մեծություն է, հետևաբար այն կարելի է (37.6) ում դուրս բերել դիֆերենցման նշանի տակից

$$I \frac{d\Omega}{dt} = M_1. \quad (37.7)$$

Վերջինս *պինդ մարմնի պտտական շարժման դինամիկայի հիմնական հավասարումն է:*

Առանցքի նկատմամբ իմպուլսի մոմենտը հաճախ անվանում են *անկյունային մոմենտ (ANGULAR MOMENTUM)*

Պտտական շարժման դինամիկայի (37.6) հավասարումից մասնավորապես հետևում է *անկյունային մոմենտի պահպանման օրենքը*՝

$$\text{եթե } M_1 = 0, \text{ ապա } L_1 = I(t)\Omega(t) = \text{const.} \quad (37.8)$$

Այսինքն, *եթե պտտման առանցքի նկատմամբ արտաքին ուժերի մոմենտը զրո է, ապա համախմբի անկյունային մոմենտը պահպանվում է*

Համասեռ պտտվող համախմբի իներցիայի (37.5) մոմենտը, շնորհիվ մասնիկների արագության չափավորային բաղադրիչի, կարող է անընդհատ փոփոխվել: Համաձայն անկյունային մոմենտի պահպանման (37.8) օրենքի, համապատասխան փոփոխություններ պետք է կրի պտտման անկյունային արագությունը:

3. Պտտական շարժման կինետիկ էներգիան: Անշարժ առանցքի շուրջ պտտվող համախմբի լրիվ կինետիկ էներգիան հավասար է

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = K_{\text{cm}} + K_{\text{r}} + K_{\text{t}}, \quad (37.9)$$

որում հաշվի է առնված արագության (37.1) ներկայացումը:

Համախմբի պտտական շարժման կինետիկ էներգիա ասելով հասկանում են (37.9)-ում *միայն պտույտով պայմանավորված էներգիան*

$$K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i [\Omega r_{\perp i}]^2 = \frac{\Omega^2}{2} \sum_i I_i.$$

որտեղ հաշվի են առնված $v_{\perp i} = [\Omega r_{\perp i}]$ և (37.3) առնչությունները Ուրեմն՝

$$K_{\text{cm}} = I \Omega^2 / 2 = L^2 / 2I: \quad (37.10)$$

Պտտական շարժում հաղորդելու համար համախմբի վրա ազդող ուժերը պետք է կատարեն աշխատանք: Ընդ որում հաղորդված կինետիկ էներգիայի և կատարված աշխատանքի կապը տրվում է կինետիկ էներգիայի թեորեմով: Եթե բաժանենք համախմբում գործող ուժերը ներքինի և արտաքինի, կունենանք

$$\Delta K_{\text{cm}} = \delta A_{\text{in}} + \delta A_{\text{e}}:$$

Նշենք հետևյալ կարևոր հանգամանքը՝ Ներքին ուժերը կարող են փոփոխել համախմբի թե՛ լրիվ, թե՛ պտտական շարժման կինետիկ էներգիաները: Սակայն պտտական շարժման կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը նրանք իրագործում են (37.10)-ում համախմբի իներցիայի մոմենտը փոփոխելու միջոցով: Ներքին ուժերը չեն կարող իմպուլսի մոմենտի փոփոխություն առաջացնել: Հետևաբար ներքին ուժերն ինչ աշխատանք էլ կատարեն, անկարող են չպտտվող համախմբին պտույտ հաղորդել:

4. Համախմբին պատույտ հաղորդող ուժերի աշխատանքը: Չպտտվող համախմբին պտտական շարժում կարող են հաղորդել միայն արտաքին ուժերը: Այդ փաստը պարունակվում է համախմբին պտտական շարժում հաղորդելու համար անհրաժեշտ աշխատանքի հաշվման բանաձևում: յտանանք այդ բանաձևը

Համախմբի i -րդ մասնիկին $d\mathbf{r}_i = [d\boldsymbol{\varphi} \mathbf{r}_i]$ տարրական տեղափոխություն հաղորդելու համար նրա վրա ազդող ուժը կատարում է

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = \mathbf{F} [d\boldsymbol{\varphi} \mathbf{r}] = d\boldsymbol{\varphi} [\mathbf{r} \mathbf{F}] = \mathbf{M} d\boldsymbol{\varphi}$$

աշխատանք: Զանի որ մասնիկի $d\boldsymbol{\varphi}$ անկյունային տեղափոխությունն ուղղված է պտտման Z առանցքով, ապա ստացված արտահայտությունը կրնորին հետևյալ տեսքը

$$\delta A = \mathbf{M}_i d\boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{M}_{i,0} + \mathbf{M}_{i,1}) d\boldsymbol{\varphi}:$$

Լրիվ աշխատանքի համար, հաշվի առնելով ներքին ուժերի գումար մոմենտի զրո լինելը, կունենանք

$$\delta A = \mathbf{M}_1 d\boldsymbol{\varphi} \quad (37.11)$$

Վերջավոր անկյունով *համախումբը պտտելու համար անհրաժեշտ արտաքին ուժերի աշխատանքը կլինի.*

$$A = \int \mathbf{M}_1 d\boldsymbol{\varphi} \quad (37.12)$$

§38. ԱՆԿՑՈՒՆԱՑԻՆ ՄՈՄԵՆՏԻ ՊԱՇՊԱՆՄԱՆ

ՕՐԻՆԱԿԵՐ

1. Համախմբի անկյունային մոմենտի պահպանման օրենքի լուսաբանման ուսանելի փորձեր կարելի է ցուցադրել *ժուկովսկու պթոռ* կոչվող սարքով: Ռա մի սկավառակ է: Որն ազատ կարող է պտտվել ուղղաձիգ առանցքի շուրջը (նկ. 5.10): Պտույտի ընթացքում սկավառակ - փորձարար համախմբի պտտման առանցքի նկատմամբ արտաքին ուժի մոմենտ կարող են առաջացնել օդի և ու կարևոր է, ուղղաձիգ առանցքին սկավառակի ամրացման մատում առաջացող չիման ուժերը: Վերջինս էապես թուլացվում է առանցքակալի օգտագործմամբ: Այնպես որ, ոչ երկար ժամանակներում պտտվող համախմբի վրա նշված ուժերի պտտող մոմենտի ազդեցությունը կարելի է արհամարհել, համարելով սկավառակ - փորձարար համախմբի անկյունային մոմենտի պահպանման օրենքի պայմանները բավարարված:

Դիցուք փորձարարը տարածված ծեռքերով բռնել է մարգագնուերը և սկավառակի հետ պտտվում է Ω անկյունային արագությամբ (նկ.5.10ա):

Զանի որ ներքին ուժերը չեն կարող փոփոխել սկավառակ - փորձարար համախմբի լրիվ անկյունային մոմենտը: Ուրեմն, եթե փորձարարը

մարզագնդերը մոտեցնի պտտման առանցքին, ապա այդ ընթացքում պետք է դիտվի համախմբի պտտման անկյունային արագության մեծացումը (նկ. 5.10բ)։ Դա հասկանալի է, քանի որ մարզագնդերը դեպի առանցք բերելիս փորձարարը փոքրացնում է պտտման առանցքի նկատմամբ համախմբի իներցիայի մոմենտը $2mR^2$ չափով։ Այնպես որ անկյունային մոմենտի պահպանման համար անհրաժեշտ է պտտման անկյունային արագության մեծացում, որն էլ դիտվում է փորձում։

Եթե վերջնական վիճակում սկավառակ - փորձարար համախմբի իներցիայի մոմենտը նշանակենք I_0 , ապա քննարկվող

փորձում անկյունային մոմենտի պահպանման համար կարող ենք գրել

$$(I_0 + 2mR^2)\Omega = I_0\Omega_0, \quad (38.1)$$

որտեղից

$$\Omega_0 = \left(1 + \frac{2mR^2}{I_0}\right)\Omega > \Omega. \quad (38.2)$$

Ուրեմն, որքան անգամ փոքրանում է համախմբի իներցիայի մոմենտը, նույնքան անգամ մեծանում է նրա պտտման անկյունային արագությունը։ Այս երևույթը լայն կիրառություն ունի բալետում, գեղասահքում, այլ մարզաձևերում։

Սառույցի վրա չմուշկներով պտտվող մարզիկի համար անկյունային մոմենտի պահպանման օրենքի պայմանները լիովին բավարարված են, քանի որ սառույցի և չմուշկների միջև չկան ուժեղ գործնականորեն բացակայում է «Հոլ» կոչվող վարժությունը կատարելու համար մարզիկը նախ իր մառնին տալիս է ուղղաձիգի նկատմամբ հնարավոր առավելագույն իներցիայի մոմենտի համապատասխանող ձև (տարածում է ձեռքերը, իրանը թեքում առաջ), և այդ վիճակում մի ոտքով հրվելով ձեռք է բերում I_0 և Ω անկյունային մոմենտ փոքրացնելով իրանի իներցիայի մոմենտը

ուղղածի՞զ առանցքի նկատմամբ, մարդիկն արագացնում է իր պտույտը Կանգառի համար մարդիկը պետք է կատարի նույն գործողությունները հակառակ հաջորդականությամբ

Պարարվեստում բալետի պարուհիները անկյունային մոմենտի պահպանման օրենքից կարողանում են օգտվել ուղնաթաթին հատուկ սրածայր ուղնաման հագնելով: քանի որ դրանով խիստ կոճատվում է հատակի կողմից ուղքի վրա ազդող չփման ուժի բազուկը Պտույտը դադարեցնելու համար պարուհին տարածում է ձեռքերը, ուղքը և սովորաբար այն ավարտում խոնարհումով: Վերջինս նույնպես մեծացնում է իրանի իներցիայի մոմենտն առանցքի նկատմամբ և նպաստում պարուհու կանգառին

Անկյունային մոմենտի պահպանման օրենքը գործում է նաև իր սեփական առանցքի շուրջ Երկրի պտույտի համար: Երկրագնդում զանգվածի ցանկացած տեղափոխություն (մթնոլորտային տեղումներ, ընդերքից մեծ զանգվածների հրաբխային ժայթքում և այլն) փոփոխում է Երկրի իներցիայի մոմենտը և դրա հետ նրա պտտման անկյունային արագությունը Ղա առաջացնում է օրվա տևողության ոչ ռեզուլյար փոփոխություններ որոնք մոտավորապես 0.001 վ-ի կարգի են:

2. Իներցիայի մոմենտի փոքրացմանը զուգընթաց սկավառակ - փորձարար համախմբի պտտական շարժման կինետիկ էներգիան աճում է Ղա հետևում է (37.10) բանաձևից, եթե հաշվի առնենք $L = const$ պայմանը Սակայն կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը հնարավոր է միայն որոշակի ուժերի աշխատանքի շնորհիվ: Ղրանք համախմբում գործող ներքին ուժերն են ժուկովսկու աթոռի հետ պտտվող փորձարարը մարզագնդերը պտտման առանցքին մոտեցնելու համար պետք է զարգացնի որոշակի մկանային ուժ: Այդ ուժը տվյալ դեպքում խաղում է կենտրոնածի՞զ ուժի դեմ և թվապես հավասար է $F = m\Omega^2 r$, որտեղ r -ը պատման առանցքից մարզագնդի հեռավորությունն է: Մարզագնդերը պտտման առանցքին մոտեցնելիս այս ուժը կատարում է դրական աշխատանք, որի շնորհիվ էլ համախմբի կինետիկ էներգիան աճում է:

Ասվածը հաստատենք կոնկրետ հաշվարկով: Տարրական dr տեղափոխության վրա $F = -m\Omega^2 r$ (մինուս նշանը ցույց է տալիս, որ ուժն ուղղված է դեպի պտտման առանցք) ուժի աշխատանքը կլինի

$$\delta A = F dr = -m\Omega^2 r dr = -m\Omega^2 r dr \quad (38.3)$$

Երկու մարզագնդերի տեղափոխման վրա կատարվող աշխատանքը կլինի երկու անգամ ավել, քան տեղափոխության վրա մկանային ուժերի աշխատանքը կլինի:

$$A = -2m \int_{r_0}^r \Omega^2 r dr = -2m \int_{r_0}^r \frac{(I\Omega^2)}{r^2} r dr = -2m \int_{r_0}^r \frac{L^2}{r^2} r dr \quad (38.4)$$

Քանի որ շարժման ընթացքում $L = \text{const}$, իսկ $I = I_0 + 2mR^2$, ապա

$$A = -2mL^2 \int_{r_0}^r \frac{r dr}{(I_0 + 2mR^2)^2} = \frac{L^2}{2} \left[\frac{1}{I_0} - \frac{1}{I_0 + 2mR^2} \right], \quad (38.5)$$

կամ

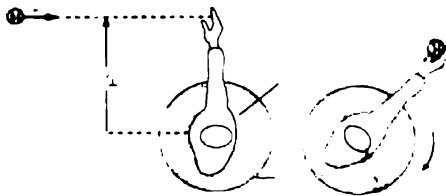
$$A = \frac{L^2}{2I_0} - \frac{L^2}{2(I_0 + 2mR^2)} = \Delta K_{\text{rot}} \quad (38.6)$$

Այսինքն՝ համախմբի *կինետիկ էներգիայի աճը պայմանավորված է մկանային ուժի աշխատանքով և մեծությամբ հավասար է նրան*:

Եթե բերված հաշվարկներն ու դատողությունները լիովին բացատրում են դիտվող երևույթի *էներգետիկ կողմը*, սակայն չեն պատասխանում այն հարցին, թե որ ուժերն են անկյունային արագության փոփոխություն առաջացնողը: Թե՛ մարզագնդերի և թե՛ փորձարար+սկավառակ համախմբի անկյունային մոմենտները առանձին վերցրած փոփոխվել են, ընդ որում մարզագնդերի անկյունային մոմենտը լիովին հաղորդվել է փորձարար + սկավառակ համախմբին: Պարզ է՝ նման գործողություն մկանային-կենտրոնածից ուժը կատարել չի կարող, քանի որ պտտման առանցքի նկատմամբ նրա մոմենտը զրո է: Անկյունային մոմենտի վերաբաշխումը կատարում են մարզագնդերի տեղաշարժի հետևանքով առաջացող, այսպես կոչված, *կողային ճնշման ուժերը*, որոնք մարզագնդերի և փորձարար + սկավառակ համախմբի վրա ազդում են հակառակ ուղղված ուժի մոմենտներով: Փորձարարը մարզագնդերը տեղափոխելիս զգում է այդ *կողային ճնշման ուժերի* առկայությունը: Դրանք ուղղահայաց են ինչպես պտտման առանցքին, այնպես էլ մարզագնդերի տեղափոխմանը, այդ պատճառով մեխանիկական աշխատանք չեն կատարում: Չեղքի կողմից մարզագնդերի վրա ազդող այդ ուժերը փոխում են մարզագնդերի անկյունային մոմենտը, իսկ մարզագնդերի կողմից *ծեռքերի* (իսկ նրանց միջոցով էլ փորձարարի իրանի և սկավառակի) վրա ազդող ուժերը՝ փորձարար +

սկավառակ համախմբի իմպուլսի մոմենտը Այս ուժերի հետ կծանոթանանք VII գլխում (*Կորիոլիսյան ուժեր*):

3 Եթե ժուկովսկու աթոռին անշարժ կանգնած փորձարարը պարզածեռքով բռնում է առանցքից r_1 հեռավորության վրա p իմպուլսով հորիզոնական թռչող գնդակը, ապա նա աթոռի հետ միասին սկսում է պտտվել:



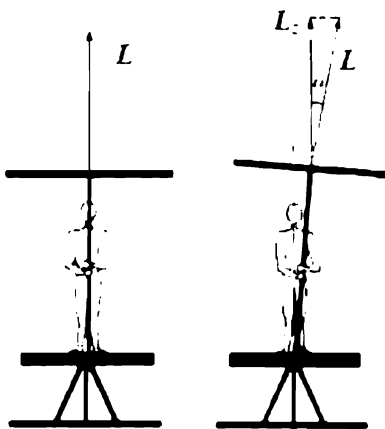
Նկ.5.11

Այստեղ ժուկովսկու աթոռի առանցքի նկատմամբ գնդակի $r_1 p$ իմպուլսի մոմենտը հաղորդվել է փորձարար + սկավառակ համախմբին (Նկ.5.11):

Նշանակելով համախմբի իներցիայի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ (փորձարարի ներքը պարզած վի-

ճակում) I , կարող ենք գրել (գնդակի զանգվածն արհամարհում ենք համախմբի զանգվածի նկատմամբ) $r_1 p = I \Omega$, որտեղից կորոշվի Ω -ն:

4 ժուկովսկու աթոռով կարելի է ցուցադրել անկյունային մոմենտի պահպանման օրենքի վեկտորական բնույթը: Այդ նպատակով երկար ծողի վրա առանցքակալով ամրացված արագ պտտվող ծանր անիվը հանձնենք ժուկովսկու աթոռին անշարժ կանգնած փորձարարին (Նկ.5.12): Այս վիճակում համախմբի անկյունային մոմենտն ուղղված է ուղղաձիգ առանցքով և կենտրոնացված պտտվող անիվում. $L = I_0 \Omega_0$, որտեղ I_0 -ն անիվի իներցիայի մոմենտն է. իսկ Ω_0 -ն պտտման անկյունային արագությունը:



Նկ 5.12

Քանի որ արտաքին ուժերի մոմենտը Z առանցքի նկատմամբ զրո է, ապա նրա նկատմամբ անիվ - փորձարար + սկավառակ համախմբի անկյունային մոմենտը կպահպանվի: Փորձարարը անիվի առանցքը ուղղաձիգից որևէ α անկյունով թեքելիս (Նկ.5.12), համախմբը ձեռք է բերում անիվի պտտման ուղղությամբ լրացուցիչ պտույտ: Դա լիովին համապատասխանում է Z առանցքի նկատմամբ իմպուլսի մոմենտի պահպանման

օրենքին: Իրոք, առանցքը թեքելիս, անիվի իմպուլսի մոմենտը Z առանցքի նկատմամբ փոքրանալով հավասարվում է $L_z^0 = I_0 \Omega_0 \cos \alpha$: Այնպես որ, Z առանցքի նկատմամբ անկյունային մոմենտը կպահպանվի՝

$$\Delta L_z = I_0 \Omega_0 (1 - \cos \alpha) = I_0 \Omega_0$$

Իմպուլսի մոմենտով համախմբի ամբողջական պտույտի շնորհիվ, որտեղ Ω_0 -ն այդ պպտույտի անկյունային արագությունն է, I_0 -ն համախմբի իներցիայի մոմենտը Z առանցքի նկատմամբ անիվի առանցքը α անկյունով թեքված վիճակում: Անիվի առանցքն ուղղաձիգ դիրքի բերելիս համախմբի ամբողջական պտույտը վերանում է. թեև ընդհանրապես ասած, համախմբն ամբողջությամբ վերցրած չի վերադառնում սկզբնական վիճակին: Օրինակ եթե սկզբում փոքրարարը կանգնած է եղել դեմքով դեպի մեզ, վերջնական վիճակում այն կարող է կանգնած լինել մեջքով դեպի մեզ: Ինչպես նախորդ օրինակում, այստեղ նույնպես անկյունային մոմենտի վերաբաշխումը համախմբում կատարում են կողային ճնշման ներքին ուժերը:

5.1. Ապացուցել, որ ներքին դիֆուզիայով ուժերը ծագում են վերացել համախմբի պտույտի դիֆերենցիալությունը

Լուծում . Դիֆերենցիալ պտույտի պայմաններում փակ համախմբը չի կարող գտնվել ստացիոնար վիճակում Իրոք, դիֆերենցիալ պտույտի դեպքում հարևան մասնիկների հարաբերական շարժման շնորհիվ համախմբում գոյություն ունի դիֆուզիայով ուժերը բերում են երկու հիմնական երևույթների՝ Նախ, նրանք բացասական աշխատանքը անընդհատ նվազեցնում է համախմբի կինետիկ էներգիան. փոխարկելով այն ջերմության՝ Երկրորդ, չնայած ներքին դիֆուզիայով ուժերը անփոփոխ են թողնում համախմբի լրիվ անկուլնային մոմենտը. սակայն կարող են փոփոխել առանձին մասնիկների անկուլնային մոմենտները՝ առաջացնելով անկուլնային մոմենտի վերաբաշխում 9ույց տաճք, որ վերջինիս շնորհիվ ներքին դիֆուզիայով ուժերը ծագում են համախմբի դիֆերենցիալ պտույտը վերածել պինդարմնային պտույտի

Դիցուք դիֆերենցիալ պտույտի համախմբի $\cdot$ և k մասնիկները կատարում են $\Omega > \Omega_0$ անկուլնային արագություններով պտտական շարժումներ Z առանցքի շուրջը Կոնտակտային փոխազդեցության ընթացքում մասնիկների (դրանք դիտում ենք որպես Z առանցքից R հեռավորության վրա գտնվող նյութական կետեր)

$$v_{\perp} = v_{\perp} - v_{\perp} = R(\Omega - \Omega_0) \approx R\Delta\Omega > 0$$

հարաբերական արագության շնորհիվ ծագում են դիֆուզիայով

$$F_{\perp} = -k(v_{\perp})v_{\perp}$$

ուժեր, որոնք ստեղծում են Z առանցքի նկատմամբ մասնիկների վրա ազդող հակառակ նշանի ուժի մոմենտներ

$$d(I_{\perp}\Omega_{\perp})/dt = -R^2k(v_{\perp})\Omega_{\perp} < 0:$$

$$d(I_{\perp}\Omega_{\perp})/dt = R^2k(v_{\perp})\Omega_{\perp} > 0:$$

Մոմենտների գրված հավասարումներից հետևում է, որ դիֆուզիայով ուժեր պտտող մոմենտները փոքրացնում են արագ պտտվող $\cdot$ -ով մասնիկի անկուլնային մոմենտը և մեծացնում դանդաղ պտտվողինը Ընդ որում, այս երևույթը կշարունակվի այնքան, քանի դեռ չի վերացել մասնիկների միջև հարաբերական շարժումը այսինքն, $\Omega_{\perp} \neq 0$ Մասնիկների արագությունների հավասարեցմամբ ($v_{\perp} = 0$) կապարտվի անկուլնային մոմենտի վերաբաշխման նկարագրված երևույթը և համակարգի պտույտը կդառնա համասեռ

ԳԼՈՒԽ VI

ԲԱՆՈՒՄՆԵՐ

Այս գլխում կոիտարկենք մասնիկների բախման և տրոհման տարրեր երևույթներ, օգտվելով բացառապես *պահպանման օրենքների մեթոդից*։ Այդ ընթացքում կհամոզվենք, որ այս մեթոդը հնարավորություն է տալիս, անկախ մասնիկների միջև գործող ուժերի բնույթից և տեսքից, ստանալ բննարկվող երևույթների առավել կարևոր օրինաչափությունները։ Ընթացքում կցուցադրենք հաշվարկի (՝ համակարգի կիրառության մեթոդիկան, նրանում երևույթների առավել պարզ պատկերման հնարավորությունն ու խնդիրների մաթեմատիկական լուծման առավելությունները։

Թեև կխոսենք մասնիկների բախման մասին, սակայն հարկ է նշել, որ այս գլխում ստացվելիք արդյունքները կիրառելի են մարմինների *կամայական փոխազդեցության* համար։ Միայն թե այդ դեպքում մասնիկների առաքություն անելով պետք է հասկանալ մարմինների իներցիայի կենտրոնի արագությունը, իսկ մասնիկի կինետիկ էներգիան՝ մարմնի ամբողջական շարժման կինետիկ էներգիան։

Այս գլխում կենթադրենք, որ

- *մասնիկներից կազմված համախումբը փակ է*

- *հաշվարկի լաբորատոր և Շ համակարգերը իներցիալ են*

- *բախումից (տրոհումից) առաջ և հետո մասնիկների իմպուլս և էներգիա անփոփոխ կհասկանանք նրանց արժեքները մասնիկների միջև այնպիսի մեծ հեռավորությունների վրա, երբ բացակայում են նրանց միջև փոխազդեցությունները*

Կքննարկենք նաև ռելատիվիստական արագություններով շարժվող մասնիկների բախման և տրոհման երևույթները, ինչպես նաև ռելատիվիստական մեխանիկայի հիմնավորմանը վերաբերող փորձեր։

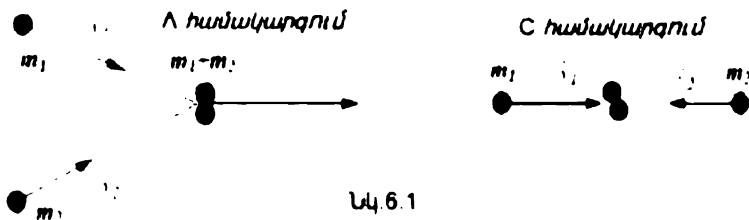
Տարբերվում են մասնիկների բախման երեք ձևեր՝ բացարձակ ոչ առաձգական, բացարձակ առաձգական և ոչ առաձգական բախումներ։

§39. ԲԱՅԱՐԶԱԿ ՈՉ ԱՌԱՋԱԿԱՆ ԲԱՌՈՒՄ

Այս բախման արդյունքում մասնիկները միանալով առաջացնում են նոր մասնիկ

1. *Բախման եկարագրությունը նյութային մեխանիկայում:* Դիցուք հաշվարկի Λ համակարգում m_1 և m_2 զանգվածով մասնիկները շարժվելով v_1 և v_2 արագություններով, բախվում են և միանալով առաջացնում են նոր մասնիկ (նկ. 6.1ա): Բանի որ մեխանիկական համախումբը փակ է, ապա նրա լրիվ իմպուլսը կպահպանվի (բախումից հետո մեծությունները կնշենք շտրիխներով)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' : \quad (39.1)$$



Նկ. 6.1

Նկատենք, որ առաջացած նոր մասնիկը Λ -ում շարժվում է մասնիկների իներցիայի կենտրոնի արագությամբ.

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} : \quad (39.2)$$

Գիտենք, որ փակ համախմբի լրիվ մեխանիկական էներգիան կարող է փոփոխվել ներքին դիսիպատիվ ուժերի աշխատանքով.

$$E' - E = A'' :$$

Բանի որ բախումից առաջ և հետո մասնիկների միջև փոխազդեցությունը բացակայում է, ապա այդ վիճակներում համախմբի լրիվ մեխանիկական էներգիաները նրանց կիներտիկ էներգիաներն են: Մյուս կողմից, բախման ընթացքում գործում են ներքին դիսիպատիվ ուժեր, որոնք կատարում են բացասական աշխատանք (§28)

$$K' - K = A'' < 0, \quad (39.3)$$

փոխարկելով համախմբի կիներտիկ էներգիայի մի մասը ջերմության.

$$Q = K - K' = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \quad (39.4)$$

Ուրեմն, բացարձակ ոչ առաձգական բախման ժամանակ *անջատված ջերմությունը համեմատական է մասնիկների հարաբերական արագության քառակուսուն:*

Այժմ քննարկենք նույն մասնիկների բախումը հաշվարկի C համակարգում Նախ ստանանք բախումից առաջ մասնիկների իմպուլսները և կինետիկ էներգիաները հաշվարկի C համակարգում (նկ. 6.1բ):

Բախումից առաջ մասնիկների արագությունների համար ունենք՝

$$\vec{v}_1 = v_1 - v_c, \quad \vec{v}_2 = v_2 - v_c, \quad (39.5)$$

իսկ իմպուլսների համար

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = m_1 (v_1 - v_c) = \mu (v_1 - v_2), \quad (39.6)$$

$$\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 = m_2 (v_2 - v_c) = \mu (v_2 - v_1):$$

Այստեղ հաշվի առանք (39.2) բանաձևը և կատարեցինք նշանակում.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (39.7)$$

որը կոչվում է *համախմբի բերված զանգված* Այն միշտ առաջանում է հաշվարկի C համակարգին անցնելիս: Ինչպես պետք էր սպասել, C համակարգում մասնիկներն ունեն մեծությամբ հավասար և հակառակ ուղղված իմպուլսներ.

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

որոնց մեծությունը բերված զանգվածի և հարաբերական արագության արտադրյալն է.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 = \mu \vec{u} = \vec{p}_2. \quad (39.8)$$

Այստեղ $\vec{u} = v_1 - v_2$ - մասնիկների հարաբերական արագության մոդուլն է Ուրեմն, հաշվարկի C համակարգում մասնիկների բացարձակ ոչ առաձգական բախումն ունի պարզագույն տեսք՝ բախումից առաջ մասնիկներն իրար մոտենում են մեծությամբ հավասար (39.6) իմպուլսներով, իսկ բախումից հետո ունենք դադարի վիճակում զտնվող նոր մասնիկ:

Բախումից առաջ մասնիկների լրիվ կինետիկ էներգիան հավասար է.

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{p} = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} = \mu \frac{u^2}{2}, \quad (39.9)$$

որտեղ հաշվի առանք (39.8), (39.7) առնչությունները Բանի որ առաջացած նոր մասնիկը C համակարգում գտնվում է դադարի վիճակում, ապա բախումից առաջ մասնիկների լրիվ (39.9) կինետիկ էներգիան փոխարկվում է ջերմության:

$$Q = \vec{K} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{|\vec{v} - \vec{v}_2|^2}{2} = \mu \frac{u^2}{2}, \quad (39.10)$$

Ուշադրություն դարձրեք ստացված կարևոր արդյունքին: Թեև հաշվարկի A և C համակարգերում համախմբի կինետիկ էներգիան բախումից առաջ և հետո ունի տարբեր արժեքներ, սակայն *կինետիկ էներգիայի փոփոխությունն անկախ է հաշվարկի համակարգի ընտրությունից*, որն էլ անջատված ջերմության բանալն է:

2. Ռելատիվիստական մասնիկների բացարձակ ոչ առաձգական բախումը: Հիշենք, որ §22-ում երկու միատեսակ մասնիկների բացարձակ ոչ առաձգական բախման մի մասնավոր օրինակում պահանջելով իմպուլսի պահպանման օրենքի իրականացում, ստացանք ռելատիվիստական զանգվածի և իմպուլսի բանաձևերը: Այս գլխում կտեսնենք, որ այդ կերպ սահմանված իմպուլսը պահպանվող մեծություն է:

Նախ դիտարկենք միատեսակ հանգստի զանգվածներով մասնիկների բացարձակ ոչ առաձգական բախումը C համակարգում: Այստեղ բախումից առաջ մասնիկներն ունեն հավասար և հակառակ ուղղված իմպուլսներ, այսինքն՝ զրոյական լրիվ իմպուլս՝

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \quad (39.11)$$

և

$$\vec{E} = 2mc^2 + \vec{K} \quad (39.12)$$

լրիվ էներգիա, որտեղ $\vec{K}$ -ն մասնիկների կինետիկ էներգիան է C համակարգում բախումից առաջ մասնիկների լրիվ կինետիկ էներգիան փոխարկվում է ջերմության:

$$\vec{K} = Q \quad (39.13)$$

Հաշվարկի A համակարգում, որի նկատմամբ մասնիկների իներցիալ կենտրոնը շարժվում է v արագությամբ, բախումից առաջ մասնիկների

լրիվ իմպուլսի և էներգիայի համար կունենանք՝

$$P = \frac{\vec{P} + \vec{E}v/c^2}{\sqrt{1-v/c^2}} = \frac{2m + \vec{K}/c^2}{\sqrt{1-v/c^2}} v, \quad (39.14)$$

$$E = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1-v/c^2}} = \frac{2mc^2 + \vec{K}}{\sqrt{1-v/c^2}}. \quad (39.15)$$

Բախումից հետո նոր առաջացած մասնիկը Λ համակարգում կունենա v արագություն և օժտված կլինի

$$P' = \frac{m'v}{\sqrt{1-v/c^2}} \quad (39.16)$$

իմպուլսով, որտեղ m' -ը առաջացած մասնիկի դադարի զանգվածն է։ Օգտվելով համախմբի իմպուլսի պահպանման օրենքից և հավասարեցնելով բախումից առաջ և հետո մասնիկների լրիվ (39.14) և (39.16) իմպուլսները, կստանանք

$$m' = 2m + \vec{K}/c^2 = 2m + Q/c^2 \quad (39.17)$$

Ի տարբերություն նյուտոնյան դեպքի, որում զանգվածն ադիտիվ է, ռելատիվիստական դեպքում $m' \neq 2m$ ։ Բախումից հետո առաջացած մասնիկի հանգստի զանգվածը հավասար է բախումից առաջ մասնիկների հանգստի զանգվածների գումարին, ավելացրած ջերմային էներգիային համարժեք ռելատիվիստական Q/c^2 զանգվածը։

Բախումից հետո Λ -ում մասնիկի էներգիայի համար կունենանք

$$E' = \frac{m'c^2}{\sqrt{1-v/c^2}} = \frac{2mc^2 + \vec{K}}{\sqrt{1-v/c^2}}, \quad (39.18)$$

որը լրիվին համապատասխանում է էներգիայի պահպանման օրենքին։ Հաշվելով բախումից առաջ և հետո Λ համակարգում մասնիկների լրիվ կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը և հաշվի առնելով (39.17) -ը, կստանանք

$$K - \vec{K} = \frac{2mc^2 + \vec{K}}{\sqrt{1-v/c^2}} - 2mc^2 - m'c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v/c^2}} - 1 \right) = Q, \quad (39.19)$$

Ուրեմն, ինչպես նյուտոնյան, այնպես էլ ռելատիվիստական մեխանիկայում համախմբի կինետիկ էներգիան թեև ձևափոխվում է տարբեր Σ -երում, սակայն նրա փոփոխությունն ինվարիանտ մեծություն է։

3. **Ռեքուպիտուլյում**։ Միջուկային վերափոխություններում հաճախ հարկ է



Նկ 6.2

լինում գործ ունենալ մասնիկների բա-
ցարժակ ոչ առաձգական բախման
հակադարձ պրոցեսի հետ Պա ծանր
միջուկի *ինքնակամ տրոհումն է* երկու
միջուկների Պիցուս A համակարգում

դադարի փիճակում գտնվող m զանգվածով մասնիկը տրոհվել է m_1 և m_2 հանգստի
զանգվածներով քելորների (Նկ 6.2) Բանի որ մինչև տրոհվելը իմպուլսը եղել է զրո
ապա առաջացած քելորները կունենան մեծությամբ հավասար և հակառակ ուղի-
ված իմպուլսներ

$$p_1 = -p_2; p_1 = p_2 \equiv p \quad (39.20)$$

Փաստորեն, տվյալ դեպքում լարորատոր համակարգը C համակարգ է էներ-
գիայի պահպանման օրենքը տալիս է

$$mc^2 = E_1 + E_2, \quad (39.21)$$

$$E_1 = m_1^0 c^2 + p_1^2 c^2; E_2 = m_2^0 c^2 + p_2^2 c^2 \quad (39.22)$$

Հաշվի առնելով (39.20) -ը, (39.22) -ից կստանանք

$$E_1 - m_1^0 c^2 = E_2 - m_2^0 c^2 = p^2 c^2 \quad (39.23)$$

Ստացված (39.21) և (39.23) առնչություններից կորոշենք քելորների էներգիաները

$$E_1 = \frac{m_1^2 + m_1^0^2 - m_2^0^2}{2m} c^2; E_2 = \frac{m_2^2 + m_2^0^2 - m_1^0^2}{2m} c^2 \quad (39.24)$$

Իսկ (39.23) -ից իմպուլսները

Բանի որ (39.22) -ից $E_1 > m_1^0 c^2$, $E_2 > m_2^0 c^2$, ապա (39.21) -ից հետևում է, որ միջու-
կի *ինքնակամ տրոհումը հնարավոր է, եթե նրա հանգստի զանգվածը մեծ է քելոր-
ների հանգստի զանգվածների գումարից* $m > m_1 + m_2$: Օգտվելով $E = mc^2 + K$
բանաձևից, մասնիկների հանգստի զանգվածների միջև կստանանք (39.17) -ին
համանման կապ $m = m_1 + m_2 + K/c^2$, որտեղ K -ն քելորների լրիվ կինետիկ էներ-
գիան է

§40. ԲԱՑԱՐԶԱԿ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԲԱՅՈՒՆ

Այսպես են կոչվում երկու մասնիկների միջև բախումները, որոնց ըն-
թացքում *ներքին դիսիպատիվ ուժեր չեն առաջանում*: Ուրեմն, այս բա-
խումների ժամանակ *պահպանվում է* ոչ միայն մասնիկների լրիվ իմպու-
լսը, այլև *լրիվ կինետիկ էներգիան*

Տարբերվում են մասնիկների բացարձակ առաձգական *ճակատային*
և ոչ *ճակատային* բախումներ: Զննարկենք մասնիկների բախումը նախ-
նյութաբանական մեխանիկայում

1. *Բացարձակ առաձգական ճակատային բախում*: Սա երկու մասնիկ-

Ներքին բախումն է, երբ բախումից առաջ և հետո մասնիկները շարժվում են նույն ուղղի երկայնքով:

Դիտարկենք Λ ՀԻՀ-ում m_1 և m_2 զանգվածներով մասնիկներ, որոնք բախումից առաջ շարժվում են v_1 և v_2 արագություններով: Որոշենք ճակատային բախումից հետո նրանց արագությունները:

Խնդրի լուծումը եապես պարզեցվում է, երբ օգտվում ենք C համակարգից, որում մասնիկները բախումից առաջ և հետո ունեն մեծությամբ հավասար և հակառակ ուղղված իմպուլսներ (նկ 6.3)



$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2; \quad \vec{p}_1' = -\vec{p}_2' \quad \text{նկ 6.3}$$

(40.1)

Այս իմպուլսների մեծությունների միջև կապը ստանալու համար օգտվենք կինետիկ էներգիայի պահպանման պայմանից:

$$\bar{K} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2'^2}{2m_2} = \bar{K}', \quad (40.2)$$

որը (40.1) հաշվառմամբ կտա

$$\bar{K} = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} = \frac{\vec{p}'^2}{2\mu}, \quad (40.3)$$

Այստեղից ստանում ենք

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p} = \vec{p}_1' = \vec{p}_2' = \vec{p}': \quad (40.4)$$

Այսինքն, C համակարգում մասնիկների իմպուլսների մեծությունները չեն փոխվում, միայն փոխվում են նրանց ուղղությունները (նկ. 6.3).

$$\vec{p}_1' = -\vec{p}_1; \quad \vec{p}_2' = -\vec{p}_2. \quad (40.5)$$

Բայց քանի որ

$$\vec{p}_i = m \vec{v}; \quad \vec{p}' = m_i \vec{v}_i', \quad (i = 1, 2), \quad (40.6)$$

ապա C համակարգում (40.5) առնչությունները ձիշտ են նաև արագությունների համար

$$\vec{v}_1' = -\vec{v}_1; \quad \vec{v}_2' = -\vec{v}_2. \quad (40.7)$$

Այժմ կարելի է անցնել հաշվարկի Λ համակարգին և որոշել բախումից հետո մասնիկների արագությունները.

$$v'_1 = v_1 + \vec{v}'_1 = v_1 - v_1 = v_1 - (v_1 - v_1) = 2v_1 - v_1,$$

$$v'_2 = v_2 + \vec{v}'_2 = v_2 - v_2 = v_2 - (v_2 - v_1) = 2v_1 - v_2,$$

որտեղ օգտվեցինք Λ -ից C , և հակառակ անցման արագությունների ձևափոխման կանոնից (և (40.7) առնչություններից: Ուրեմն՝

$$v'_1 = 2v_1 - v_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 (2v_1 - v_1)}{m_1 + m_2}, \quad (40.8)$$

$$v'_2 = 2v_1 - v_2 = \frac{m_2 v_2 + m_1 (2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}, \quad (40.9)$$

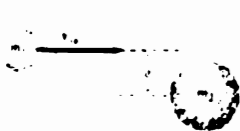
որոնք և տալիս են խնդրի լուծումը: Ստացվածից մասնավորապես հետևում է, որ եթե $m_1 = m_2$, ապա $v'_2 = v_1$ և $v'_1 = v_2$, այսինքն՝ *հավասար զանգված-ներով մասնիկները ճակատային բախման ժամանակ փոխանակում են իրենց արագությունները*: Եթե, օրինակ, բախումից առաջ մասնիկը եղել է դադարի վիճակում, ապա բախումից հետո հարվածող մասնիկը կանգ կառնի, իսկ մյուսը կշարժվի հարվածող մասնիկի արագությամբ:

Վերջում նկատենք հետևյալ հեշտ հիշվող առնչությունը

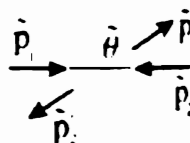
$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 = 2v_1. \quad (40.10)$$

որն ստացվում է (40.8) և (40.9) լուծումներից:

2. Բացարձակ առաձգական ոչ ճակատային բախում: Առանց սահմանափակելու խնդրի ընդհանրությունը, դիտարկենք այն դեպքը, երբ բախումից առաջ m_2 զանգվածով մասնիկն անշարժ է: Դա միշտ կարելի է կատարել, դիտարկելով բախման պրոցեսը բախումից առաջ m_2 զանգվածով մասնիկի արագությամբ շարժվող հաշվարկի համակարգում:



Նկ 6.4ա



Նկ 6.4բ

Դիցուք Λ համակարգում m_1 զանգվածով մասնիկը v_1 արագությամբ բախվել է անշարժ m_2 զանգվածով մասնիկին (Նկ.6.4ա)։ Որոշենք այդ մասնիկների հնարավոր իմպուլսները բախումից հետո:

Ուսումնասիրությունն սկսենք C համակարգից, որում երկու մասնի-

ները բախումից առաջ և հետո ունեն մեծությամբ հավասար և հակառակ ուղղված իմպուլսներ (նկ. 6.4բ)։ Բացի այդ, համաձայն կինետիկ էներգիայի պահպանման, $\dot{C}$ համակարգում իմպուլսների մեծությունները մնում են անփոփոխ

$$\vec{p}' = \vec{p} : \quad (40.11)$$

Սկզբնական շարժման ուղղություններից մասնիկների շեղման θ_1 և θ_2 անկյունները (նկ. 6.4ա) կախված են մասնիկների փոխազդեցության կոնկրետ պայմաններից (իատկապես, նշանառային b հեռավորությունից)։ Որոշենք բախումից հետո մասնիկների իմպուլսները Λ համակարգում։ Նորից օգտվելով $\dot{C} \rightarrow \Lambda$ անցման արագությունների ձևափոխության կանոնից, կստանանք

$$\vec{p}' = m \vec{v}' = m_1(\vec{v}_1 + \vec{v}') = m_1 \vec{v}_1 + \vec{p}'_1, \quad (40.12)$$

$$\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2 = m_2(\vec{v}_2 + \vec{v}') = m_2 \vec{v}_2 + \vec{p}'_2, \quad (40.13)$$

որտեղ, քանի որ $v_2 = 0$

$$v_1 = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}, \quad (40.14)$$

Փոխարելով (40.12), (40.13)-ի ձախ և աջ մասերը և հաշվի առնելով $\dot{C}$ համակարգում լրիվ իմպուլսի զրո լինելու պայմանը, կստանանք՝

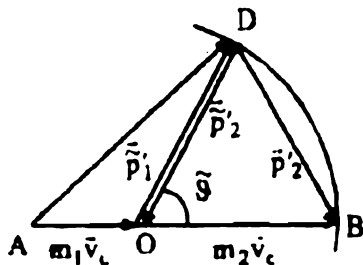
$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1 = \vec{p}_1, \quad (40.15)$$

որը լիովին համապատասխանում է իմպուլսի պահպանման օրենքին։ Օգտվելով ստացված առնչություններից, կարելի է կառուցել այսպես կոչված, *իմպուլսների վեկտորական դիագրամը* (նկ. 6.5)։

Բաժանենք $\vec{p}$ վեկտորը $m_1 \vec{v}_1$, $m_2 \vec{v}_1$ մասերի՝ համաձայն (40.15) առնչության։ Ընտրենք կամայական $\vec{\vartheta}$ անկյուն և տանելով O կետից $\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$ իմպուլսները, համաձայն (40.12), (40.13) բանաձևերի կառուցենք $\vec{p}'_1$ և $\vec{p}'_2$ վեկտորները AO և OB ուղղորդված հատվածների տեսքով։ Ընդ որում նկատենք, որ անկախ $\vec{\vartheta}$ -ի արժեքից $OD = OB$ ։ Իսկապես, համաձայն (40.11) և (39.6)-ի,

$$OD = \vec{p}' = \vec{p} = \mu |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \mu v, \quad (40.16)$$

քանի որ դիտարկվող դեպքում $v_2 = 0$, իսկ



նկ. 6.5

$$OB = m_2 v_1 = m_1 \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \mu v_1 \quad (40.17)$$

Ուրեմն, Օ կետը կարող է միայն գտնվել Օ կենտրոնով և $OD = \mu v_1$ շառավիղով շրջանագծի վրա՝ Փոփոխելով D կետի դիրքը շրջանագծի վրա կատանանք բախումից հետո մասնիկների իմպուլսների հնարավոր մեծություններն ու ուղղությունները՝ Հետևաբար, բացարձակ առաձգական ոչ ճակատային բախման համար, երբ մասնիկներից մեկը բախումից առաջ անշարժ է, իմպուլսների վեկտորական դիագրամը կառուցելու համար անհրաժեշտ է

-տանել բախումից առաջ մասնիկի p իմպուլսը պատկերող AB հատվածը

-գծել (40.17) շառավիղով կիսաշրջանագիծ, որի Օ կենտրոնը AB հատվածը բաժանի բախվող մասնիկների զանգվածներին համեմատական մասերի $AO:OB = m_1:m_2$:

Ստացված կիսաշրջանագիծը իմպուլսների ABD եռանկյան D գագաթի հնարավոր դիրքերի երկրաչափական տեղն է՝ AD և BD կողմերը ներկայացնում են լաբորատոր համակարգում բախումից հետո մասնիկների հնարավոր իմպուլսները:

Կախված զանգվածների m_1, m_2 հարաբերություններից, A կետը կարող է գտնվել շրջանագծի ներսում, նրա վրա կամ դրսում՝ Ընդ որում բոլոր դեպքերում ϑ անկյունը կարող է ընդունել հետևյալ արժեքները:

$$0 \leq \vartheta < \pi: \quad (40.18)$$

Լաբորատոր համակարգի ϑ անկյունը չունի որևէ իմաստ: Այստեղ կարևոր է բախումից առաջ մասնիկի իմպուլսի ուղղության փոփոխման α անկյունը (ցրման անկյուն) և բախումից հետո մասնիկների իմպուլսների կազմած $\vartheta = \alpha + \beta$ անկյունը: Նկ.6.6-ում պատկերված երեք վեկտորական դիագրամները համապատասխանում են բախվող մասնիկների զանգվածների հարաբերության տարբեր դեպքերին:

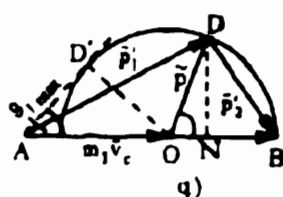
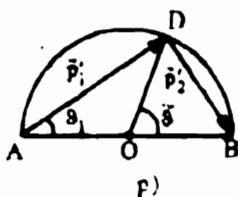
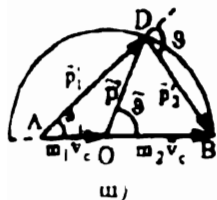
Նկ. 6.6ա դիագրամից հետևում է, որ ծանր մասնիկի հետ բախվելիս թեթև մասնիկն իր շարժման ուղղությունը կարող է փոխել բոլոր հնարավոր անկյուններով, ընդ որում բախումից հետո ծանր ու թեթև մասնիկների իմպուլսների միջև կազմած ϑ անկյունը միշտ գերազանցում է 90° -ը:

$$m_1 < m_2; \quad 0 < \vartheta_1 \leq \pi, \quad \vartheta > \pi/2: \quad (40.19)$$

Հավասար զանգվածներով մասնիկների ոչ ճակատային բախումից հետո իմպուլսները միշտ կազմում են 90° անկյուն՝ այսինքն՝ ուղղահայաց

են իրար: Իսկ թե՛րդ մասնիկի իմպուլսի փոփոխման անկյունը չի կարող գերազանցել 90° -ը (նկ. 6.6բ):

$$m_1 = m_2; 0 < \theta_1 \leq \pi/2, \theta = \pi/2. \quad (40.20)$$



Նկ 6.6

Ծանր մասնիկը անշարժ թեթև մասնիկին հարվածելուց հետո կարող է «ցրվել միայն առաք» Այսինքն գոյություն ունի ցրման առավելագույն անկյուն, որով սահմանափակված է բախման հետևանքով ծանր մասնիկի ցրման չափը:

$$m_1 > m_2, 0 < \vartheta_1 \leq \vartheta_{\max}, \vartheta < \pi/2: \quad (40.21)$$

Այստեղ ավելացրինք նաև նկ.6.6գ-ից հետևող այն փաստը, որ բախումից հետո մասնիկների իմպուլսները կազմում են սուր անկյուն:

Ցրման առավելագույն անկյունը կախված է միայն մասնիկների զանգվածների հարաբերությունից: Իրոք, $OD'A$ եռանկյունուց (նկ. 6.6գ)՝

$$\sin \vartheta_{\max} = \frac{OD'}{OA} = \frac{\bar{p}}{m_1 v_1} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (40.22)$$

որտեղ օգտվել ենք նաև (40.16), (40.14) առնչություններից:

Դիագրամների օգնությամբ կարելի է ստանալ նաև ϑ և ϑ_1 անկյունների կապը: Իսկապես, (նկ.6.6գ) կարող ենք գրել

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{ND}{AO + ON} = \frac{\bar{p} \sin \vartheta}{m_1 v_1 + p \cos \vartheta} = \frac{\sin \vartheta}{m_1 / m_2 + \cos \vartheta}, \quad (40.23)$$

որը ճիշտ է m_1/m_2 հարաբերության ցանկացած արժեքի դեպքում:

Սրանք են, փաստորեն, այն տեղեկությունները, որ կարելի էր ստանալ բախման վերաբերյալ, օգտվելով պահպանման օրենքներից: Դրանք խիստ արժեքավոր են, քանզի արտահայտում են քննարկվող երևույթի առավել ընդհանուր օրինաչափությունները և անկախ են մասնիկների իջև գործող ուժերի կոնկրետ տեսքից, բնույթից:

Չնայած (40.19)–(40.23) ընդհանուր օրինաչափությունների կարևորու-

թանձ, մենք չենք կարող նրանց օգնությամբ պարզել տված երկու (օրինակ, $m_1 > m_2$, դեպքում) մասնիկների բախման կոնկրետ ելքը: Պահպանման օրենքները պնդում են, որ մեզ հետաքրքրող բախման ելքը մեկն է (40.21), ով տրվող ելքերի բազմությունից: Իսկ թե ո՞րը, - պահպանման օրենքների մեթոդը պատասխանել չի կարող: Դրա պատասխանը կարելի է ստանալ միայն շարժման հավասարումների լուծման միջոցով, եթե հայտնի են մասնիկների միջև գործող ուժերը, և այսպես կոչված, բախման նշանառային δ հեռավորությունը, որը բախումից առաջ շարժվող մասնիկի ինվոլյսի բազուկն է անշարժ մասնիկի նկատմամբ:

Ուշադրություն դարձրեք այն հանգամանքին, որ $m_1 > m_2$, դեպքում ցրման θ անկյան միևնույն առժեքին (բացի θ_{min} անկյամբ ցրման դեպքից) համապատասխանում են բախումից հետո մասնիկների երկու տարբեր զույգ իմպուլսներ: Դա պարզորոշ երևում է նկ.6.6գ-ից, քանի որ միևնույն θ -ին համապատասխանում են իմպուլսների վեկտորական եռանկյան D գագաթի երկու տարբեր դիրքեր: Խնդիրը շարժման հավասարումները օգնությամբ լուծելիս հաստատվում է այդ վիստրը:

§41. ՈՉ ԱՆՍԶԳԱԿԱՆ ԲԱԽՈՒՄ

Ոչ առածգական բախման ժամանակ փոխվում են բախվող մասնիկների (կամ նրանցից մեկի) ներքին էներգիաները, հետևաբար նաև նրանց լրիվ կինետիկ էներգիան: Նշանակենք բախման հետևանքով մասնիկների կինետիկ էներգիայի աճը Q .

$$K' - K = Q: \quad (41.1)$$

Ոչ առածգական բախումները լինում են *էկզոէներգետիկ* ($Q > 0$) կամ *էնդոէներգետիկ* ($Q < 0$): Առաջին դեպքում համախմբի կինետիկ էներգիան բախումից հետո աճում է (ի հաշիվ մասնիկների ներքին էներգիաների նվազման), իսկ երկրորդ դեպքում նվազում:

Մեր նպատակն է որոշել բախումից հետո մասնիկների հնարավոր իմպուլսները: Դիտարկենք խնդիրը նախ հաշվարկի C համակարգում:

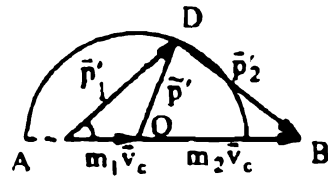
Քանի որ կինետիկ էներգիայի փոփոխությունն անկախ է հաշվարկի համակարգի ընտրությունից, ապա

$$\vec{K}' - \vec{K} = (\vec{p}'^2 - \vec{p}^2) / 2\mu = Q, \quad (41.2)$$

որտեղից

$$\vec{p}' = \sqrt{2\mu(\vec{K} + Q)} \neq \vec{p} \quad (41.3)$$

Որտեմն, ոչ առաձգական բախման ժամանակ C համակարգում մասնիկի իմպուլսի մեծությունը փոխվում է ընդ որում բախումից հետո մասնիկի իմպուլսն աճում է (պոտենցիալի դեպքում և նվազում է նորոգելի դեպքում)



Նկ.6.7

Այժմ բախումը դիտարկենք հաշվարկի լաբորատոր համակարգում, որտեղ բախումից առաջ m_1 զանգվածով մասնիկը եղել է անշարժ. Նորից հարմար է դիմել վեկտորական դիագրամների մեթոդին, որը համանման է նախորդ պարագրաֆում դիտարկածին. Նորից անհրաժեշտ է բախումից առաջ մասնիկի $p_1 = AB$ իմպուլսը O կետով բաժանել մասնիկների զանգվածներին համեմատական մասերի, քանի որ այս դեպքում նորից ճիշտ են (40.12) - (40.15) առնչությունները: Տանելով O կետի շուրջ (40.16) շառավիղով կիսաշրջանագծի (Նկ. 6.7), ստանանք այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցում կարող է գտնվել իմպուլսների վեկտորական եռանկյունը D գագաթը: Քանի որ ոչ առաձգական բախման դեպքում $\vec{p}' \neq \vec{p}$, ապա $\vec{p}' \neq m_2 \vec{v}_c$, այնպես որ B կետն արդեն չի գտնվի շրջանագծի վրա: Ընդ որում $Q < 0$ դեպքում B կետը կգտնվի շրջանագծի ներսում, իսկ $Q > 0$ դեպքում՝ դրսում:

Կոնտակտային ոչ առաձգական բախումները (հարված) ընդունված է բնութագրել վերականգնման գործակից կոչվող մեծությամբ: Եթե մարմինը շարժվելով v_1 արագությամբ բախվում է v_2 արագությամբ շարժվող մարմնին, ապա

$$k = \frac{|\vec{v}'_{1n} - \vec{v}'_{2n}|}{|\vec{v}_{1n} - \vec{v}_{2n}|}, \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (41.4)$$

Մեծությունը կոչվում է վերականգնման գործակից, որտեղ n -ը բախվող մարմինների հպման ընդհանուր մակերևույթի նորմալն է: Եթե երկրորդ մարմինն անշարժ պատ է, ապա

$$k = |\vec{v}'_{1n} / \vec{v}_{1n}|:$$

Պարզ է, որ $k = 1$ դեպքում ունենք բացարձակ առաձգական, իսկ $k = 0$ դեպքում - բացարձակ ոչ առաձգական բախումներ:

**§42. ՌԵԼԱՏԻՎԻՍՏԱԿԱՆ ՄԵՄԱՆԻԿԱՑԻ ՓՈՐՁԱՐԱՐԱԿԱՆ
ՀԻՄՆԱՎՈՐՈՒՄԸ**

1. Էլեկտրոն-էլեկտրոն բախումը: Ռիցուք m հանգստի զանգվածով էլեկտրոնը v_1 արագությամբ շարժվելով բախվում է դադարի վիճակում գտնվող համանման մասնիկին: Բախումից հետո իմպուլսները նշանակենք $\vec{p}_1$ և $\vec{p}_2$: իսկ նրանց կազմած անկյունները բախումից առաջ մասնիկի շարժման ուղղության հետ θ_1, θ_2 (նկ. 6.8): Ռելատիվիստական մեխանիկայի պահպանման օրենքների օգնությամբ կարելի է որոշել $\theta_1 + \theta_2$ անկյունը, որը կարող է ստուգվել փորձում:

Ընտրենք դեկարտյան X, Y առանցքների նկ. 6.8-ում տրված ծնով Մասնիկների C համակարգում բախումից առաջ և հետո իմպուլսների համար կարող ենք գրել.

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \quad \vec{P}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0: \quad (42.1)$$

Լաբորատոր համակարգում բախումից առաջ համախմբի լրիվ իմպուլսը, քանի որ երկրորդ մասնիկը անշարժ է, կլինի

$$\vec{P} = \vec{p} = \vec{p}_1, \quad (42.2)$$

իսկ բախումից հետո՝

$$\vec{P}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (42.3)$$

Համաձայն իմպուլսի պահպանման օրենքի $\vec{P}' = \vec{P}$: Օգտվելով $C \rightarrow A$ անցման իմպուլսի ծափոխության բանաձևից՝

$$\vec{P}_1 = \frac{P_1 - v_1 E / c^2}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}}, \quad (42.4)$$

և հաշվի առնելով $\vec{P}_1 = 0$ պայմանը, ինտեգրալի կենտրոնի v_1 արագության համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը.

$$v = c^2 P_1 / E, \quad (42.5)$$

որտեղ E -ն բախումից առաջ համախմբի լրիվ էներգիան է. Հաշվի առնելով (42.5)-ում իմպուլսի և էներգիայի

$$P_1 = p_1 = \frac{mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}}, \quad E = mc^2 + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}} \quad (42.6)$$

բանաձևերը, ինտեգրալի կենտրոնի արագության համար կատանանք.

$$v_i = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - v_i^2/c^2}}; \quad (42.7)$$

Պարզ է, C համակարգում միատեսակ մասնիկները պետք է ունենան մեծությամբ հավասար և հակառակ ուղղված արագություններ. Քանի որ բախումից առաջ երկրորդ մասնիկը լաբորատոր համակարգում գտնվել է դադարի վիճակում, ապա C համակարգում այն կշարժվի v_i արագությամբ. Ուրեմն

$$\vec{v} = \vec{v}_2 = v_i, \quad (42.8)$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \vec{E}/2, \quad (42.9)$$

որտեղ $\vec{E}$ -ն C համակարգում մասնիկների լրիվ էներգիան է:

Օգտվելով C համակարգում էներգիայի և իմպուլսի պահպանման օրենքներից, կտանանք մասնիկների իմպուլսների և էներգիաների արժեքները բախումից հետո.

$$\vec{p}'_1 = \vec{p}'_2 = \sqrt{\vec{E}_1'^2/c^2 - mc^2} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}, \quad (42.10)$$

$$\vec{E}_1' = \vec{E}_2' = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \vec{E}'/2: \quad (42.11)$$

Ուրեմն, բախման հետևանքով մասնիկները C համակարգում փոխում են միայն իրենց արագությունների նշանը, իսկ առանձին մասնիկների իմպուլսների մեծություններն ու էներգիաները նույնն են, ինչ բախումից առաջ Այս իմաստով այստեղ իրավիճակը համանման է նյութոսյանին:

(42.10) և (42.11) առնչություններից հետևում է (42.5)-ին համանման կապ.

$$v_i \vec{E}_1'/c^2 = \vec{p}': \quad (42.12)$$

Այ. 6.8-ից ստանում ենք

$$\operatorname{tg} \theta = \vec{p}'_1 / \vec{p}'_2, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = -\vec{p}'_1 / \vec{p}'_2, \quad (42.13)$$

Օգտվելով բախումից հետո իմպուլսի X և Y բաղադրիչների ձևափոխության (31.16) բանաձևերից և հաշվի առնելով (42.10)-(42.13) առնչու-

$$ig\vartheta_1 ig\vartheta_2 = \frac{(1 - v_1^2/c^2)\bar{p}_1^{\prime 2}}{\bar{p}_1^{\prime 2} - \bar{p}_2^{\prime 2} + v_1^2 E^2}$$

որտեղից, հաշվի առնելով (42.12)-ը, կունենանք

$$ig\vartheta_1 ig\vartheta_2 = 1 - v_1^2/c^2 \quad (42.14)$$

Տեղադրելով այստեղ v_1 -ի համար (42.7) արտահայտությունը, վերջապես կստանանք՝

$$ig\vartheta_1 ig\vartheta_2 = 2/(1 + \gamma) \leq 1, \quad (42.15)$$

որտեղ

$$\gamma = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2} \geq 1 \quad (42.16)$$

Ստացվեց կարևոր արդյունք՝ դիտարկվող անկյունների տանգենսների արտադրյալը անկախ է մասնիկների հանգստի զանգվածից (միատեսակ մասնիկների համար) և կախված է միայն բախումից առաջ շարժվող մասնիկի արագությունից.

Նկատենք, որ դասական մեխանիկայի սահմանում ($\gamma = 1$) (42.15), (42.16) բանաձևերից ստացվում է §40-ի արդյունքը.

$$ig\vartheta_1 ig\vartheta_2 = 1, \quad ig(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \infty,$$

որտեղից

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2, \quad (42.17)$$

այսինքն՝ բախումից հետո միատեսակ մասնիկներն ունեն իրար ուղղահայաց իմպուլսներ: Ռասական մեխանիկայում հայտնի այս արդյունքը միշտ կարելի է դիտել բիլիարդի գնդիկների ոչ ճակատային բախումներում: Այն հաստատվել է փորձնականորեն Վիլսոնի խցիկում հեղիումի միջուկների հետ α մասնիկների բախման փորձերում. Շնորհիվ α մասնիկների արագության փոքրության, այս բախումները լիովին ենթարկվում են նյուտոնյան մեխանիկային: Եթե բախումից առաջ մասնիկը շարժվում է լույսին մոտ $v \sim c$ արագությամբ, ապա $\gamma > 1$ և (42.15)-ից կստանանք $ig\vartheta_1 ig\vartheta_2 < 1$, այսինքն՝ բախումից հետո մասնիկների իմպուլսների կազմած անկյունը սուր է.

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 < \pi/2, \quad \text{եթե } \gamma > 1. \quad (42.18)$$

Նկատենք որ նյուտոնյան մեխանիկայում նման իրավիճակի հանդիպում ենք, երբ ծանր մասնիկը բախվում է նախապես անշարժ մասնիկի հետ (տես (40.21) արդյունքը): Ի դեպ, մեր կողմից դիտարկված բախման

դեպքում, եթե ճշմարիտ է արագությունից ռելատիվիստական զանգվածի կախված լինելու փաստը, հաշվարկի լաբորատոր համակարգում մենք գործ ունենք հենց այդ դեպքի հետ։ Ստացված (42.18) արդյունքը ստուգել է 1932թ. *Չեմպիոնը*՝ Վիլսոնի խցիկում անշարժ էլեկտրոնների վրա β մասնիկների ցրման փորձերում։ Եթե լրացուցիչ հայտնի լինի β մասնիկների արագությունը (հետևաբար, նաև γ -ն), ապա կարելի է քանակապես ստուգել ռելատիվիստական (42.15) բանաձևը։ Նման չափումներով *Չեմպիոնը* լիովին հաստատել է նշված բանաձևը, դրանով իսկ հիմնավորելով ռելատիվիստական պահպանման օրենքները բախումների համար և արագությունից զանգվածի ունեցած կախվածությունը։

2. *Կոմպտոնի էֆեկտը*։ Դիտարկենք անշարժ ազատ էլեկտրոնի վրա ν_0 հաճախության ($\lambda_0 = c/\nu_0$) ալիքի երկարության քվանտի ցրումը (նկ. 6.9)։ Նշանակելով սկզբնական ուղղությունից քվանտի ցրման անկյունը θ , իմպուլսի և էներգիայի պահպանման օրենքները եզրենք հետևյալ կերպ.

$$\frac{h\nu_0}{c} n_0 = \frac{h\nu}{c} n + \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad (42.19)$$

$$mc^2 + h\nu_0 = h\nu + \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}};$$

Այստեղ n_0 և n միավոր վեկտորները ցույց են տալիս ցրումից առաջ և հետո քվանտի տարածման ուղղությունները, (42.19) - ից ստանում ենք.

$$\frac{m^2 u^2}{1-u^2/c^2} = \frac{h^2}{c^2} (\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0\nu \cos \theta),$$

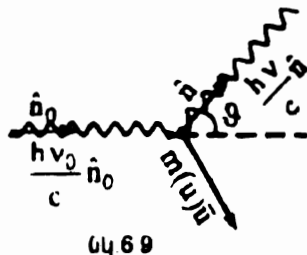
$$\frac{m^2 c^4}{1-u^2/c^2} = h^2 (\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0\nu) + m^2 c^4 + 2hmc^2 (\nu_0 - \nu),$$

որոնցից արտաքսելով u -ն, կունենանք

$$\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (42.20)$$

որը և բովանդակում է *Կոմպտոնի էֆեկտը*։ Այստեղ

$$\lambda_0 = \frac{h}{mc} = 2.42 \cdot 10^{-12} \text{ մմ}. \quad (42.21)$$



կոչվում է էլեկտրոնի կոմպտոնյան ալիքի երկարություն: Ուրեմն

$$\Delta\lambda = 2\lambda_e \sin^2 \theta / 2: \quad (42.22)$$

Նկատենք, որ ազատ էլեկտրոնի վրա ցրվելիս γ -քվանտի ալիքի երկարությունը մեծանում է: Ղա հասկանալի է, քանի որ ցրման ժամանակ քվանտը էլեկտրոնին հաղորդում է որոշակի էներգիա և իմպուլս: Իսկ քվանտի էներգիայի և իմպուլսի նվազումը համապատասխանում է նրա հաճախության նվազմանը (կամ ալիքի երկարության աճին): Ցրված γ -քվանտի ալիքի երկարության փոփոխության անմիջական չափումները (1920թ.) հաստատել են (42.22) բանաձևը:

3. Ժամանակակից միջուկային ֆիզիկան փորձնականորեն հիմնավորել է մասնիկի դադարի էներգիայի $E_{\text{դ}} = mc^2$ բանաձևը: Ղա կատարվել է տարրական մասնիկների աննիհիլացիայի երևույթի ուսումնասիրությամբ: Այս երևույթը փորձնականորեն ուսումնասիրվում է սկսած 1932 թվից, երբ հայտնաբերվեց էլեկտրոնի հակամասնիկը՝ պոզիտրոնը: Էլեկտրոնի զանգվածով դրական լիցքավորված մասնիկը՝ էլեկտրոնի և պոզիտրոնի աննիհիլացիայի հետևանքով անջատվում է $2mc^2$ էներգիա՝ էլեկտրամագնիսական ճառագայթման տեսքով: Այդ էներգիայի չափումներով էլ հաստատվել է $E_{\text{դ}} = mc^2$ բանաձևը: Իրականացվել է նաև հակադարձ պրոցեսը, երբ էլեկտրամագնիսական դաշտի քվանտը ծնում է էլեկտրոն-պոզիտրոն զույգ: Սակայն դրա համար քվանտը պետք է օժտված լինի $2m_{e^+}c^2$ -ուց մեծ էներգիայով:

§43. ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԶԱՆԳՎԱԾՈՎ ՄԱՐՄՆԻ ԵԱՐԺՈՒՄԸ:

Այս պարագրաֆում օգտագործվող «փոփոխվող զանգված» հասկացությունը չպետք է շփոթել արագությունից զանգվածի ռելատիվիստական կախվածության հետ: Փոփոխական զանգվածով մարմնի շարժում ասելով հասկանում են շարժումներ, որոնց ընթացքում շարժվող մարմնում տեղի է ունենում նյութի անընդհատ արտահոսք կամ ներհոսք: Օրինակ՝ փողոցները ջրով ավտոմեքենայի շարժումը, գերհագեցած ջրային գլորչում անծրևի կաթիլի անկումը, որի ընթացքում կաթիլը հարստանում է ջրի նորանոր մոլեկուլներով, օվկիանոսում հալչող սառցաբեկորի շարժումը, ընթացքում բեռնաթափվող կամ բեռնավորվող վագոնի շարժումը, ռեակտիվ ինքնաթիռների և հրթիռների շարժումը և այլն: Թեև փոփոխվող զանգվածով մարմինների շարժման ուսումնասիրություններն ունեն չուր

երկու հարյուր տարվա պատմություն. սակայն դրանք գործնական մեծ փարտություն ստացան XX դարի կեսերից. շնորհիվ հրթիռային շարժման բուռն զարգացման:

1. *Փոփոխվող զանգվածով մարմնի շարժման հավասարումը*: Դիցուք հաշվարկի լաբորատոր համակարգում ժամանակի t պահին ունենք երկու մասնիկներ՝ $m(t)$ և dm զանգվածներով. որոնք շարժվում են համապատասխանաբար v և v_1 արագություններով այնպես, որ $t + dt$ պահին բախվելով միանում են. առաջացնելով $m + dm$ զանգվածով $v + dv$ արագությամբ շարժվող մասնիկ: Ինչպես նկատում եք, տարրական dt ժամանակում ընթացող այս երևույթը մասնիկների *բացարձակ ոչ առաձգական բախում է* (եթե $dm < 0$) կամ *մասնիկի ինքնական տրոհում* (եթե $dm < 0$). Ֆիզիկական տեսանկյունից սա՝ է փոփոխական զանգվածով մարմնի շարժումն ամեն մի տարրական dt ժամանակում:

Որոշենք dp ժամանակում համախմբի իմպուլսի աճը: Զանի որ

$$p(t) = m(t)v + v_1 dm, \quad p(t + dt) = (m + dm)(v + dv),$$

այսպես

$$dp = p(t + dt) - p(t) = m dv + (v - v_1) dm. \quad (43.1)$$

որտեղ անտեսվեց $dm dv$ երկրորդ կարգի անկերը փոքրը

Համաձայն (20.13) հավասարման. իմպուլսի (43.1) աճը հավասար է dt ժամանակում համախմբի վրա ազդող համազոր ուժի իմպուլսին

$$m dv + (v - v_1) dm = F dt,$$

որտեղից

$$m dv/dt + (v - v_1) dm/dt = F. \quad (43.2)$$

Այստեղ

$$u = v - v_1 \quad (43.3)$$

վեկտորը մասնիկին միացող կամ նրանից անջատվող զանգվածի արագությունն է մասնիկի հետ կապված հաշվարկի համակարգում և կոչվում է *միակցվող զանգվածի հարաբերական արագություն*. Հաշվի առնելով (43.3) նշանակումը, (43.2) հավասարումը կներկայացնենք հետևյալ տեսքով

$$m dv/dt = F + u dm/dt \quad (43.4)$$

Սա փոփոխվող զանգվածով մարմնի շարժման հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումն է, որն ստացվել է *Մեշչերսկու* կողմից 1897թ. և կրում է

Նրա անունը (պարզվում է, համանման հավասարում ստացած է եղել չեխ գիտնական *Բուկուան* դեռևս 1812թ.): Այս հավասարումը Նյուտոնի 2-րդ օրենքն արտահայտող հավասարումից տարբերվում է նրանով, որ այստեղ մարմնի զանգվածը ժամանակի ընթացքում փոփոխվող մեծություն է Այդ փոփոխությամբ պայմանավորված

$$F_r = u \, dm/dt \quad (43.5)$$

լրացուցիչ անդամը կոչվում է *ռեակտիվ կամ հրթիռային ուժ*: Նյութական կետի դինամիկայի

$$m \, dv/dt = F \quad (43.6)$$

հավասարումից Մեշչերսկու հավասարման նշված տարբերությունը արտահայտում է ուսանելի կարևոր մի փաստ. եթե ստացված է ֆիզիկական հավասարում նրանում մտնող ինչ-որ պարամետրի հաստատուն արժեքի դեպքում, ապա ընդհանուր դեպքում չի կարելի օգտվել այս հավասարումից, եթե այդ պարամետրը կրում է փոփոխություններ, քանի որ վերջինս կարող է բերել հավասարման մեջ նոր անդամների առաջացման

Եթե միակցվող զանգվածը լաբորատոր հաշվարկի համակարգում անշարժ է՝ $v_1=0$ (օրինակ, երբ կաթիլն ընկնում է ջրային գոլորշիներով հագեցած միջավայրում), ապա շարժման հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{d}{dt} (m(r) v) = F \quad (43.7)$$

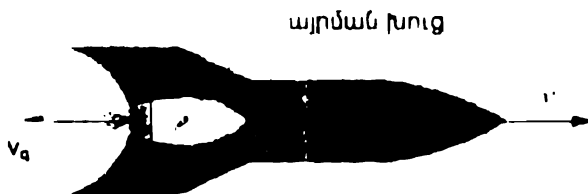
Իսկ եթե զրո է միակցված զանգվածի հարաբերական ս արագությունը (ինչը, օրինակ, տեղի ունի օվկիանոսում հալչող սառցաբեկորի շարժման դեպքում), ապա կբացակայի նաև մարմնի վրա ռեակտիվ ուժի ազդեցությունը, և կստանանք

$$m(r) \frac{dv}{dt} = F : \quad (43.8)$$

2. Ռեակտիվ ուժի առաջացումն ունի պարզ ֆիզիկական բացատրություն: Պարզաբանենք այն հրթիռային շարժման օրինակով: Հրթիռի այրման խցում վառելիքի այրումից առաջացած գազերը մեծ P ճնշման տակ ժայթքում են դուրս՝ հրվելով $P\Sigma$ ճնշման ուժով, որտեղ Σ -ն ելքային անցքի մակերեսն է (նկ. 6.10): Համաձայն Նյուտոնի 3-րդ օրենքի, հրթիռի պատյանն իր հերթին կենթարկվի նույն մեծությամբ, բայց հակառակ ուղղված ուժի ազդեցությանը, որն էլ հենց ռեակտիվ ուժն է: Դժվար չէ գնահատել այդ ուժի մեծությունը, որը պատյանին միավոր ժամանակում հա-

դրողված իմպուլսն է: Պատյանի նկատմամբ դադարի վիճակում գտնվող վառելանյութը այրվելուց հետո միավոր ժամանակում ստանում է

$$u = v_g - v \quad (43.9)$$



նկ 6 10

արագություն. հետևաբար կրում է μ_g իմպուլսի փոփոխություն. որտեղ v_g -ն գազի արագությունն է լաբորատոր ՀՀ-ում, իսկ $\mu_g = dm_g/dt$ - միավոր ժամանակում ժայթած գազի զանգվածը: Ըստ զանգվածի պահպանման օրենքի $dm_g = -dm$, որտեղ dm -ը dt ժամանակում հրթիռի զանգվածի փոփոխությունն է: Այնպես որ, հրթիռը կենթարկվի $u dm/dt$ ռեակտիվ ուժի ազդեցությանը:

Հրթիռային շարժման մեջ միակցվող զանգվածի (43.9) արագությունն անվանում են *գազային չիթի արագություն*:

3. Ֆիզիկական բառացի: Հրթիռային շարժումը լուսաբանելու համար լուծենք Մեշչերսկու հավասարումը պարզագույն դեպքում, երբ ծանրության և օդի դիմադրության ուժերի ազդեցությունները հրթիռի վրա անտեսվում են:

Դիցուք մեկնարկի $t = 0$ պահին հրթիռի M զանգվածով պատյանում պարունակվում է m զանգվածով վառելանյութ: Համարելով գազային չիթի արագությունը անփոփոխ, որոշենք արագությունը, որ ծեռք կբերի պատյանը վառելանյութի լրիվ այրումից հետո:

Պրոյեկտենք (43.4) հավասարումը հրթիռի շարժման ուղղությամբ

$$m dv = -u dm,$$

որտեղից՝

$$\int \frac{dm}{m} = -\frac{1}{u} \int dv; \quad \ln m = -\frac{v}{u} + c.$$

Եւ c -ը ինտեգրման հաստատունն է, որի համար, օգտվելով շարժման սկզբնական պայմանից՝

$$v(t=0) = 0, \quad m(t=0) = M + m_0 \equiv m_1,$$

կտանանք $c_i = \ln m_i$: Ուրեմն

$$v = u \ln m_i : m_i, \quad (43.10)$$

կամ

$$m = m_0 e^{-v/u} : \quad (43.11)$$

Վերջին արտահայտությունները *Ցիոկովսկու բանաձևերն են* Պրանք ստացված են դանդաղ շարժումների համար, երբ թե՛ v և թե՛ u արագությունները անհամեմատ փոքր են լույսի արագությունից: (43.10) բանաձևում տեղադրելով $m = M$, կորոշենք այն արագությունը, որ ձեռք կբերի հրթիռի պատյանը վառելիքի լիով ալյուսինգ հետո:

$$v = u \ln(1 + m_i : M) : \quad (43.12)$$

Նկատում ենք, որ պատյանի արագությունը համեմատական է գազային շիթի արագությանը և լուգարիթմական կախման մեջ է վառելանյութի և պատյանի զանգվածների հարաբերությունից:

Ժամանակակից քիմիական վառելանյութով աշխատող հրթիռներում գազային շիթի արագությունը չի գերազանցում 4.5 կմ/վ-ը: Պա փոքր արագություն է տիեզերական թռիչքների համար: Պրանում կարելի է համոզվել պարզագույն հաշվարկով: Ամենափոքր արագությունը, որ անհրաժեշտ է հաղորդել պատյանին, Երկրի ձգողության դաշտից այն հեռացնելու համար, հավասար է 11.2 կմ/վ, իսկ Արեգակնային համակարգից հեռանալու համար՝ 16.7 կմ/վ (§66, երկրորդ և երրորդ տիեզերական արագություններ): Ղեկար չէ հաշվել, որ միայն այդ արագություններն ստանալու համար անհրաժեշտ է այդել հրթիռի պատյանի զանգվածից համապատասխանաբար 16 և 63 անգամ մեծ զանգվածով քիմիական վառելանյութ, եթե ընդունենք $u = 4$ կմ/վ: Սակայն հիշենք, որ այս հաշվարկներում հաշվի չեն առնված օդի դիմադրության ուժերի դեմ կատարվող աշխատանքը, որը կպահանջի լրացուցիչ վառելանյութի այրում:

4. Ռելատիվիստական հրթիռներ: Սրանք այսօր ներկայացնում են զուտ տեսական հետաքրքրություն, քանի որ լույսին մոտ արագությամբ շարժվող հրթիռներ պատրաստելու տեխնիկական դժվարությունների հաղթահարումը ապագայի գործ է: Բնական է, եթե հրթիռը շարժվի լույսին մոտ արագությամբ, ապա այն չի նկարագրվի (43.11)–(43.12) բանաձևերով:

Պիցուք հաշվարկի Λ համակարգում մեծ v արագությամբ շարժվող մասնիկը ինքնակամ տրոհվում է իր շարժման ուղղությամբ $v + dv$, և հակառակ ուղղությամբ v , արագություններով շարժվող m և dm զանգվածներով մասերի: Տրոհումից հետո դրանք կունենան

$$p' = \frac{m(v + dv)}{\sqrt{1 - (v + dv)^2/c^2}}; \quad p'_1 = \frac{-v_1 dm}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}; \quad (43.13)$$

$$E' = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v + dv)^2/c^2}}; \quad E'_1 = \frac{c^2 dm}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}};$$

ումպուլսներ և էներգիաներ:

Հաշվարկի C համակարգում, որը շարժվում է $v_1 = v$ արագությամբ, յոդոված մասերը կունենան

$$\vec{p}' = \frac{p'_1 - vE'_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mdv}{1 - v^2/c^2};$$

$$\vec{p}'_1 = \frac{p'_1 - vE'_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = - \frac{(v + v_1)dm}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - v_1^2/c^2)}} \quad (43.14)$$

ումպուլսներ, որտեղ հաշվի առնվեցին (43.13) բանաձևերը և անտեսվեցին երկրորդ կարգի անվերջ փոքրերը:

Օգտվելով արագությունների ծափոխման ռելատիվիստական կանոնից, որոշենք միակցվող զանգվածի հարաբերական արագությունը.

$$u = - \frac{v + v_1}{1 + v_1 v/c^2}, \quad \text{որտեղից} \quad v_1 = - \frac{v + u}{1 + uv/c^2}; \quad (43.15)$$

Համաձայն C համակարգի հիմնական հատկության՝ $\vec{p}' + \vec{p}'_1 = 0$:

Հաշվի առնելով վերջինում (43.14) և (43.16) բանաձևերը, u մեծության գծային մոտավորությամբ, կստանանք.

$$\frac{dv}{c^2 - v^2} = - \frac{u}{c^2} \frac{dm}{m}$$

Ընդունելով $u = c \cos \alpha$ և ինտեգրելով (43.17) հավասարումը, օգտվելով (43.10) սկզբնական պայմաններից, կստանանք *Ցիոլկովսկու* (43.11) բանաձևի ռելատիվիստական ընդհանրացումը.

$$m(v) = m_0 \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{c^2/2u} \quad (43.16)$$

Միևնույն զանգվածով վառելանյութի այրման դեպքում (43.16) բանաձևից ստանում ենք հրթիռի պատյանի *ափսիսի փոքր* արագություն, քան տրվում է *Ցիոլկովսկու* բանաձևով: Ղա բացատրվում է ռելատիվիստական հրթիռի իներտության աճով:

Ղանդաղ շարժումների դեպքում (43.16) բանաձևից ստացվում է Ցիդ-կովսկու արդյունքը: Իրոք, այդ դեպքում

$$\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \approx 1 + 2 \frac{v}{c} + \dots$$

այնպես որ

$$m \approx m_0 \left(1 + 2 \frac{v}{c} \right)^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)} \mapsto m_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{v}{c}},$$

որտեղ օգտվեցինք հետևյալ հայտնի սահմանից՝ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$.

ԳԼՈՒԽ VII

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

Կիրառական նշանակություն ունեցող շատ խնդիրներում հարկ է լինում գործ ունենալ պինդ մարմինների հավասարակշռության կամ շարժման հետ: Ընդ որում, առավել հետաքրքրություն են ներկայացնում պինդ մարմնի շարժումները, որոնք ուղեկցվում են ինչ-որ առանցքների շուրջ պտույտներով: Ի դեպ, անչափ հետաքրքիր այս շարժումների ուսումնասիրությունը բավականին բաղո՞ւմաթեմատիկական խնդիր է, որն անալիտիկ մեթոդներով լուծվում է միայն համեմատաբար պարզ դեպքերում: Դրանցից պարզագույնները կոչվում են այս գլխում, որտեղ մարմինը փամարենք բացարձակ պինդ:

Պինդ մարմնի շարժման ուսումնասիրությունը կարևոր է նաև մեկ այլ առումով: Պինդ մարմնի հետ կապում են հաշվարկի համակարգ: Այնպես որ, պինդ մարմնի շարժման ուսումնասիրությունը տալիս է հաշվարկի համակարգի հնարավոր շարժումները, որը ֆիզիկայի համար ներկայացնում է մեծ կարևորություն:

§44. ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ԵԱՐԺՄԱՆ ՁԵՎԵՐՆ ՈՒ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿԵՌՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Պինդ մարմնի շարժման ձևերը:** Պինդ մարմինն օժտված է վեց ազատության աստիճանով (§19). Նման համակարգի շարժման նկարագրության համար անհրաժեշտ են վեց սկալար կամ երկու վեկտորական հավասարումներ: Դրանք համախմբի ինտեգրալի կենտրոնի շարժման

$$m \frac{d\mathbf{y}_c}{dt} = \sum \mathbf{F}^i \equiv \mathbf{F}^*, \quad (44.1)$$

և մոմենտների

$$\frac{dL}{dt} = \sum [r, F'] = M' \quad (4.1)$$

հավասարումներն են ընդ որում մոմենտների հավասարումը կարելի է կիրառել ինչպես կամայական անշարժ O կետի, կամ մարմնի ինտեգրալ կենտրոնի, այնպես էլ ցանկացած այլ կետի նկատմամբ, որի արագությունը ժամանակի ցանկացած պահին զուգահեռ է պինդ մարմնի ինտեգրալ կենտրոնի արագությանը (տե՛ս §36): Եթե պինդ մարմնի շարժման վրա դրված են կապեր, ապա նրանք, նվազեցնելով ազատության աստիճանների թիվը, փոքրացնում են շարժումը նկարագրող հավասարումները քանակը:

Ըստ կապերի բնույթի տարբերվում են պինդ մարմնի շարժման հետևյալ ծները:

Համընթաց շարժում: Այս շարժման ընթացքում պինդ մարմնի *կանաչական երկու կետերը միացնող հատվածը մնում է իր սկզբնական դիրքի զուգահեռ:*

Համընթաց շարժվող պինդ մարմնի բոլոր կետերը կատարում են միևնույն շարժումը, հետևաբար, ժամանակի տվյալ պահին ունեն միևնույն արագություններն ու արագացումները Ուրեմն, համընթաց շարժման ուսումնասիրությունը հանգեցվում է նրա որևէ կետի, օրինակ, ինտեգրալ կենտրոնի, շարժման ուսումնասիրությունը: Փաստորեն, *համընթաց շարժումն օժտված է երեք ազատության աստիճանով և լիովին նկարագրվում է (4.1) հավասարումով:*

Աքսիալ շարժում: Սա երկու անշարժ կետերով ամրացված պինդ մարմնի շարժումն է՝ Նման պայմաններում պինդ մարմնի միակ հնարավոր շարժումը պտույտն է անշարժ կետերով անցնող առանցքի շուրջը Այն կոչվում է պտտման առանցք Ուրեմն, *աքսիալ շարժումն անշարժ առանցքի շուրջ պինդ մարմնի պտույտն է*

Եթե նյութական կետի չրջանագծային շարժումը կարելի է նկարագրել r, v, a մեծություններով, առանց դիմելու $\varphi, \Omega, \varepsilon$ մեծություններին, ապա պինդ մարմնի պտտական շարժման նկարագրությունը հարմար է իրականացնել վեքտորներին օգնությամբ: Իրոք, տվյալ պահին աքսիալ շարժում կատարող պինդ մարմնի տարբեր կետերը բնութագրվում են r, v, a մեծությունների տարբեր արժեքներով, այն դեպքում, երբ այդ բոլոր կետերն ունեն Ω և ε մեծությունների միևնույն արժեքները: Ինչ վերաբերում է r, v, a «գծային» մեծություններին, ապա նրանք կապված են անկյունային մեծությունների հետ (6.7) - (6.14) առնչություններով և բնութագրում են մարմնի

առանձին կետերի շարժումները:

Աբսոլյալ շարժումն ունի մեկ ազատության աստիճան՝ Պա պտտման անկյունն է, որի կախվածությունը ժամանակից արտահայտում է *աբսոլյալ շարժման օրենքը*

$$\varphi = \varphi(t): \quad (44.3)$$

Այն ստանալու համար անհրաժեշտ է լուծել անշարժ առանցքի շուրջ պինդ մարմնի պտտական շարժման դինամիկայի հիմնական հավասարումը (տես § 37).

$$I\epsilon = M', \quad (44.4)$$

որտեղ

$$\epsilon = \ddot{\Omega} = \ddot{\varphi}.$$

Ի. *M'* մեծությունները պտտման առանցքի նկատմամբ պինդ մարմնի իներցիայի մոմենտն ու արտաքին ուժերի մոմենտների գումարն է, ϵ ու $\ddot{\Omega}$ մեծությունները՝ անկյունային արագացման և արագության պրոյեկցիաներն են նույն առանցքի վրա.

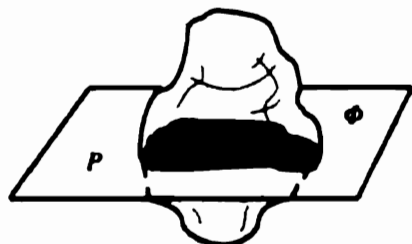
Ունենալով պինդ մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժերի մոմենտը, շարժման սկզբնական պայմանները

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \Omega(0) = \Omega_0, \quad (44.5)$$

և լուծելով (44.4) հավասարումը (44.5) -ի հաշվառմամբ, կստանանք (44.3) շարժման օրենքը:

Հարթ շարժում: Եթե պինդ մարմնի շարժման ընթացքում հնարավոր լինի ընտրել անշարժ *P* հարթություն, որով պինդ մարմինը հատելուց առաջացած *Փ* պատկերը մնա *P* հարթության մեջ, ապա այդպիսի շարժումը կանվանենք *պինդ մարմնի հարթ շարժում* (նկ.7.1): Այս շարժման օրինակ է հարթության վրա գլանի գլորումը: Իրոք, գլանի առանցքին ուղղահայաց հատույթները գլանի գլորման ընթացքում մնում են հատող հարթության մեջ:

Ջանի որ *Փ* պատկերի դիրքը հարթության մեջ միառժեռորեն որոշում է պինդ մարմնի դիրքը տարածության մեջ, ուստի հարթ շարժման ուսումնասիրությունը հանգեցվում է *P* հարթության մեջ *Փ* պատկերի շարժման ուսումնասիրությանը. Այս շարժումը կքննարկենք § 47-ում:



Նկ. 7.1

Գնդային շարժում: Սա մեկ անշարժ կետով ամրացված պինդ մարմնի շարժումն է, որը ներկայացնում է անշարժ Օ կետով անցնող երեք փոխադրական առանցքների շուրջ պինդ մարմնի երեք անկախ պտույտներ *Գնդային շարժումն օժտված է երեք ազատության աստիճանով* և նկարագրվում է Օ կետի նկատմամբ մոմենտների (44.2) հավասարումով

Կամալակաճ շարժում: Սա պինդ մարմնի ամենաընդհանուր շարժումն է, որն օժտված է վեց ազատության աստիճանով և նկարագրվում է (44.1), (44.2) հավասարումներով:

Պինդ մարմնի շարժման հիմնական ձևերը համընթաց և արտադ շարժումներն են: Մյուս բոլոր շարժումները հանգեցվում են այդ շարժումներին: Այս պնդումը կապացուցենք գնդային և հարթ շարժումների մանրագնդուսումնասիրությամբ

Ինչպես ցանկացած այլ մեխանիկական համախմբի, այնպես էլ պինդ մարմնի շարժման վրա կարող են ազդել միայն արտաքին ուժերը և նրանց մոմենտները: Ընդ որում, պինդ մարմնի համընթաց շարժման ուսումնասիրության ժամանակ, համաձայն իներցիայի կենտրոնի շարժման թեորեմի մարմնի տարբեր կետերում կիրառված արտաքին ուժերը կարելի է գույքահեռ տեղափոխել և կիրառել նրա իներցիայի կենտրոնում: Նման տեղափոխություն չի կարելի կատարել պինդ մարմնի պտտական շարժումը դիտարկելիս: Վերջին դեպքում ուժի կիրառման կետը կարելի է տեղափոխել միայն ուժի ազդման գծի երկայնքով, քանի որ դրանից փոփոխության չեն ենթարկվում ո՛չ արտաքին ուժերի համագործ, ո՛չ էլ նրանց մոմենտները:

2. Պինդ մարմնի հավասարակշռության պայմաններն ստացվում են (44.1) և (44.2) ընդհանուր հավասարումներից: Հիշ-ում անշարժ պինդ մարմնի համար

$$F = 0, \quad M = 0: \quad (44.6)$$

Սրանք պինդ մարմնի հավասարակշռության *անհրաժեշտ բաց ոչ բավարար պայմաններն են* Իրոք, այս պայմաններում պինդ մարմինը կարող է համընթաց շարժվել հաստատուն v_0 արագությամբ և պտտվել իր իներցիայի կենտրոնով անցնող առանցքի շուրջ Ω անկյունային արագությամբ: Հավասարակշռության բավարար պայմանն այն է, որ ընտրված Հիշ-ում, ժամանակի ինչ-որ պահին, (44.6) պայմաններում մարմինը գտնված լինի դադարի վիճակում:

Նկատենք, որ եթե ուժերի հավասարակշռության պայմանն ապահովված է, ապա մոմենտների հավասարակշռության պայմանը կարելի է փոխել

198

րառել ցանկացած կետի կամ առանցքի նկատմամբ (§3.5):

Ստատիկորեն անբաշխ խեցիքներ: Միշտ չէ, որ իրական մարմինը կանխի է համարել բացարձակ պինդ, նույնիսկ, եթե դեֆորմացիաները չնչին են: Այսպես օրինակ, դիտարկենք երկու հենարանների վրա m զանգվածով համասեռ ծողի (հեծանի) հավասարակշռության խնդիրը (նկ. 7.2). Որոշենք հենարանների կողմից ծողի վրա ազդող N_1 և N_2 ռեակցիայի ուժերը. Համաձայն (44.6) պայմանների՝

$$N_1 + N_2 = mg, \quad mgl/2 = N_2 l, \quad (44.7)$$

որտեղ l -ը հենարանների միջև հեռավորությունն է, իսկ ուժերի մոմենտները հաշվված են 1 հենարանի նկատմամբ: (44.7) պայմաններից հետևում է.

$$N_1 = N_2 = mg/2: \quad \text{Նկ. 7.2}$$

Նկ. 7.3

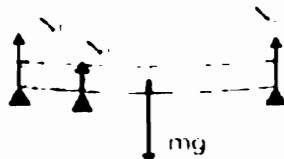
Այս խնդրում ծողի և հենարանների դեֆորմացիաների անտեսումը որևէ դժվարություն չառաջացրեց.

Դիտարկենք այժմ հեծանի հավասարակշռությունը երեք հենարանների վրա (նկ. 7.3): (44.6) պայմանները նորից տալիս են երկու անկախ հավասարումներ.

$$N_1 + N_2 + N_3 = mg, \quad N_1 x + N_2 l = mgl/2,$$

որտեղ x -ը 1 և 3 հենարանների միջև հեռավորությունն է (մոմենտների պայմանը նորից կիրառված է 1 հենարանի նկատմամբ): Պարզ է, այս երկու հավասարումներով ռեակցիայի երեք ուժերը միարժեքորեն որոշվել չեն կարող: Այնպես որ, երեք հենարանների վրա բացարձակ պինդ ծողի կշիռ բաշխման խնդիրը չունի միարժեք լուծում: Նման խնդիրները կոչվում են **ստատիկորեն անորոշ**:

Երեք հենարանների վրա իրական ծողի կշիռ բաշխման խնդիրն ունի խիստ որոշակի լուծում: Անորոշությունն առաջանում է հեծանը “բացարձակ պինդ” համարելիս: Իրոք, 3 հենարանն անվերջ փոքր տեղաշարժերն ցած: Հեծանը “բացարձակ պինդ” ենթադրելիս 3 հենարանը անմիջապես կանգառվի ծողից և N_1 -ը թռիչքածն կդառնա զրո, իսկ ծողի կշիռը կբախշվի 1 և 2 հենարանների վրա: Իրականում 3 հենարանն իջեցնելիս առաջանում է ծողի ճկում

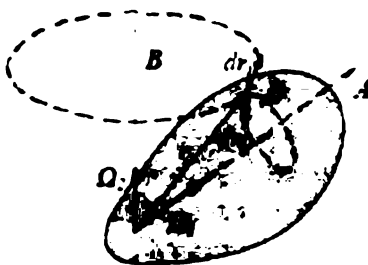


Նկ. 7.4

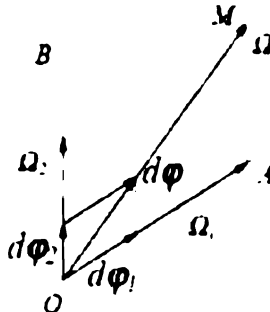
(նկ. 7.4), որի ընթացքում N , ռեակցիայի ուժն աստիճանաբար է վերանում եթե այժմ 3 հեռարանը վերադարձնենք իր սկզբնական դիրքին. ապա N ը աստիճանաբար աճելով կընդունի խիստ որոշակի արժեք: Այս խնդրը ճշգրիտ լուծմանը կանդրադառնանք առաձգական դեֆորմացիաների նվիրված գլխում (§ 75):

§ 45. ՊԻՆԴ ՄԱՐՄԻ ԳՆՆԱՑԻՆ ԵԱՐԺՈՒՄԸ: ԻՆԵՐՑԻԱՑԻ ՄՈՄԵՆՏԻ ԹԵՆՁՈՐԱԿԱՆ ԲՆՈՒՑԹԸ

1. *Էլլերի թեորեմ:* Մեկ անշարժ կետով պինդ մարմինը կարող է կատարել այդ կետով անցնող երեք փոխադրահայաց առանցքների շուրջ անկախ պտույտներ: Համաձայն էլլերի թեորեմի՝ պինդ մարմնի *գնդային շարժումը ժամանակի ցանկացած պահին կարելի է ներկայացնել որպես անշարժ կետով անցնող անթափայլին առանցքի շուրջ պտույտ:*



Նկ. 7.5



Նկ. 7.6

Ապացուցենք այս պնդումը:

Դիցուք O կետում ամրացված պինդ մարմինը միաժամանակ մասնակցում է երկու պտույտների Ω_1 անկյունային արագությամբ պատվում է OA առանցքի շուրջը, իսկ վերջինս Ω_2 արագությամբ պատվում է OB առանցքի շուրջը (նկ. 7.5). Տարրական dt ժամանակում մարմնի կամայական D կետը OA և OB առանցքների շուրջ պտույտների հետևանքով կկատարի

$$dr_1 = [d\varphi_1 r] = [\Omega_1 r] dt, \quad dr_2 = [d\varphi_2 r] = [\Omega_2 r] dt$$

գծային տեղափոխությունները, որտեղ r -ը D կետի շառավիղ-վեկտորն է իսկ $d\varphi_1$ -ն ու $d\varphi_2$ -ը՝ համապատասխան առանցքների շուրջ պինդ մարմնի

անկյունային տեղափոխությունները Արդյունքում D կետը անշարժ O կետի նկատմամբ կկատարի

$$dr = dr_1 + dr_2 = [(d\phi_1 + d\phi_2)r] \quad (45.1)$$

գծային տեղափոխություն Ստացվածից հետևում է, որ դիտարկվող պտույտները համարժեք են OM ակնթարթային առանցքի շուրջ (նկ.7.6)

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 \quad (45.2)$$

պտույտի. Բաժանելով այս առնչության երկու մասերը dr -ի, կունենանք

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \quad (45.3)$$

Ստացվածը կարելի է ընդանրացնել կամայական թվով պտույտների համար. եթե պինդ մարմինը միաժամանակ մասնակցում է մի կետով անցնող տարբեր առանցքների շուրջ $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ անկյունային արագություններով պտույտների, ապա այդ շարժումը ժամանակի ցանկացած պահին համարժեք է O կետով անցնող առանցքի շուրջ

$$\Omega = \sum \Omega_i \quad (45.4)$$

անկյունային արագությանը պտույտի: Այս վեկտորն էլ հենց տալիս է ակնթարթային առանցքի դիրքը տարածության մեջ

Ակնթարթային պտտման առանցքը ժամանակի տվյալ պահին պինդ մարմնի այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որը O կետի հետ միասին գտնվում է դադարի վիճակում: Այդ պահին պինդ մարմնում կետերի արագությունների բաշխումը կտրվի $v = [\Omega r]$ բանաձևով: Ակնթարթային առանցքի դիրքը ժամանակի ընթացքում կարող է փոփոխվել ինչպես պինդ մարմնում, այնպես էլ տարածության մեջ:

Պինդ մարմնի կամայական գնդային շարժումը նկարագրվում է ամրացված O կետի նկատմամբ մոմենտների հավասարումով.

$$\dot{L} = M \quad (45.5)$$

2. **Գնդային շարժում կատարող մարմնի իմպուլսի մոմենտի և անկյունային արագության կապը:** Ամրացված O կետի նկատմամբ պինդ մարմնի իմպուլսի մոմենտի

$$L = \sum m_i [r_i v_i] \quad (45.6)$$

բանաձևում հաշվի առնելով գծային և անկյունային արագությունների

$$v_i = [\Omega r_i] \quad (45.7)$$

կապը և օգտվելով կրկնակի վեկտորական արտադրյալի «բաց-ցաք» կանոնից, կստանանք

$$L = \sum m_i \left[r \left(\Omega r \right) \right] = \sum m \left\{ \Omega r^2 - r \left(r \Omega \right) \right\} = \quad (45.8)$$

$$= \sum m_i \left\{ \Omega r^2 - r \left(x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z \right) \right\} :$$

Քանի որ անկյունային արագությունը այս դեպքում կարող է ունենալ զրոյից տարբեր $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ բաղադրիչներ, ապա պինդ մարմնի զնդային չարժման իմպուլսի մոմենտի և անկյունային արագության կապը շատ ավելի բարդ է անշարժ առանցքի շուրջ համապատասխան մեծությունների (37.8) կապից. Պրոյեկտելով (45.8) վեկտորը X, Y, Z առանցքի վրա կստանանք.

$$L_x = \Omega_z \sum m_i \left(r^2 - x_i^2 \right) - \Omega_y \sum m_i y_i x_i - \Omega_z \sum m_i z_i x_i,$$

$$L_y = -\Omega_z \sum m_i y_i x_i + \Omega_x \sum m_i \left(r^2 - y_i^2 \right) - \Omega_z \sum m_i z_i y_i,$$

$$L_z = -\Omega_x \sum m_i z_i x_i - \Omega_y \sum m_i y_i z_i + \Omega_x \sum m_i \left(r^2 - z_i^2 \right) :$$

Ստացվածը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$L_\alpha = \sum_{\beta} I_{\alpha\beta} \Omega_\beta, \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (45.10)$$

որտեղ $I_{\alpha\beta}$ -ն կոչվում է *պինդ մարմնի իներցիայի մոմենտի թեճզոր*, որի

$$I_x = \sum m(r^2 - x^2), \quad I_y = \sum m(r^2 - y^2), \quad I_z = \sum m(r^2 - z^2) \quad (45.11)$$

անդամները ներկայացնում են X, Y, Z առանցքների նկատմամբ մարմնի իներցիայի մոմենտները և կոչվում են *իներցիայի մոմենտի առանցքային բաղադրիչներ*, իսկ

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum mxy, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\sum mxyz, \quad I_{zx} = I_{xz} = -\sum mzx \quad (45.12)$$

անդամները՝ *կենտրոնախույս բաղադրիչներ*.

Պարզվում է, *ցանկացած պինդ մարմնի համար գոյություն ունեն իներցիայի C կենտրոնով անցնող երեք փոխուղղահայաց առանցքներ, որոնց նկատմամբ իներցիայի մոմենտի թեճզորի կենտրոնախույս բաղադրիչները զրո են*. Այդ առանցքները կոչվում են *պինդ մարմնի գլխավոր առանցքներ*, որոնց նկատմամբ պինդ մարմնի առանցքային (45.12) բաղադրիչները կոչվում են *իներցիայի գլխավոր մոմենտներ* և նշանակվում

$$\tilde{I}_x \equiv I_x, \quad \tilde{I}_y \equiv I_y, \quad \tilde{I}_z \equiv I_z : \quad (45.13)$$

Համաչափ մարմինների գլխավոր առանցքները նրանց համաչա-

փության առանցքներն են Նկ 7.7-ում պատկերված են ուղղանկյուն զուգահեռանիստի, գլանի և գնդի գլխավոր առանցքները

Կախված մարմնի իներցիայի գլխավոր մոմենտների արժեքներից, պինդ մարմինները բաժանվում են հետևյալ դասերի



Նկ 7.7

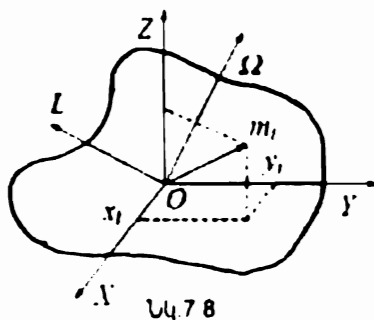
ա) **գնդային հոլեր** $I_1 = I_2 = I_3$: Այս պայմանին բավարարում են գնդային համաչափ մարմինները, որոնց իներցիայի կենտրոնով անցնող ցանկացած ուղիղ հանդիսանում է գլխավոր առանցք:

բ) **համաչափ հոլեր** $I_1 = I_2 \neq I_3$: Այդպիսիք են համաչափության մեկ առանցք ունեցող մարմինները (պտտման մարմինները):

գ) **անհամաչափ հոլեր** $I_1 \neq I_2 \neq I_3$: Որպես անհամաչափ հոլի օրինակներ նշենք եռառանցք էլիպսոիդը, ուղղանկյուն զուգահեռանիստը:

3. **L և Ω վեկտորների ուղղությունները: Ազատ առանցքներ:** Վերադառնանք գնդային շարժում կատարող պինդ մարմնի իմպուլսի մոմենտի և անթարթային անկյունային արագության միջև (45.9), (45.10) առնչությունների ընթերցմանը: Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում իմպուլսի մոմենտի և անթարթային անկյունային արագության վեկտորներն ունեն տարբեր ուղղություններ (Նկ 7.8):

Եթե պինդ մարմինն ամրացված է իներցիայի C կենտրոնում, ապա L -ը և Ω -ի կապն ընդունում է համեմատաբար պարզ տեսք: Եթե Ω -ն ուղղված չէ մարմնի որևէ գլխավոր առանցքով, ապա



Նկ 7.8

$$L_1 = I_1 \Omega_1, \quad L_2 = I_2 \Omega_2, \quad L_3 = I_3 \Omega_3. \quad (45.14)$$

այսինքն L և Ω ուղղությունները չեն համընկնում: Իսկ եթե մարմինը պտտվում է նրա գլխավոր առանցքներից որևէ մեկի շուրջ, ապա L և Ω վեկտորներն ուղղված կլինեն հենց այդ առանցքով: Զանի որ գնդային հոլի իներցիայի կենտրոնով անցնող ցանկացած ուղիղ գլխավոր առանցք է ապա նրա L և Ω -ի միջև կապը միշտ ունի վեկտորական տեսք: Իրոք, հաշվի առնելով $I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$ պայմանը, (45.14) -ից կստանանք

$$L = iL_1 + jL_2 + kL_3 = I(k\Omega + j\Omega + k\Omega) = I\Omega: \quad (45.15)$$

Ազատ պինդ մարմինը կարող է պտտվել միայն որոշակի առանցքների շուրջ: Դրանք կոչվում են *ազատ առանցքներ*, որոնք համընկնում են մարմնի գլխավոր առանցքների հետ: Պարզվում է, առավել կայուն է այն գլխավոր առանցքի շուրջ պտույտը, որի նկատմամբ մարմնի իներցիայի մոմենտը առավելագույնն է

4. Գնդային շարժման կինետիկ էներգիան: Ստանանք *գնդային շարժում կատարող պինդ մարմնի կինետիկ էներգիայի բանաձևը*

$$K = \frac{1}{2} \sum m v^2 = \frac{1}{2} \sum m v [\Omega r] = \frac{1}{2} \Omega \sum m [r v] = \frac{1}{2} L \Omega: \quad (45.16)$$

Այստեղ օգտվեցինք $v = [\Omega r]$ բանաձևից և վեկտորների խառը արտադրյալի հետևյալ հատկությունից.

$$A[BC] = B[CA] = [C[AB]]: \quad (45.17)$$

Ուրեմն

$$K = \frac{1}{2} (L_1 \Omega_1 + L_2 \Omega_2 + L_3 \Omega_3): \quad (45.18)$$

Եթե պինդ մարմինը պտտվում է ամրացված իներցիայի կենտրոնով անցնող առանցքի շուրջը, ապա կինետիկ էներգիայի բանաձևն ընդունում է ավելի պարզ տեսք. Այդ դեպքում հաշվի առնելով (45.14)-ը (45.18)-ում կստանանք:

$$K = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2): \quad (45.19)$$

Առավել պարզ բանաձևով է արտահայտվում որևէ գլխավոր առանցքի շուրջ պտտվող մարմնի կինետիկ էներգիան.

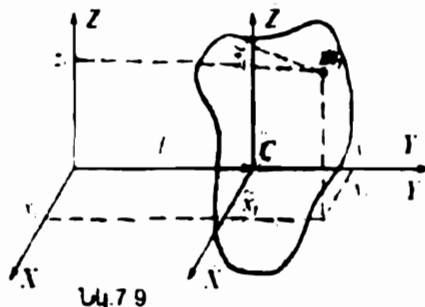
$$K = \frac{1}{2} I \Omega^2, \quad (45.20)$$

որտեղ I -ն այդ առանցքի նկատմամբ իներցիայի գլխավոր մոմենտն է

ՀԱՇՎՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Մարմնի իներցիայի մոմենտը կախված է այն առանցքի ընտրությունից, որի նկատմամբ այն որոշվում է. և ընդհանուր դեպքում տարբեր է տարբեր առանցքների նկատմամբ: Գոյություն ունի թեորեմ, որը հնարավորություն է տալիս սահմանափակվել միայն իներցիայի կենտրոնով անցնող առանցքների նկատմամբ մարմնի իներցիայի մոմենտների որոշմամբ. քանի որ դրանցով արտահայտվում են կամայական այլ առանցքների նկատմամբ իներցիայի մոմենտները:

1. Շտեյնեթի թեորեմ. *Կամայական Z առանցքի նկատմամբ մարմնի իներցիայի մոմենտը հավասար է նրա իներցիայի կենտրոնով անցնող զուգահեռ $\bar{Z}$ առանցքի նկատմամբ իներցիայի մոմենտին գումարած այդ առանցքների միջև է հեռավորության քառակուսու և մարմնի m զանգվածի արտադրյալը*



$$I = I_c + ml^2 \quad (46.1)$$

Ապացույց. Գրենք մարմնի իներցիայի մոմենտները Z և $\bar{Z}$ զուգահեռ առանցքների նկատմամբ (նկ 7.9).

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad I_c = \sum m_i (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2). \quad (46.2)$$

Օգտվելով m_i զանգվածով մասնիկի կոորդինատների կապից

$$x_i = \bar{x}_i, \quad y_i = \bar{y}_i + l, \quad (46.3)$$

և տեղադրելով այն (46.2) ում, Z առանցքի նկատմամբ մարմնի իներցիայի մոմենտի համար կունենանք

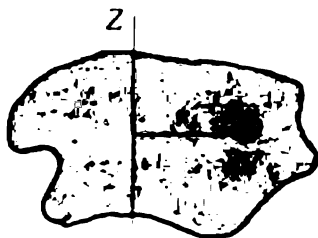
$$I = \sum m_i [\bar{x}_i^2 + (\bar{y}_i + l)^2] = I_c + ml^2 + 2l \sum m_i \bar{y}_i.$$

Այստեղ, հաշվի առնելով C համակարգի (21.6) $\sum m_i \bar{y}_i = 0$, հատկությունը, կստանանք (46.1) բանաձևը

Թեորեմն ապացուցված է:

Եթե մարմինը հոծ է, այսինքն նրանում նյութը բաշխված է անընդհատ,

ապա հարմար է ինտեգրալի մոմենտի հաշվման բանաձևում գումարից անցնել ինտեգրման Այդ կատարելու համար մարմինը մտուլի տրոհում են տարրական dm զանգվածներով մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրի ինտեգրալի մոմենտը կորոշվի



Նկ 7 10

$$dI = r_{\perp}^2 dm \quad (46.4)$$

բանաձևով, որտեղ $r_{\perp}$ -ը dm զանգվածով տարրի հեռավորությունն է դիտարկվող առանցքից (Նկ. 7 10): Մարմնի լրիվ ինտեգրալի մոմենտը ստանալու համար անհրաժեշտ է գումարել, սովյալ դեպքում ինտեգրել, տրոհված բոլոր տարրերի (46.2) ինտեգրալի մոմենտները.

$$I = \int r_{\perp}^2 dm : \quad (46.5)$$

Անալիտիկ եղանակով մարմինների ինտեգրալի մոմենտները կարելի է հաշվել միայն պարզագույն դեպքերում: Ուստի սովորաբար հնարավոր է կատարել համաչափ մարմինների համար: Անկասկած մարմինների ինտեգրալի մոմենտները կարելի է հաշվել կամ թվային ինտեգրման միջոցով, կամ որոշել փորձով:

Ինտեգրալի մոմենտի հաշվման (46.5) բանաձևում հարմար է անցնել ըստ մարմնի V ծավալի ինտեգրման, օգտվելով զանգվածի ρ ծավալային խտության dm -ի կապից:

$$dm = \rho dV, \quad (46.6)$$

որտեղ dV -ն dm զանգվածի զբաղեցրած ծավալն է, կստանանք

$$I = \int r_{\perp}^2 dV :$$

Ընդհանուր դեպքում մարմնում զանգվածի բաշխումը կարող է լինել անհամասեռ: Այսինքն՝ խտությունը կարող է կախված լինել կոորդինատից: Համասեռ մարմինները, որոնք դիտարկելու ենք, բնութագրվում են խտության հաստատուն արժեքներով:

Եթե մարմնի զանգվածը բաշխված է ինչ-որ մակերևույթով (թիթեղներ, թաղանթներ), ապա հարմար է ներմուծել *զանգվածի մակերևութային խտությունը*

$$dm = \sigma d\Sigma,$$

և օգտվել ինտեգրացիայի մոմենտի հաշվման

$$I = \int \sigma r^2 d\Sigma, \quad (46.9)$$

բանաձևից, որտեղ $d\Sigma$ -ն մակերևույթի տարրի մակերեսն է: Վերջապես, *գծային խտության* ներմուծմամբ

$$dm = \tau dl \quad (46.10)$$

ինտեգրացիայի մոմենտի (46.5) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսք.

$$I = \int \tau r^2 dl, \quad (46.11)$$

որտեղ dl -ը գծային տարրի երկարությունն է: Այս բանաձևից հարմար է օգտվել այն մարմինների ինտեգրացիայի մոմենտները հաշվելիս, որոնցում նյութը բաշխված է ինչ-որ գծերի երկայնքով (ծողեր, լարեր):

Ստանանք ինտեգրացիայի մոմենտի հաշվման համար կարևոր մի առնչություն: Դրա համար գումարենք ինտեգրացիայի մոմենտի թե՛նզորի անկյունագծային բաղադրիչները.

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \sum m r^2, \quad (46.12)$$

որտեղ

$$\Theta = \sum m r^2 \quad (46.13)$$

մեծությունը կոչվում է *կետի նկատմամբ մարմնի ինտեգրացիայի մոմենտ* և ներկայացնում է մարմինը կազմող մասնիկների զանգվածների և O կետից նրանց հեռավորությունների քառակուսիների արտադրյալների գումարը: Այն թե՛ն չի մտնում պտտական շարժման դինամիկայի որևէ հավասարման մեջ, սակայն էապես հեշտացնում է որոշ դեպքերում մարմինների ինտեգրացիայի մոմենտների հաշվումը: (46.12) առնչությունը ձիշտ է պինդ մարմնի ցանկացած O կետով անցնող առանցքների նկատմամբ հաշված ինտեգրացիայի մոմենտների համար, մասնավորապես, ինտեգրացիայի գլխավոր մոմենտների համար:

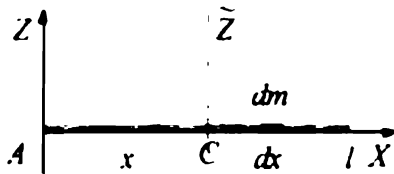
Այժմ կիրառենք (46.12) բանաձևը *հարթ թիթեղի համար*, որն ընկած է XY հարթության մեջ՝ Պարզ է՝ այդ դեպքում $z = 0$ և $\Theta = I_z$: Հաշվի առնելով այս, (46.12)-ից կստանանք

$$I_x + I_y = I_z, \quad (46.14)$$

Ընդհանուր դեպքում կարելի է ցույց տալ, որ $I_x + I_y > I_z$.

2. Իներցիայի մոմենտների հաշվման օրինակներ:

Համասեռ ձողի իներցիայի մոմենտը: Նախ որոշենք ձողի իներցիայի



Նկ 7.11

մոմենտը նրա A ծայրով անցնող ուղղահայաց Z առանցքի նկատմամբ (Նկ 7.11): Ուղղենք X առանցքը ձողի երկայնքով: Z առանցքից x հեռավորության վրա dm զանգվածով տարրի իներցիայի մոմենտը կլինի $dI = x^2 dm$ Հաշվի առնելով, որ $dm = (m/l)dx$, որտեղ m -ը ձողի զանգվածն

է, l -ը՝ երկարությունը, Z առանցքի նկատմամբ ձողի իներցիայի մոմենտը համար կստանանք՝

$$I_A = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{ml^3}{3} : \quad (46.15)$$

Իներցիայի կենտրոնով անցնող Z առանցքի նկատմամբ ձողի իներցիայի մոմենտը կորոշենք, օգտվելով Շտեյնթերի բեռնեմիջ.

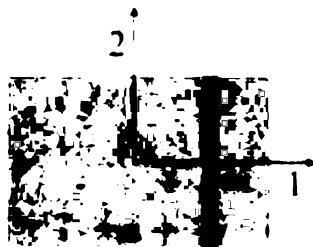
$$I_A = I_C + m(l/2)^2,$$

որտեղից՝

$$I_C = ml^3/12 : \quad (46.16)$$

Ուղղանկյուն համասեռ թիթեղի իներցիայի գլխավոր մոմենտները: Թիթեղի իներցիայի կենտրոնով անցնող Y գլխավոր առանցքի նկատմամբ իներցիայի մոմենտը հաշվելու համար տրոհենք թիթեղն այդ առանցքին զուգահեռ dx լայնության dm զանգված ունեցող շերտերի: Բանի որ տվյալ շերտի բոլոր տարրերը միևնույն x հեռավորության վրա են Y առանցքից (Նկ 7.12), ապա նրա իներցիայի մոմենտի համար կարող ենք գրել

$$dI_Y = x^2 dm = \sigma b x^2 dx : \quad (46.17)$$



Այստեղ հաշվի առնվեց $dm = \sigma b dx$ բանաձևը, որտեղ $\sigma = m/ab$ -ն թիթեղի զանգվածի մակերևութային խտությունն է: Ինտեգրելով (46.17)-ը $-a/2, a/2$ սահմաններում, կստանանք՝

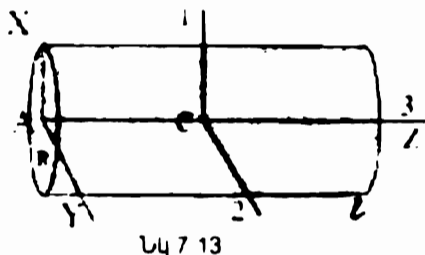
$$I_Y = ma^3/12 : \quad (46.18)$$

Նման ձևով՝

Նկ 7.12

$$I_1 = mb^2 / 12 : \quad (46.19)$$

Նկատենք, որ թիթեղի X և Y առանցքների նկատմամբ իներցիայի գլխավոր մոմենտները արտահայտվում են համասեռ ծողի իներցիայի գլխավոր մոմենտի (46.16) բանաձևով: Թիթեղին ուղղահայաց, նրա իներցիայի կենտրոնով անցնող գլխավոր Z առանցքի նկատմամբ իներցիայի մոմենտը կտրանանք (46.14) բանաձևի օգնությամբ:



$$I_3 = m(a^2 + b^2) / 12 : \quad (46.20)$$

Համասեռ գլանի իներցիայի գլխավոր մոմենտները: Նախ որոշենք գլանի իներցիայի մոմենտը A հիմքով անցնող X առանցքի նկատմամբ (Նկ.7.13): Մտովի տրոհենք գլանը dx հաստությամբ և $dm = \rho \pi R^2 dx$ ($\rho = m / \pi R^2 l$ -ը գանգվածի ծավալային խտությունն է) զանգված ունեցող բարակ մկավառակների: Համաձայն Շտեյների թեորեմի

$$dI_A = d\bar{I}_1 + z^2 dm = (R^2 / 4 + z^2) dm :$$

Ինտեգրելով ստացված արտահայտությունը 0,l սահմաններում, կտրանանք

$$I_A = mR^2 / 4 + ml^2 / 3 : \quad (46.21)$$

Նորից օգտվելով Շտեյների թեորեմից, կունենանք գլանի իներցիայի գլխավոր մոմենտները

$$I_1 = I_2 = mR^2 / 4 + ml^2 / 12, \quad (46.22)$$

$$I_3 = mR^2 / 2 :$$

Համասեռ գնդային թաղանթի և գնդի իներցիայի գլխավոր մոմենտները: Թե՛ գնդային թաղանթի և թե՛ գնդի իներցիայի գլխավոր մոմենտների համար ունենք

$$I_1 = I_2 = I_3 \equiv I :$$

Այդ դեպքում (46.12) առնչությունը տալիս է

$$I = \frac{2}{5} \Theta, \quad (46.23)$$

որտեղ Θ -ն իներցիայի կենտրոնի նկատմամբ իներցիայի մոմենտն է:

Գնդային թաղանթի համար այն հավասար է mR^2 :

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad (46.24)$$

որտեղ m -ը թաղանթի զանգվածն է, R -ը՝ շառավիղը.

Գնդի իներցիայի մոմենտը հաշվելու համար այն տրոհենք dr հաստության թաղանթների, որոնց զանգվածները կորոշվեն

$$dm = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr$$

բանաձևով, որտեղ $\rho = 3m / 4\pi R^3$ - գնդի զանգվածի ծավալային խտությունն է, r -ը՝ տրոհված գնդային թաղանթի ներքին շառավիղը. Ուրեմն

$$\Theta = \int_0^R r^2 dm = \frac{2}{5} mR^2 : \quad (46.25)$$

Տեղադրելով վերջինս (46.23) բանաձևում, կստանանք համասեռ ուժ գնդի իներցիայի գլխավոր մոմենտի արտահայտությունը

$$I = \frac{2}{5} mR^2 : \quad (46.26)$$

§47. ՊԻՆԴ ՄԱՐՆԱԻ ՀԱՐԹ ԵԱԲԺՈՒՄԸ

1. Հարթ շարժման կինեմատիկան Ուսումնասիրենք P հարթության մեջ Φ պատկերի շարժումը: P հարթության հետ կապված անշարժ K' ԴՀ-ում Φ պատկերի դիրքը ժամանակի ցանկացած պահին միարժեքորեն կբնութագրվի նրա կամայական O կետի r_i շառավիղ-վեկտորով և այդ կետով տարված որևէ OA հատվածի՝ X առանցքի հետ կազմած φ անկյունով (նկ. 7.14)։ Հետևաբար *հարթ շարժումն օժտված է երեք ազատության աստիճանով և նրա շարժման օրենքը կտրվի*

$$r_0 = r_0(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad (47.1)$$

ասնչություններով:

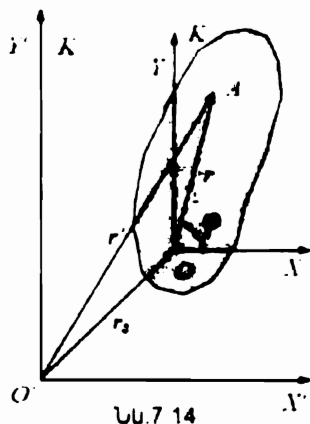
Եթե dr ժամանակում OA հատվածը պատվի dr անկյունով, ապա նույն անկյամբ կպտտվի պատկերի վրա տարված ցանկացած գիծ: Այնպես որ Φ պատկերի պտտման $d\varphi$ անկյունը, հետևաբար Ω անկյունային արագությունը, անկախ են O և A կետերի ընտրությունից:

Որոշենք Φ պատկերի i -րդ կետի v_i արագությունը K' համակարգում: Այդ նպատակով կապենք Φ պատկերի O կետի հետ կորոդինատների XY առանցքներ (K' -համակարգ) այնպես, որ պատկերի շարժման ընթացքում նրանք միշտ մնան $X'OY'$ առանցքներին զուգահեռ (նկ. 7.14): Այսինքն XY և

որդինատային համակարգը կատարում է O կետի արագությամբ համընթաց շարժում: Այդ դեպքում կետի dr -ի տեղափոխությունը P հարթության նկատմամբ կներկայացվի այսպես.

$$dr_i' = dr_0 + dr_i. \quad (47.2)$$

որտեղ dr_0 -ն K համակարգի համընթաց շարժման տեղափոխությունն է, իսկ dr -ն կետի տեղափոխությունը K -ի նկատմամբ: Ակնհայտ է, որ K -ի նկատմամբ կետի հնարավոր շարժումը պտույտն է O կետով անցնող P հարթությանն ուղղահայաց առանցքի շուրջը.



$$dr_i = [d\varphi \cdot r_i]: \quad (47.3)$$

Բաժանելով (47.2)-ը dt -ի և հաշվի առնելով վերջին արտահայտությունը, կատանանք

$$v_i' = v_0 + [\Omega r_i]: \quad (47.4)$$

Ուրեմն, պինդ մարմնի հարթ շարժումը միշտ կարելի է ներկայացնել որպես երկու շարժումների գումար. Մեկը՝ համընթաց շարժում՝ մարմնի կամայական O կետի արագությամբ, մյուսը՝ պտույտ O կետով անցնող առանցքի շուրջ:

Ակնթարթային առանցք. Ավելին, ցույց տանք, որ պինդ մարմնի հարթ շարժումը ժամանակի ցանկացած պահին կարելի է ներկայացնել որպես զուտ պտտական շարժում՝ այսպես կոչված *ակնթարթային առանցքի* շուրջ: Ի տարբերություն պինդ մարմնի աքսիալ շարժման, որի ընթացքում պտտման առանցքը միշտ կապված է մարմնի միևնույն մասնիկների հետ և ունի անփոփոխ դիրք, հարթ և գնդային շարժումների դեպքում ակնթարթային առանցքը կարող է անընդհատ փոփոխել իր դիրքը ինչպես տարածության մեջ, այնպես էլ պինդ մարմնում: Ակնթարթային պտտման առանցքը, նույնիսկ, կարող է գտնվել պինդ մարմնից դուրս:

Ակնթարթային առանցքի գոյության փաստը հետևում է (47.4) բանաձևից, որը տալիս է P հարթության նկատմամբ արագությունների ակնթարթային բաշխումը պինդ մարմնում: Զանի որ ժամանակի տվյալ պահին համընթաց շարժման v_0 արագությունը միևնույնն է բոլոր կետերի համար,

իսկ $[\Omega r_i]$ արագությունը փոփոխվում է կետից կետ թե՛ մեծությամբ և թե ուղղությամբ, ապա Φ պատկերի վրա կամ նրանից դուրս գոյություն ունի M կետ, որը տվյալ պահին գտնվում է դադարի վիճակում:

$$v_M = v_0 + [\Omega r_M] = 0. \quad (47.5)$$

որտեղ r_M -ը այդ կետի շառավիղ-վեկտորն է O կետի նկատմամբ (նկ. 7.15): P հարթությանն ուղղահայաց, M կետով անցնող ուղիղը պատման ակնթարթային առանցքն է: Թանի որ $r_M \perp \Omega$, $r_M \perp v_0$, ապա կստանանք

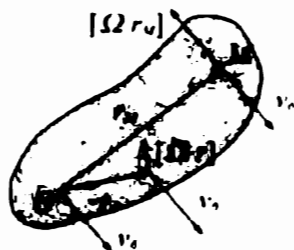
$$r_M = [\Omega v_0] / \Omega^2, \quad r_M = v_0 / \Omega^2: \quad (47.6)$$

Ակնթարթային առանցքի շուրջ պտույտը կատարվում է *նույն անկյունային արագությամբ* ինչ արագությամբ այն պտտվում է O կետով անցնող առանցքի շուրջը: Ընդ որում տվյալ պահին մարմնում արագությունների բաշխումը P հարթության նկատմամբ տրվում է

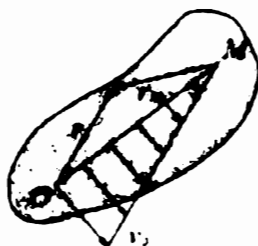
$$v_i = [\Omega R_i] \quad (47.7)$$

օրենքով, որտեղ $R_i = r_i - r_M$ -ը դիտարկվող կետի շառավիղ-վեկտորն է M կետի նկատմամբ (նկ. 7.16; 7.17բ). Մարմնում արագացումների բաշխումը ստանալու համար անհրաժեշտ է ըստ ժամանակի ածանցել (47.4)-ը՝

$$a_i' = \dot{v}_0 - \Omega^2 r_i: \quad (47.8)$$



Նկ. 7.15



Նկ. 7.16

Առանց սահիքի գլորման պարմանք: Ստացված արդյունքները (ուսաբանենք հորիզոնական հարթությամբ R շառավիղով գլանի առանց սահելու գլորման դիտարկումով (նկ. 7.17): Համաձայն (47.4) -ի, հարթության նկատմամբ գլանի կամայական i -րդ կետի v_i արագությունը, հավասար է գլանի համընթաց շարժման v_0 և իր առանցքի շուրջ գլանի պտտման արագությունների գումարին (նկ. 7.17բ).

$$v_i = v_0 + [\Omega r_i], \quad (47.9)$$

որտեղ x -ն r -ի կետի շառավիղի վեկտորն է C կետի նկատմամբ : Ստա-
նանք առանց սահելու գլորվող գլանի v_c և Ω մեծությունների կապը Տար-
րական ω ժամանակում գլանի իներցիայի կենտրոնը կտեղաշարժվի $AB =$
 $v_c \omega$ չափով: Բանի որ հարթության հետ գլանի հպվող ծնիչի և հարթության
միջև հարաբերական շարժումը բացակայում է, ապա $AB = A'B' = R\omega$: Հա-
մեմատելով վերջինս նախորդ առնչության հետ, կստանանք *համաչափ*
վարմինների առանց սահելի գլորման պայմանը

$$v_c = \Omega R \quad (47.10)$$

Այս մեծությունների միջև հավասարության ցանկացած խախտում
առաջ է բերում սահք տեղապտույտ, եթե $v_c < \Omega R$, և սահում՝ եթե $v_c > \Omega R$
*Եւ մեկ թե մյուս դեպքում սահքի արագության մեծությունը որոշվում է հե-
տևյալ բանաձևով*

$$v_s = |v_c - \Omega R|: \quad (47.11)$$



Նկ 7.17 ա

բ

գ

Հաշվի առնելով (47.10) ը և որոշելով գլանի հատույթի տարբեր կե-
տերի արագությունները (47.10) բանաձևով, կստանանք Նկ. 7.17գ-ում ներ-
կայացված պատկերը, որը հարթության նկատմամբ արագությունների
ակնթառթային բաշխումն է գլանում. Պարզ երևում է, որ ակնթառթային ա-
ռանցքը հարթության հետ գլանի հպվող ծնիչն է, որի շուրջ գլանի կետերը
շփյալ պահին ունեն (ΩR) արագություններ: Ուս բացատրում է, թե ինչու
առաջի գլորվող անիվի վերին ճաղերը գետնի նկատմամբ միշտ ավելի ա-
ռաք են շարժվում, քան ստորինները: Նկ.7.17դ -ում պատկերված են անի-
վի տարբեր կետերի արագությունները համընթաց շարժման և առանց
սահելի գլորման դեպքերում:

2. Հարթ շարժման դինամիկան:

Բանի որ հարթ շարժումն օժտված է
երեք ազատության աստիճանով, ապա



Նկ. 7.17

այն կնկարագրվի երեք սկալար հավասարումներով.

$$m\alpha_i = F_i, \quad I_i \varepsilon = M_i, \quad (47.12)$$

որոնցից առաջինը նկարագրում է համընթաց շարժումը, իսկ երկրորդը՝ ի ներքինային կենտրոնով անցնող առանցքի շուրջ պտույտը: Սրանց փոխարեն կարելի է գրել երկրորդ հավասարումը ակնթաթային առանցքի նկատմամբ $I_M \varepsilon = M_M$:

Հարթ շարժում կատարող մարմնի լիով կինետիկ էներգիան կստանանք, եթե կինետիկ էներգիայի բանաձևում հաշվի առնենք արագությունը (47.4) արտահայտությունը.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum m (v_0^2 + [\Omega r]^2 + 2v_0[\Omega r]) = \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \Omega^2 + m v_0 [\Omega r]: \end{aligned} \quad (47.13)$$

Այստեղ I_0 -ն մարմնի իներցիայի մոմենտն է O կետով անցնող առանցքի նկատմամբ, իսկ r_i -ն մարմնի իներցիայի կենտրոնի շառավիղ-վեկտորն է O կետի նկատմամբ: Եթե O կետը համընկնում է մարմնի իներցիայի C կենտրոնի հետ, ապա $r_i = 0$ և (47.13) բանաձևում վերջին անդամը դառնում է զրո.

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_C \Omega^2: \quad (47.14)$$

Ստացված արդյունքը լիովին համապատասխանում է Զյուսիզի թեորեմին: Այնպես որ, *հարթ շարժման կինետիկ էներգիան հավասար է համընթաց և պտտական շարժումների կինետիկ էներգիաների գումարին և՛ այն այն դեպքում, եթե համընթաց շարժման արագությունը մարմնի իներցիայի կենտրոնի արագությունն է*: Հակառակ դեպքում (47.13) բանաձևում անհրաժեշտ է հաշվի առնել նաև վերջին անդամը.

Հաշվի առնելով (47.6) -ը կինետիկ էներգիայի (47.14) բանաձևում կստանանք.

$$K = \frac{1}{2} m r_{ci}^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} I_C \Omega^2 = \frac{1}{2} I_M \Omega^2, \quad (47.15)$$

որտեղ $I_M = I_C + m r_{ci}^2$ - մարմնի իներցիայի մոմենտն է ակնթաթային առանցքի նկատմամբ: Ստացվածը հաստատում է այն, որ *հարթ շարժումը ժամանակի ցանկացած պահին ակնթաթային առանցքի շուրջ մարմնի զուտ պտտական շարժում է*:

3. Պիեղ մարմնի կամայական շարժումը: Քնդային և հարթ շարժումների ուսումնասիրության արդյունքները թույլ են տալիս պնդել, որ Կիև մարմնի կամայական շարժումը նրա որևէ O կետի v_0 արագությամբ համ-

ընթաց և այդ կետով անցնող ակնթարթային առանցքի շուրջ պտտական շարժումների գումարն է (*էլեմիթորեմ*).

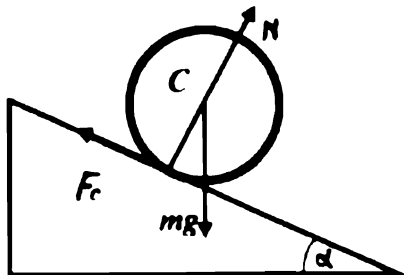
$$v = v_c + [\Omega r]: \quad (47.16)$$

Ընդ որում, եթե համընթաց շարժման v_c արագությունը կախված է մարմնի վրա O կետի ընտրությունից, ապա պտտման Ω անկյունային արագությունը, ինչպես և հարթ շարժման դեպքում, անկախ է O կետի ընտրությունից Ուրեմն, իրող, պինդ մարմնի շարժման հիմնական ծեօրը համընթաց և աքսիալ շարժումներն են

§48. ԾՓՄԱՆ ՈՒԺԵՐԸ ԳԼՈՐՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Պինդ մարմնի գլորման ժամանակ տարբերվում են երեք տիպի շփման ուժեր: Պրանք *կցորդման սահքի և գլորման շփման ուժերն են*:

1. Կցորդման և սահքի շփման ուժերը: Եթե որևէ համաչափ մարմին գունդ, գլան, սկավառակ, օղակ և այլն) դնենք հորիզոնի հետ α անկյուն չափով թեք հարթության վրա, ապա այն կսկսի գլորվել (նկ. 7.18): Եթե թեք հարթությունը մարմնի վրա ազդեր միայն ռեակցիայի N ուժով, ապա այն ծանրության mg ուժի հետ միասին մարմնին համընթաց շարժումով կսահեցներ ներքև՝ առանց պտույտ հաղորդելու: Իսկապես, մարմնի իներցիայի C կենտրոնի նկատմամբ N և mg ուժերի մոմենտները զրո են, հետևաբար C կետի նկատմամբ մարմնին պտույտ հաղորդել չեն կարող: Ուրեմն հարթության կողմից գնդի վրա ազդում է ևս մի ուժ, որի մոմենտը C կետի նկատմամբ տարբեր է զրոյից: Դա *կցորդման F_c շփման ուժն է*, որը և ապահովում է մարմնի առանց սահքի գլորումը թեք հարթությունով (նկ. 7.18): Այդ ուժը *դադարի շփման ուժի արտահայտությունն է գլորման դեպքում*, որը ինչպես գիտենք (տես §28), կարող է ընդունել արժեքներ՝ $0, \mu N$ միջառայում: Ընդ որում յուրաքանչյուր ժնկնետ դեպքում ընդունում է այնպիսի արժեք, որ բացակայի սահքը՝ Ի հարկե, դա այն դեպքում, եթե արտաքին գլորող ուժը չի գերազանցում դադարի առավելագույն շփման μN ուժը: Հազաժակ դեպքում մարմնի գլորումը կոտկեցվի սահքով, որի ընթացքում մարմնի վրա հարթության կողմից



Նկ 7 18

կազդի սահքի շփման ուժը: Ինչպես համընթաց շարժման դեպքում, այն տրվում է Կուլոն-Ամոնտոնի օրենքով.

$$F_{\text{շփ}} = \mu N: \quad (48.1)$$

Կցորդման շփման ուժը ժամանակի ցանկացած պահին կիրառված մարմնի ակնթարթային պտտման առանցքին և ինչպես դադարի շփման ուժը, աշխատանք չի կատարում: Այնպես որ, այն էներգիայի բալանսում որևէ դեր խաղալ չի կարող:

Կցորդման շփման ուժն առաջանում է, երբ ձգտում ենք փոփոխել գլորվող մարմնի արագությունը: Այնպես որ, հորիզոնական հարթությամբ իներցիայով գլորվող մարմինը կցորդման ուժի ազդեցությանը չի ենթարկվի: Նկ 7.18 ում բերված օրինակներում կցորդման շփման ուժն առաջանում է $N \cdot mg$ համազորի շնորհիվ: Որոշենք այդ ուժը: Օգտվենք մարմնի իներցիայի կենտրոնի շարժման և իներցիայի կենտրոնով անցնող առանցքի նկատմամբ մոմենտների

$$ma_c = mg \sin \alpha - F_{\text{շփ}}, \quad I\varepsilon = RF_{\text{շփ}}, \quad (48.2)$$

հավասարումներից և առանց սահքի գլորման $v_c = \Omega R$ պայմանից, որի ըստ ժամանակի ածանցյալը տալիս է

$$a_c = \varepsilon R: \quad (48.3)$$

Ներկայացված հավասարումների (48.2), (48.3) համակարգը տալիս է դիտարկվող շարժման սպառիչ նկարագիրը: Դրանց օգնությամբ կստանանք մարմնի իներցիայի կենտրոնի արագացման և կցորդման շփման ուժի համար լուծումները.

$$a_c = \frac{mg \sin \alpha}{1 + I_c / mR^2}, \quad F = \frac{mg \sin \alpha}{1 + mR^2 / I_c}: \quad (48.4)$$

Ստացված արդյունքը ճիշտ է սահքի բացակայության դեպքում, երբ $F \leq \mu N$, որը (48.4) -ի հաշվառմամբ տալիս է

$$\tan \alpha \leq \mu(1 + mR^2 / I_c): \quad (48.5)$$

Ավելի մեծ թեքությամբ հարթությունից գլորվելիս սահքն անխուսափելի է: Նկատենք, որ (48.5)-ը համապատասխան համընթաց շարժման պայմանից տարբերվում է փակագծի արտահայտությամբ, որը մեծ է մեկից

Թեև կցորդման շփման ուժերը չեն բերում համախմբի մեխանիկական էներգիայի ջերմության փոխարկմանը, սակայն առանց այդ ուժերի անհնար է ինքնաշարժ համակարգերի (մարդկանց, կենդանիների, մեքե-

նաների և այլն) շարժումն ու շարժման դեկավարումը: Ավտոմեքենան դադարի վիճակից «սահուն» պոկվում է (առանց անիվների տեղապատույտի, սահքի) շնորհիվ անվաղողների և ճանապարհի ծածկույթի միջև գործող կցորդման չիման ուժերի: Այդ ընթացքում մեխանիկական աշխատանքը կատարում են շարժիչի կողմից զարգացված ուժերը, որոնք շարժման մեջ են դնում մեքենայի ամբողջ մեխանիզմը և պտտում անվաղողները: Պարզապես կցորդման չիման ուժերի օգնությամբ անվաղողների պտտական շարժումը փոխարկվում է մեքենայի համընթաց շարժմանը: Այդ նույն դերը կարող են կատարել նաև սահքի չիման ուժերը անիվների տեղապատույտի դեպքում, որը, սակայն, ուղեկցվում է մեխանիկական էներգիայի դիսիպացիայով:

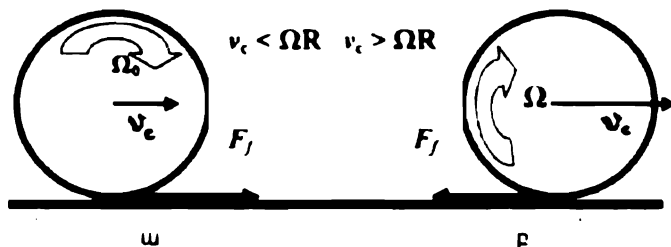
2. Հորիզոնական հարթության մարմնի սահելով գլորումը: Չնայած համընթաց և պտտական շարժումների ընթացքում ազդող սահքի չիման ուժերը արտահայտվում են նույն (48.1) բանաձևով, սակայն նրանց ազդեցությունները շարժման նշված դեպքերում կարող են էապես տարբերվել: Սահքի չիման ուժը միշտ արգելակում է չորսուի համընթաց շարժումը, փոխարկելով նրա լրիվ կինետիկ էներգիան ջերմության (քանի որ չորսուի սահքը վերանում է նրա կանգառով): *Գլորվող մարմնին սահքի չիման ուժը կարող է ինչպես արգելակել, այնպես էլ արագացնել նրա համընթաց շարժման բաղադրիչը*, երկու դեպքում էլ փոխարկելով մեխանիկական էներգիայի մի մասը ջերմության: Այստեղ սահքի ուժի ազդեցությունը վերանում է հարթության հետ մարմնի

$$v_s = |v_s - \Omega R| \quad (48.6)$$

սահքի արագության վերացմամբ (v_s -ն իներգիայի կենտրոնի արագությունն է), որից հետո մարմինը շարունակում է $v_s = \Omega R$ արագությամբ առանց սահքի գլորումը, առանց մեխանիկական էներգիայի փոփոխության:

Եթե համաչափ մարմինը պտտենք իր առանցքի շուրջը Ω_0 անկյունային արագությամբ և առանց իներգիայի կենտրոնին սկզբնական արագություն հաղորդելու դնենք հորիզոնական հարթության վրա, ապա այն կսկսի գլորվել (նկ.7.19): Սկզբում մարմինը կկատարի տեղապատույտ, ենթարկվելով սահքի չիման ուժի ազդեցությանը (նկ.7.19ա): Վերջինս անընդհատ կմեծացնի իներգիայի կենտրոնի արագությունը և կնվազեցնի պտտման անկյունային արագությունը, քանի դեռ $v_s < \Omega R$:

Համանման երևույթ տեղի կունենա, եթե չպտտվող մարմնին հորիզոնական հարթության վրա հաղորդենք v_{s0} սկզբնական արագություն: Այս դեպքում չիման F , ուժը կընդունի v_s -ին հակառակ ուղղություն (նկ.7.19բ) և



Նկ 19

անընդհատ կնվազեցնի այն. մեծացնելով Ω -ն, նորից՝ քանի դեռ (48 6) սահելը չի վերացել. Ներկայացված երկու շարժումները նկարագրվում են

$$m \frac{dv_c}{dt} = \pm F_f, \quad I \frac{d\Omega}{dt} = \mp 2R F_f, \quad (48^7)$$

հավասարումներով. դրոնցում աջ մասերի վերին նշանները համապատասխանում են առաջին դեպքին, իսկ ստորին նշանները՝ երկրորդին

Գրված հավասարումներից հետևում է, որ համընթաց և պտտական շարժման արագությունները ժամանակի ընթացքում փոփոխվում են գծային օրենքով (ստացել է դրանք) Արտաքսելով (48 7) հավասարումներից սահելի չփման ուժը, կստանանք

$$mv_c R - I \Omega = \text{const} \quad (48^8)$$

պայմանը, որը հորիզոնական հարթությամբ գլորվող մարմինների համար ճիշտ է թե՛ սահելի ամպայության, և թե՛ բացակայության պայմաններում

Սահուն ճանապարհի վրա տրանսպորտը կտրուկ արգելակելու կան արագություն հաղորդելու փորձ կատարելիս առաջանում է *կողասահ* կոչվող երևույթը։ Սահելի պայմաններում ճանապարհի անհարթությունները, ավտոդողերի ոչ միատեսակ մաշվածությունը, ծախ և այլ արգելակների աշխատանքի և անիվների վրա բեռնավորման անհամաչափությունը տրանսպորտին ուղղաձիգ առանցքի շուրջ հաղորդում են պտույտ, որի արդյունքում այն դառնում է անդեկավարելի։

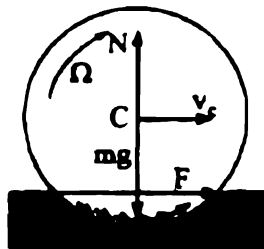
3. Դեֆորմացիաների հաշվառումը։ Գլորման շփումը։

Մինչև այժմ գլորվող մարմինը և հարթությունը համարվել են բացառապես պինդ և արհամարիվել նրանց դեֆորմացիաները։ Այդ պայմաններում հորիզոնական հարթությամբ գլորվող մարմնի համար ստացված (48 8) ընդհանուր առնչությունից հետևում է, որ մարմինը երբեք չի դադարեցնի իր գլորումը, եթե իհարկե, ինքներս չարգելակեցնեք այն։ Սակայն փորձ ժխտում է այս արդյունքը. հորիզոնական հարթությամբ գլորվող մարմինը

շուտով կանգ է առնում. Այս հակասությունը ցույց է տալիս, որ մարմինների իրական գլորումը դիտարկելիս անհրաժեշտ է հաշվի առնել նրանց և հարթության դեֆորմացիաները:

Պարզության համար հաշվի առնենք միայն հարթության դեֆորմացիան, գլորվող մարմինը համարելով բացարձակ պինդ:

Նախ դիտարկենք հարթության առաձգական դեֆորմացիաները: Ցույց տանք, որ (48.8) մեծությունը հորիզոնական հարթությամբ մարմնի սահելով գլորման ընթացքում անընդհատ նվազում է (նկ. 7.20)



Նկ 7.20

Դեֆորմացված մակերևույթի հետ մարմինը ժամանակի ցանկացած պահին փոխազդում է ուսման որոշակի մակերեսով. Հարթության կողմից մարմնի վրա ազդում են շփման շոշափող և ռեակցիայի նորմալ ուժերը, որոնք բաշխված են ամբողջ հպման մակերեսով. Առաձգական դեֆորմացիաների դեպքում ռեակցիայի ուժերի բաշխումը C' կետով անցնող ուղղաձիգ առանցքի նկատմամբ կլինի համաչափ. այնպես որ, նրանց համագործ կանցնի մարմնի իներցիայի C' կենտրոնով և կհամակշռի ծանրության ուժին. Կազմենք շոշափող շփման ուժերի F համագործ (նկ. 7.20) և գրենք մարմնի գլորումը նկարագրող հավասարումները

$$m\dot{v}_s = F, \quad I\dot{\Omega} = -M_s: \quad (48.9)$$

Այստեղ M_s -ն մակերևույթով բաշխված շփման ուժերի գումար մոնետն է, որը մեծ է շփման համագործ F ուժի և R շառավիղի արտադրյալից.

$$M_s > FR: \quad (48.10)$$

Բազմապատկելով (48.9) -ի երկրորդ հավասարումը F/M_s -ով, երկրորդը R -ով և գումարելով իրար, կստանանք

$$\frac{d}{dt} (m\dot{v}_s R + I\dot{\Omega} \frac{RF}{M_s}) = 0,$$

որում, հաշվի առնելով (48.10) պայմանը, կունենանք

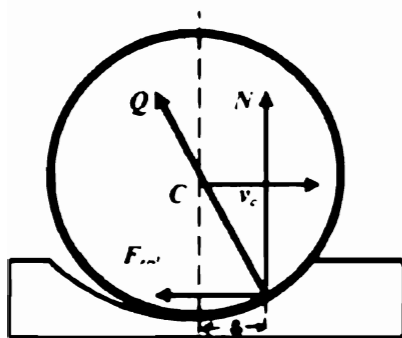
$$\frac{d}{dt} (m\dot{v}_s R + I\dot{\Omega}) < 0, \quad (48.11)$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը: Ուրեմն, հարթության առաձգական դե-

ֆորմացիայի հաշվառումը բերում է հորիզոնական հարթության վրա *առ-
հելով գլորվող* մարմնի $m\gamma; R + \frac{1}{2}\Omega$ մեծության ժամանակի ընթացքում նվազ-
մանը: Սակայն դա չի բացատրում գլորվող մարմնի կանգառը, քանի որ
սահքի վերացման հետ անհետանում են նաև սահքի շփման ուժերը: Այ-
սակից սկսած (48.8) մեծության արժեքը կմնա անփոփոխ:

Այնպես որ մենք այստեղ գործ ունենք մի երևույթի հետ, որն առա-
ջացնում է գլորվող մարմնի էներգիայի դիսիպացիա նույնիսկ սահքի բա-
ցակայության պայմաններում: Դա *գլորման չփուն* է, որն առաջանում է
մարմնի և հարթության *պլաստիկ դեֆորմացիաների* պատճառով:

*Դիտարկենք մարմնի գլորումը պլաստիկ դեֆորմացվող հարթության
վրայով* (նկ. 7.21): Այս դեպքում մնացորդային դեֆորմացիաների հետևան-
քով ժամանակի ցանկացած պահին գլորվող մարմնին հարթության կող-
մից կենթարկվի իր իներգիայի կենտրոնով անցնող $C'O$ առանցքի նկատ-
մամբ անհամաչափ բաշխված ուժերի ազդեցությանը: Ընդ որում այդ ու-
ժերի բաշխումը այնպիսին է, որ նրանց Q համագործ ուժի նկ. 7.21-ում
պատկերված տեսքը (Q -ն ուղղաձիգի հետ չի կարող հասնել C' կետից
ցած գտնվող կետում, քանի որ դա կհանգեցնի գլորման արագացմանը):
Այս պնդումը կատարվում է փորձնական փաստերը բացատրելու նպա-
տակով և հաստատված չէ պլաստիկ դեֆորմացիաների լարումների որևէ
տեսական հաշվարկով: Ի դեպ, Q համագործ տեսական հաշվարկը ներ-
կայումս սկզբունքորեն անհնար է կատարել, քանի որ դեռևս բավարար ու-
սումնասիրության չեն ենթարկված և չեն բացահայտված ժամանակի ըն-
թացքում փոփոխվող ոչ առածական դեֆորմացվող մարմնում լարումնե-
րի բաշխման օրենքները: Համագործ Q ուժի հորիզոնական բաղադրիչը
միշտ ուղղված է մարմնի շարժմանը հակառակ ենթադրվում է, որ այն



Նկ 7.21

ուժի դիսիպատիվ բնույթ: Այդ ուժը
հենց *գլորման չփուն* ուժն է: Փորձ-
նական տվյալների հիման վրա եզ-
րակացվում է, որ OC ուղղաձիգը Q
ուժի կիրառման կետի s շեղման չա-
փը կախված չէ R շառավղից և ան-
համեմատ փոքր նրանից: Բացի այդ,
 OC ուղղաձիգի հետ Q վեկտորի հատ-
ման կետի շեղումը C' կետից վեր-
չնչին է: Այնպես որ

$$mg = Q \cos \alpha \approx Q,$$

$$F_{\text{ն}} = Q \sin \alpha \approx Q \frac{s}{R}.$$

որտեղից

$$F_{\text{ն}} = \frac{s}{R} mg : \quad (48.12)$$

Փորձը ցույց է տալիս, որ գործման շփման գործակից կոչվող s մեծությունը կախված է միայն մարմնի և հարթության նյութի տեսակից: Նկատել, որ ի տարբերություն սահքի շփման գործակցի, գործման շփման գործակիցն ունի երկարության չափողականություն:

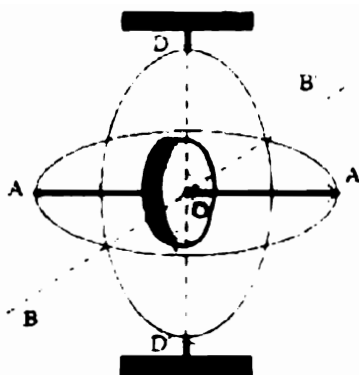
Գործման շփման ուժն անհամեմատ փոքր է սահքի շփման ուժից և սահքի պայմաններում այն միշտ կարելի է արհամարհել:

§49. ՆՈՒԱԿ: ՆՈՒԱԿԻ ԱՋԱՏ ՃՈՃՔԸ

Հղակը (գիրուկոպ) արագ պտտվող մարմին է, որի պտտման առանցքը կարող է ազատ կողմնորոշվել տարածության մեջ: Հղակի պարզագույն օրինակ է արագ պտտվող հող: Հղակը, հատկապես երբ այն ենթարկվում է արտաքին ուժերի ազդեցությանը, կարող է կատարել առաջին հայացքից անսպասելի և տարօրինակ թվացող շարժումներ: Հղակի շարժման հետ կապված բոլոր այդ երևույթներն ստացել են *հղակային երևույթներ* ընդհանուր անվանումը:

Հղակային երևույթները մեծ տարածում ունեն նաև ատոմական համակարգերում, քանի որ նրանք նույնպես օժտված են ուղեծրային շարժման կամ սեփական (սպինային) իմպուլսի մոմենտներով: Ճիշտ է, դրանք պետք է դիտարկել քվանտային մեխանիկայի օրենքներով, սակայն գոյություն ունի մեծ նմանություն դասական և քվանտային հղակային երևույթների միջև:

Գործնական և տեսական մեծ նշանակություն ունի *համաչափ հղակ*, որի երկրաչափական առանցքը կոչվում է *հղակի առանցք*: Սովորաբար հղակի առանցքի մի կետը լինում է անշարժ, որը կոչվում է *հղակի հենման կետ*: Ընդհանուր դեպքում հղակի շարժումը ներկայացնում է երկու շարժումների գումար՝ հենման կետի շարժում և այդ կետով անցնող ակնթաղթային առանցքի շուրջ հղակի պտույտ: Այդպիսին է, օրինակ, խաղալիք հողի շարժումը:



Նկ 7.22

Որպեսզի հողակի առանցքը տա-
րածության մեջ կարողանա ընդունել
կամայական ուղղություն, հողակը տե-
ղավորում են *կարդանալիև կախոցում*
Նկ. 7.22-ում հողակն առանցքակալով
ամրացված է AA' առանցքին, որը
կարող է ազատ պտտվել BB' հորիզո-
նական առանցքի շուրջը, իսկ վերջինս
էլ DD' ուղղաձիգ առանցքի շուրջը: Բո-
լոր երեք առանցքները հատվում են O
կետում, որը կոչվում է *կարդանալիև*
կախոցի կետնորոն: Նման հողակի
շարժումն օժտված է երեք ազատու-

յան աստիճանով և ներկայացնում է O անշարժ կետով պինդ մարմնի
գնդային շարժում: Այն ընդհանուր դեպքում Ω անկյունային արագությանը
պտույտ է O կետով անցնող ակնթաղթային առանցքի շուրջ: Գիտենք
(§45), որ այդ դեպքում Ω և L վեկտորներն ունեն տարբեր ուղղություններ
(Նկ.7.23): Վերածենք այդ վեկտորները հողակի AA' առանցքին զուգահեռ և
ուղղահայաց բաղադրիչների:

$$L_z = I_1 \Omega_z + I_3 \Omega_3, \quad (49.1)$$

որտեղ I_1 , I_3 -ը նշված առանցքների նկատմամբ հողակի իներցիայի մոմեն-
տներն են:

Հղակների տեսության հիմքում ընկած է նրա հենման O կետի նկատ-
մամբ մոմենտների հավասարումը

$$\dot{L} = M: \quad (49.2)$$

Շղակի ազատ ճաճքը: Եթե հողակի վրա ազդող արտաքին ուժերի զու-
մար մոմենտը զրո է, ապա հողակը կոչվում է *ազատ*: Ազատ հողակի իմ-
պուլսի մոմենտը պահպանվում է.

$$L_z = I_1 \Omega_z + I_3 \Omega_3 = \text{const} \quad (49.3)$$

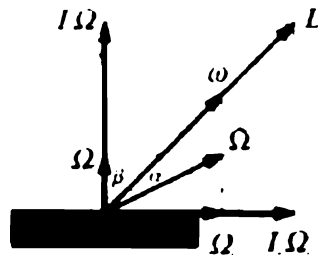
Եթե հողակի կարդանալիև կախոցի տարբեր միացումներում է ներ-
գիայի դիսիպացիան անտեսենք, ապա կպահպանվի նաև նրա լրիվ կինե-
տիկ էներգիան (§45).

$$K = (I_1 \Omega_z^2 + I_3 \Omega_3^2)^{1/2} \quad (49.4)$$

Իմպուլսի մոմենտի պահպանման (49.3) օրենքից ստանում ենք

$$L^2 = I_1^2 \Omega_z^2 + I_3^2 \Omega_3^2 = \text{const}: \quad (49.5)$$

Վերջին երկու առնչություններից հետևում է, որ ազատ հոլակնի շարժման ընթացքում Ω_1 , Ω_2 , իսկ նրանց հետ նաև $I_1\Omega_1$, $I_2\Omega_2$ մեծությունները մնում են հաստատուն: Հետևաբար շարժման ընթացքում անփոփոխ են նաև L և Ω վեկտորներով կազմված α անկյունը և հոլակնի AA' առանցքի հետ L -ի կազմած β անկյունը (Նկ. 7.23): Բայց քանի որ L վեկտորի ուղղությունը տարածության մեջ



Նկ 7.23

անփոփոխ է, ապա ազատ հոլակը ամենաընդհանուր դեպքում կատարում է հետևյալ շարժումը՝ ժամանակի ընթացքում O կետով անցնող L և Ω վեկտորները հոլակում փոփոխում են ուղղություններն այնպես, որ L վեկտորը տարածության մեջ մնում է մեծությամբ և ուղղությամբ անփոփոխ, իսկ Ω վեկտորը (ակնթաղթային պտտման առանցքը) և հոլակնի AA' առանցքը պտտվում են L վեկտորի շուրջը գծելով համապատասխանաբար 2α և 2β գազաթի անկյուններով կոնական մակերևույթներ (Նկ. 7.23): Նկարագրված շարժումը կոչվում է *հոլակի ազատ ծոծք* (պրեցեսիա): L վեկտորի շուրջ հոլակի առանցքը և ակնթաղթային առանցքը պտտվում են միևնույն ω անկյունային արագությամբ (L , Ω վեկտորները և հոլակնի AA' առանցքը միշտ գտնվում են մեկ հարթության մեջ), որը կոչվում է *ծոծքի անկյունային արագություն*: Այն որոշելու համար անհրաժեշտ է Ω -ն վերածել բաղադրիչների հոլակի առանցքով և L ուղղությամբ՝ L -ի ուղղությամբ Ω -ի պրոյեկցիան հենց հոլակի ծոծքի ω արագությունն է՝ Նկ. 7.23-ից հետևում է՝ $\omega \sin \beta = \Omega$, և քանի որ $\Omega_2 = (L/I_2) \sin \beta$, ուստի

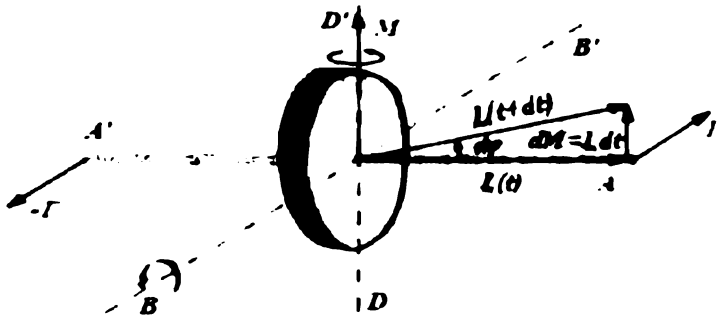
$$\omega = L/I_2 = \sqrt{(\Omega_1^2 I_1^2 + \Omega_2^2 I_2^2)};$$

§ 50. ՀՈԼԱԿԱՑԻՆ ԷՖԵԿՏ: ՀՈԼԱԿԱՑԻՆ ՈւժԵՐ

1. Հոլակային էֆեկտ: Արտաքին ուժի մոմենտի առկայությամբ հոլակի շարժումը կրում է էլ ավելի հետաքրքիր բնույթ: Ենթադրենք Նկ. 7.24-ում պատկերված հոլակին հաղորդված է արագ պտույտ՝ հորիզոնական AA' առանցքի շուրջ, իսկ A, A' կետերում հորիզոնական ուղղության մեջ կիրառված ուժազույգով ցանկանում ենք AA' առանցքը պտտել ուղղածից շժ՝ առանցքի շուրջը: Այդ դեպքում դիտվում է առաջին հայացքից տար-

օրինակ թվացող շարժում՝ հոլակի AA' առանցքը ծգտում է պտտվել հորիզոնական BB' առանցքի շուրջը: Նկարագրված երևույթն ստացել է *հոլակային էֆեկտ* անվանումը, որը ներկայացնում է պտտվող և չպտտվող մարմինների առանցքների շարժման էական տարբերությունը:

Հոլակային էֆեկտը բացատրվում է մոմենտների հավասարման օգնությամբ: Բանն այն է, որ արագ պտտվող հոլակն օժտված է իր առանցքով ուղղված իմպուլսի մոմենտով: Հոլակի առանցքի կողմնորոշումը տարածության մեջ փոփոխելու համար անհրաժեշտ է փոխել նրանով ուղղված իմպուլսի մոմենտի L վեկտորի ուղղությունը: Իսկ վերջինս կարելի է փոխել արտաքին ուժի M մոմենտ կիրառելով: Տարրական dt ժամանակում իմպուլսի մոմենտի աճը կորոշվի մոմենտների հավասարումից $dL = M dt$, որն ունի ուժի մոմենտի ուղղությունը: Հեշտ է նկատել, որ դիտարկվող դեպքում A, A' կետերում ազդող *ուժազույգի մոմենտը ուղղված է DD' ուղղությամբ առանցքով*: Այնպես որ dt ժամանակում L վեկտորը հոլակի առանցքի հետ միասին կպտտվի BB' հորիզոնական առանցքի շուրջ (նկ. 7.24), որն էլ հենց դիտվում է փորձում:



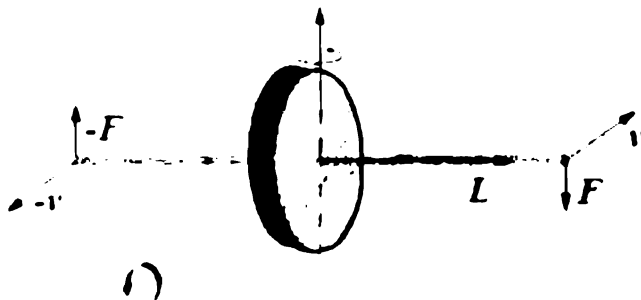
Նկ. 7.24

Նկատենք, որ հոլակի առանցքի նկարագրված պտույտը կշարունակվի այնքան ժամանակ, քանի դեռ այն չի ընդունել արտաքին ուժի մոմենտի ուղղությունը: Ուրեմն, հոլակային էֆեկտի շնորհիվ *հոլակի առանցքը* (նրա L վեկտորը) *ծգտում է ընդունել արտաքին ուժի մոմենտի ուղղությունը*: Սա ընկած է *հոլակային կողմնացույցների* աշխատանքի հիմքում:

Երկրագունդը իր մակերևույթին գտնվող բոլոր մարմիններին առաջում է մասնակցել օրական պտույտին: Դրանով նրանք ենթարկվում են դեպի հյուսիս ուղղված ուժի մոմենտի ազդեցության, որն էլ հոլակին առաջում է կողմնորոշվել դեպի հյուսիս: Հոլակային կողմնացույցները մեծ կ-

րառություն ունեն նավերում, քանի որ Երկրագնդի մագնիսական դաշտում նավերի մետաղյա իրանի մագնիսացման պատճառով նրանցում մագնիսական պաթից օգտվելը դառնում է անհնար:

2. Հոլակային ուժեր: Հոլակային էֆեկտի հետևանք է այսպես կոչված *հոլակային ուժերի առաջացումը*: Եթե արագ պտտվող հոլակի առանցքը երկու ձեռքով v , $-v$ արագություններով շրջենք հորիզոնական հարթության մեջ, ապա հոլակային էֆեկտի հետևանքով այն կծգսի պտտվել BB' առանցքի շուրջ: Վերջինս կասեցնելու համար անհրաժեշտ է ձեռքերով առանցքի վրա ազդել ուղղաձիգ ուղղությամբ F , $-F$ ուժերով (նկ. 7.25), որոնք և կոչվում են հոլակային ուժեր: Նկատենք, որ *հոլակային ուժերը ուղղահայաց են առանցքի տեղաշարժի արագությունը և աշխատանք չեն կատարում*: Այստեղից է առաջացել աշխատանք չկատարող ուժերի ընդհանուր անվանումը (§28):



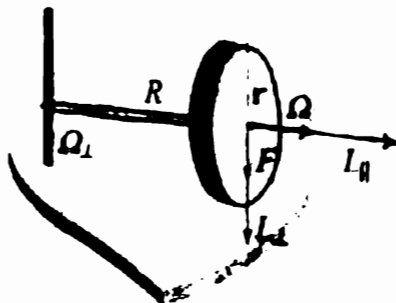
Նկ. 7.25

Հոլակային ուժերը հաշվի են առնվում նավաշինության և ինքնաթիռաշինության մեջ, որոնցում գործող էլեկտրաշարժիչներն ու տուրբինները փաստորեն հոլակներ են, որոնց առանցքները նավերի և ինքնաթիռների տարբեր շարժումների ժամանակ փոփոխում են իրենց կողմնորոշումը տարածության մեջ:

Նման դեպքում առաջացող մեծ հոլակային ուժերը կարող են չարքից հանել տուրբինների և էլեկտրաշարժիչների առանցքները պահող առանցքակները եթե այդ ուժերը հաշվի չեն առնված: Հոլակային ուժերը կարող են քանակապես գնահատվել հետևյալ օրինակով:

Հոլակային ուժի գրգռումը: Ենթադրենք r շառավիղ և m զանգված ունեցող ծանր անիվն առանցքակալով անրացված է թեթև հորիզոնական (R տվարությամբ) ծողին, որը կարող է պտտվել ուղղաձիգ առանցքի շուրջը

(նկ. 7.26): Հորիզոնական հարթության վրա գլորման ժամանակ անիվը միաժամանակ պտտվում է իր և ուղղաձիգ առանցքների շուրջ Ω_1 և Ω_2 անկյունային արագություններով:



Նկ 7.26

որոնց համապատասխանում են $L_1 = I_1 \Omega_1$, $L_2 = I_2 \Omega_2$ իմպուլսի մոմենտներ: Առանց սահելի գլորման դեպքում Ω_1 և Ω_2 մեծությունները կապված են հետևյալ առնչությամբ

$$\Omega_2 r = \Omega_1 R: \quad (50.1)$$

Դիտարկվող շարժման ընթացքում իմպուլսի մոմենտի L_2 բաղադրիչը մնում է անփոփոխ, իսկ L_1 -ը պտտվում է Ω_1 անկյունային արագությամբ ուղղաձիգ առանցքի շուրջը:

Համաձայն հոլակային էֆեկտի, անիվի առանցքի նման շարժումը պետք է ուղեկցվի անիվը հորիզոնական հարթությանը սեղմող լրացուցիչ F հոլակային ուժի առաջացմամբ: Հաշվենք այդ ուժը: Տարրական dt ժամանակում լրիվ իմպուլսի մոմենտը կստանա

$$dL = dL_1 = L_1 \Omega_1 dt = L_1 \Omega_1 2(r/R) dt = FR dt \quad (50.2)$$

աճ, որտեղ հաշվի առանք (50.1) առնչությունը և օգտվեցինք մոմենտների հավասարումից (FR -ը հոլակային ուժի մոմենտն է): Արդյունքում F հոլակային ուժի համար ստանում ենք

$$F = \frac{I_1 r}{R^2} \Omega_1^2 = \frac{mr^1}{2R^2} \Omega_1^2: \quad (50.3)$$

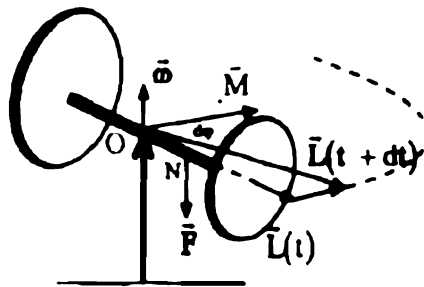
եթե անիվը համարենք սկավառակ: Ուրեմն, անիվը հարթության վրա գլորում է իր կշռից (50.3)-ով ավելի մեծ ուժով:

§51. ՀՈԼԱԿԻ ՀԱՐԿԱԴՐԱԿԱՆ ՃՈՃՔԸ: ՆՈՒՏԱՑԻԱՆԵՐ

Հոլակային էֆեկտը առաջացնում է հոլակի առավել հետաքրքիր շարժում մի կարևոր մասնավոր դեպքում, երբ արտաքին ուժի մոմենտը միշտ ուղղահայաց է հոլակի առանցքին:

1. **Հարկադրական ճաճք:** Դիտարկենք բեթն ծողին առանցքակալերով ամրացված երկու թափանիվներից բաղկացած համախմբի շարժումը:

հենման O կետի շուրջը (նկ. 7.27): Դիցուք չպտտվող թափանիվներով այս համախումբը հենման O կետի նկատմամբ գտնվում է հավասարակշռության մեջ: Եթե ծողի որևէ N կետից կախենք m զանգվածով բեռ, ապա համախմբի հավասարակշռությունը կխախտվի. թափանիվներից մեկը կշեղվի ցած, իսկ մյուսը՝ վեր նույն երևույթը կդիտվի. Եթե



Նկ. 7.27

ծողի շուրջ թափանիվները պտտենք հակառակ ուղղություններով այնպես, որ լրիվ իմպուլսի մոմենտը հավասար լինի զրոյի: Եթե հոլակի առանցքի նկատմամբ համախմբի լրիվ իմպուլսի մոմենտը տարբեր է զրոյից, ապա N կետից բեռը կախելիս դիտվում է *հարկադրական ճոճք* կոչվող հետևյալ շարժումը. *հոլակի առանցքը մնալով հորիզոնական հարթության մեջ, պտտվում է հենման O կետով անցնող ուղղաձիգ առանցքի շուրջը*. ճոճքի ω անկյունային արագության մեծությունը փոփոխվում է O հենման կետից բեռի կախման N կետի / հեռավորությունը փոխելիս: Ընդ որում /-ի մեծացումը հանգեցնում է ճոճքի անկյունային արագության աճին:

Հոլակի հարկադրական ճոճքը բացատրվում է մոմենտների հավասարման օգնությամբ. Իրոք, N կետից կախված բեռը O կետի նկատմամբ առեղծված է հոլակի առանցքի վրա ազդող $M = IF$ ուժի մոմենտ: Այն ընկած է հորիզոնական հարթության մեջ և ուղղահայաց է հոլակի առանցքին (նկ. 7.27) Համաձայն մոմենտների հավասարման, dI ժամանակում հոլակի L իմպուլսի մոմենտը կստանա այդ ուժի մոմենտով ուղղված $dL = Mdt$ աճ: Դա համապատասխանում է հենման O կետով անցնող ուղղաձիգ առանցքի շուրջ հոլակի առանցքի $k\varphi$ անկյամբ պտույտին.

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{M}{L} dt; \quad (51.1)$$

Այստեղից հարկադրական ճոճքի անկյունային արագության համար առանում ենք հետևյալ բանաձևը.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{IF}{L}. \quad (51.2)$$

Զանի որ արտաքին ուժի մոմենտը միշտ ուղղահայաց է L -ին, ապա այն չի կարող փոփոխել վերջինիս մոդուլը: Այնպես որ հոլակի իմպուլսի

մոմենտի վեկտորը երկարությամբ մնալով հաստատուն, կատարում է անկյունային արագությամբ պտտական շարժում ուղղածից առանց շուրջը: ω անկյունային արագությամբ պտտվող մեծությամբ հաստատու K վեկտորի ածանցյալն ըստ ժամանակի հավասար է

$$\dot{K} = [\omega K]: \quad (51.1)$$

որը, փաստորեն, ապացուցել ենք (6.7) բանաձևով:

Հարկադրական ճոճք կատարող մարմնի L վեկտորի համար վերջ նիս հաշվառումը մոմենտների հավասարման մեջ տալիս է

$$[\omega L] = M, \quad (51.2)$$

որը (51.2) բանաձևի վեկտորական տեսքն է: Թանի որ (51.4)-ում բոլոր րեք վեկտորներն իրար ուղղահայաց են, ապա ստանում ենք (51.2)-ը

Նշի ձեռքը: Ստացված (51.4) առնչությունից առաջին հայացքից կարող է թվալ, թե ճոճքի անկյունային արագությունը կախված է L և ω վեկտորների կազմած անկյունից: Սակայն դա այդպես չէ: Դրանում կհամոզվենք հարկադրական ճոճքի ամենատարածված օրինակի՝ խաղալիքի ելի շարժման դիտարկմամբ (նկ. 7.28): Դիցուք իր առանցքի շուրջ մեծ Ω անկյունային արագությամբ պտտվող հոլն ուղղածիցից թեքված է α անկյունով: Այդ դեպքում հոլի ժանրության ուժը հենման կետի նկատմամբ կստնդի L -ին ուղղահայաց ուժի մոմենտ

$$M = mgl \sin \alpha: \quad (51.3)$$

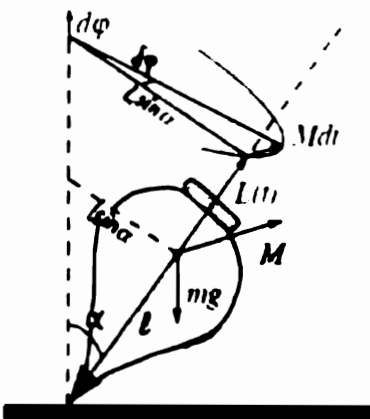
Դիտարկելով տարրական dt ժամանակում հոլի առանցքի շարժումը կստանանք

$$d\varphi = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{M dt}{L \sin \alpha} = \frac{mgl}{L} dt,$$

որտեղից

$$\omega = \frac{mgl}{L} = \frac{mgl}{L \Omega}: \quad (51.6)$$

Այստեղ m -ը հոլի զանգվածն է, ը: հենման կետից իներցիայի կենտրոնի հեռավորությունը, իսկ L -ն հոլի իներցիայի մոմենտն է իր առանցք նկատմամբ: Նկատենք, որ հոլի հարկադրական ճոճքի անկյունային արագությունն անկախ է ուղղածիցի նկատմամբ:



Նկ. 7.28

չմբ նրա առանցքի թեքման α անկյունից (այսինքն L և ω վեկտորների չափած անկյունից):

Ի տարբերություն նկ. 7.27-ում պատկերված հոլակի, որի ճոճքի անկյունային արագությունը, համաձայն (51.2)-ի, հակադարձ համեմատական է հոլակի զանգվածին ($1/\Omega$ համեմատական է հոլակի զանգվածին), *հոլի տեքի անկյունային արագությունն անկախ է զանգվածից և* հակադարձ համեմատական է գլխավոր առանցքի շուրջ հոլակի պտտման Ω անկյունային արագությանը

3. Նկատենք, որ բերված բոլոր դատողություններում մոմենտների չափասարման մեջ անտեսել ենք ճոճքով պայմանավորված հոլակի իմպուլսի մոմենտը: Իրոք, ճոճք կատարող հոլակի լրիվ իմպուլսի մոմենտը շարկ է ներկայացնել որպես

$$L = l\omega + I\Omega, \quad (51.7)$$

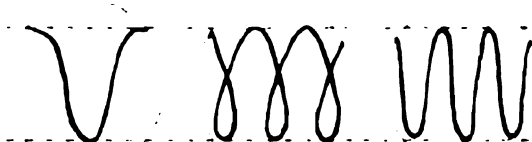
դտեղ I -ն հոլակի իներցիայի մոմենտն է ճոճքի առանցքի նկատմամբ: Ֆաստորեն չարադրվածը հոլակի հարկադրական *ճոճքի մոտավոր տեությունն* է, որը կիրառելի է միայն *արագ հոլակների* համար: Արագ է կոչվում այն հոլակը, որի սեփական պտույտի Ω անկյունային արագությունն անհամեմատ մեծ է ճոճքի ω անկյունային արագությունից. $\Omega \gg \omega$. Այդ դեպքում (51.7)-ի աջ մասում առաջին անդամը կարելի է անտեսել երկրորդի նկատմամբ, որը և կատարված է ներկա պարագրաֆում:

2. *Նուտացիաներ (առանցքաճոճք):* Հարկադրական ճոճք կատարող հոլակի նկարագրված վարքը *առաջին հայացքից հակասում է էներգիայի պահպանման օրենքին*: Իրոք, առանցքից ծանրոցը կախելիս հոլակն ըստանում է ճոճքով պայմանավորված լրացուցիչ կինետիկ էներգիա: Որոշելի՞ց այդ կինետիկ էներգիան. միակ ուժը, որն ազդում է հոլակի վրա, ծեղի ծանրության ուժն է, որն ուղղահայաց է ճոճքային շարժմանը և աշխատանք չի կատարում: Այս հարցի պատասխանը տալիս է հոլիկի շարժման ճշգրիտ տեսությունը, որը դուրս է մեր դասընթացի շրջանակներից: Այստեղ կաշխատենք որակական բնույթի դատողություններով պատասխանել դրված հարցին:

Այս պարագրաֆում նկարագրվածը, այսպես կոչված, հոլակի *կանոնավոր ճոճքն* է, որի ընթացքում իմպուլսի մոմենտի վեկտորի ծայրակետը ձուլվում է շրջանագիծ: Փորձը ցույց է տալիս, որ հոլակի առանցքից ծանրոց փախելիս, առաջացած հարկադրական ճոճքը չունի կանոնավոր բնույթ. Հոլակի առանցքի հորիզոնական հարթության մեջ պտույտն ուղեկցվում է

ուղղածիզ ուղղությամբ նրա փոքր տատանումներով, որոնք կոչվում են *նուտացիաներ*: Ճոճքային շարժման վրա նուտացիաների վերադրո հանգեցնում է նրան, որ հոլակի L վեկտորի ծայրակետը տարածությամբ գծում է սինուսոիդի կամ ցիկլոիդի տեսք ունեցող կորեր (նկ 7.29) կորերի կոնկրետ ձևը կախված է սկզբնական պահին հոլակի առանց հաղորդված արագությունից:

Օրինակ, եթե ժանրոցը հրենք հորիզոնական հարթության մեջ ճու ուղղությամբ, ապա L վեկտորի ծայրակետը կգծի նկ.7.29-ում պատկված առաջին կորը, հակառակ ուղղությամբ հրելիս՝ երկրորդը, իսկ առս սկզբնական հիման ժանրոցը կախելիս երրորդը: *Նուտացիաների առություներ վերացնում է էներգիայի պահպանման օրենքի հետ ճոճք շարժման թվացող հակասությունը*: Ծանրոցը կախելիս, սկզբում հոլս առանցքը փոքրինչ շեղվում է ցած: Ծանրոցի պոտենցիալ էներգիայի նս գման հաշվին հոլակը ծեռք է բերում ճոճքային շարժման լրացուցիչ կի տիկ էներգիան:



Նկ 7.29

Դեպի վեր ծանրո շարժման ժաման տեղի է ունենում էն գիայի հակառակ և խակերպումը: Ուրե նուտացիաները հս գեցնում են հոլս

պոտենցիալ և ճոճքային շարժման կինետիկ էներգիաների փոխադս փոխակերպումների, և որևէ հակասություն էներգիայի պահպանման օր քի հետ այստեղ չկա:

2. Հոլակային ճոճանակ: Վերադառնանք հոլակի կանոնավոր ճ քին և քննարկենք *հոլակային ճոճանակ* կոչվող սարքի աշխատանքը: ր լայն կիրառություն ունի նավերում և ինքնաթիռներում արիեստական րիզոն (ուղղածիզ) ապահովելու համար: *Հոլակային ճոճանակը արագ լակ է. որի իներգիայի կենտրոնը ցած է հենման կետից*: Նման հոլակի ր վագիծ պատկերը ներկայացված է նկ.7.30-ում: Այն թելից կախված հոլ է. որի առանցքը թելի հետ կազմում է $\alpha \geq \pi/2$ անկյուն: Տեսանք, որ նման լակի ճոճքի անկյունային արագությունն անկախ α անկյունից տրվու (51.6) բանաձևով: Հոլակային ճոճանակի պարբերություն ասելով՝ հաս նում են նրա ճոճքային շարժման մեկ լրիվ պտույտի տևողությունը:

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{L/mgl} \quad (51.8)$$

Համեմատելով այս պարբերությունը մաթեմատիկական ճոճանակի

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \quad (51.9)$$

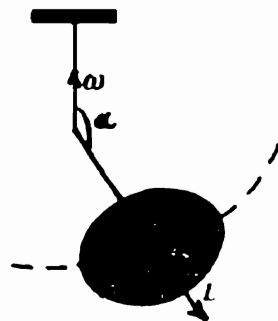
պարբերության հետ, առանում ենք

$$l = \frac{I^2 \Omega^2}{m^2 l^2 g} \quad (51.10)$$

որը կոչվում է *հոլակալին ճոճանակի բերված երկարություն*: Դա այն մաթեմատիկական ճոճանակի երկարությունն է, որն օժտված է տվյալ հոլակալին ճոճանակի պարբերությամբ: Հոլակալին ճոճանակի բերված երկարությունը չափվում է տասնյակ մետրերով և օժտված է պարբերության բավականին մեծ արժեքներով:

Օդազնացության և նավազնացության մեջ տեսանելիության բացակայության և նավաբեկման պայմաններում տարա-

բանություններով և ունենալ արհեստական հորիզոն կամ ուղղաձիգ: Երկրի կամայական կետում ուղղաձիգի ուղղությունը որոշվում է ուղղալարի միջոցով, որը սակայն կիրառելի չէ վերը նշված դեպքերում, որոնցում արագացումներն անխուսափելի են: Նման դեպքերում օգտվում են բավական մեծ բերված երկարություն ունեցող հոլակալին ճոճանակից: Արագացումների ծաղակալության պայմաններում ճոճանակի առանցքն ուղղում են ուղղաձիգով (հորիզոնով): Եթե ինքնաթիռը կամ նավը շարժվում է արագացումով, ապա առաջանում է ճոճանակի ճոճք, որը շեղում է նրա առանցքն ուղղաձիգից (հորիզոնական հարթությունից): Սակայն, եթե ճոճանակի ճոճքի (51.8) պարբերությունը շատ մեծ է արագացումով շարժման ժամանակից, ապա այդ ընթացքում ճոճանակի առանցքը չի հասցնում նկատելի շեղվել ուղղաձիգից (հորիզոնական հարթությունից):

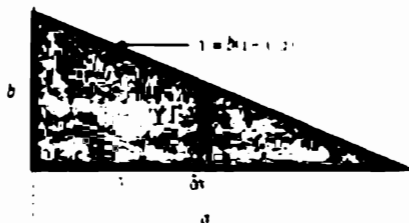


Այ. 7.30

ՁԱՒԻՐՆԵՐ

Ինտեգրալի մոմենտների հաշվում

1. Որոշենք եռանկյուն թիթեղի ինտեգրալի մոմենտը էջով անցնող առաջ նկատմամբ



Ջնարկենք ուղղանկյուն եռանկյան դեպքը. Շնորհիվ a և b էջ անցնող X, Y առանցքները Որոշ m զանգվածով եռանկյան ինտեգր մոմենտը Y առանցքի նկատմամբ

Շնորհիվ կոորդինատալ համակարգում ներքևածիզը կարևորագույն $y = b(1 - x/a)$ հավասարմով: Տրոհենք եռանկյունը Y առ

ջին զուգահեռ ձախանույթային շերտերի, որոնցից յուրաքանչյուրի ինտեգրալի մոմենտը կլինի.

$$dI = x^2 dm = \frac{m}{ab/2} y x^2 dx = \frac{2m}{ab} b \left(1 - \frac{x}{a}\right) x^2 dx :$$

Ինտեգրելով վերջինս 0 - a միջակայքում, կստանանք $I = ma^3 / 6$:

2. Որոշել a երկարություն և b լայնություն ունեցող հավասար ուղղանկյուն թեղի ինտեգրալի մոմենտները նշված առանցքների նկատմամբ



$$\frac{1}{2} ma^2$$



$$\frac{1}{2} mb^2$$



$$\frac{1}{2} m(a^2 + b^2)$$

3. Որոշել քառակուսու տեսք ունեցող հավասար թիթեղի ինտեգրալի մոմենտը նշված առանցքների նկատմամբ



$$\frac{1}{2} ma^2$$



$$\frac{1}{2} ma^2$$



$$\frac{1}{2} ma^2$$



$$\frac{1}{2} ma^2$$

4 Ուղղել եռանկյան տեսք ունեցող համասեռ թիթեղի իներցիայի մոմենտները նշված առանցքների նկատմամբ:



$$\frac{m(a^2 + b^2)}{6(a + b)}$$



$$\frac{1}{3}ma^2$$



$$\frac{1}{6}m(a^2 + b^2 + c^2)$$

5 Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան տեսքով թիթեղի մակերևույթին ուղղահայաց նրա տար Թ անկյան գազաթույ (դիմացի էջը՝ a) անցնող առանցքի նկատմամբ իներցիայի մոմենտի համար կարելի է գրել:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}ma^2(1 + 3\cot^2 \theta) = \frac{1}{3}mb^2(3 + \tan^2 \theta) = \frac{1}{3}mc^2(3 - 2\sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{3}m(2b^2 + c^2) = \frac{1}{3}m(3c^2 - a^2) = \frac{1}{3}m(a^2 + 3b^2) \end{aligned}$$

ՇԱՐԺՈՒՄԸ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՈՉ ԻՆԵՐՑԻԱԼ, ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

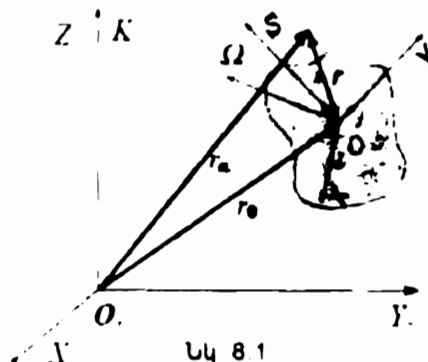
§ 52. ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՈՉ ԻՆԵՐՑԻԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Աինչև այժմ շարժումները դիտարկել ենք հաշվարկի իներցիալ մակարդերի նկատմամբ, որոնցում մասնիկի շարժման դինամիկան ռազրվում է Նյուտոնի երկրորդ օրենքն արտահայտող հավասարոՒՍակայն գործնական կարևորություն ներկայացնող շատ խնդիրներ լ լիս հարմար է լինում օգտվել հաշվարկի ոչ իներցիալ համակարգ (ՀՈՀ), որոնք ՀԻՀ-ի նկատմամբ շարժվում են այս կամ այն արագւմով: ՀՈՀ-ի օրինակներ են արագացումով շարժվող տրանսպոպտովող կարուսեյի, երկրագնդի հետ կապված ՀՀ-երը:

ՀՈՀ-ում մասնիկի շարժման օրենքներն ու հավասարումները կս է ստանալ ՀԻՀ-ում հաստատված համապատասխան օրենքներից ո վասարումներից, եթե հայտնի են նրանցում մտնող մեծությունների →ՀՈՀ անցման ձևափոխության բանաձևերը: Մասնավորապես, կս յալկան ՀՈՀ-ում մասնիկի շարժման հավասարումը ստանալու հս զանգվածի և կոորդինատների ձևափոխությունից զատ հարկ է ուն նաև ՀԻՀ→ՀՈՀ անցման ուժի ձևափոխման օրենքը: Նյուտոնյան մե նրկայում $m = \text{const}$ և այս խնդիրը լուծվում է զուտ կինեմատիկորեն, վելով տարածության և ժամանակի բացարձակությունից: Այսինքն, ե դրվում է, որ տարածական երկարություններն ու պրոցեսների տևո յուններն ինվարիանտ են ՀԻՀ-ից ՀՈՀ անցնելիս:

Գիտենք, որ այս պատկերացումները ճիշտ են միայն դանդաղ ժումների դեպքում: Գործնական կարևորություն ներկայացնող խնդ ռը, որոնք լուծումները հարմար է ստանալ ՀՈՀ-ում, վերաբերում են նականում մարմինների դանդաղ շարժումներին, որոնք դիտարկվա կաահմանափակվենք այս գլխում:

Դիտարկենք մասնիկի շարժումը $K \ll Z$ -ի և նրա նկատմամբ արագացումով շարժվող պինդ մարմնի հետ կոշտ կապված $S \ll K$ -ի նկատմամբ (նկ.8.1): Պայմանավորվենք $K \ll Z$ -ը համարել անշարժ, իսկ նրա նկատմամբ մասնիկի շարժումն անվանել բացարձակ: S -ի շարժումը K -ի նկատմամբ կանվանենք տեղափոխական, քանի որ S -ում անշարժ մասնիկը K -ի նկատմամբ և տեղափոխվի S -ի արագությամբ և արագացմամբ: Վերջապես, $K \ll Z$ -ի նկատմամբ մասնիկի շարժումը կանվանենք հարաբերական:



Իհարկե, այս անվանումները պայմանական են և պետք չէ դրանք հակադրել այն հայտնի ճշմարտությանը, համաձայն որի բոլոր շարժումները հարաբերական են:

Մասնիկի հարաբերական շարժման հավասարումը կստանանք $K \ll Z$ -ում մասնիկի շարժման

$$ma_{\text{rel}} = F \quad (52.1)$$

հավասարումից (« a » ինդեքսը ցույց է տալիս, որ խոսքը բացարձակ շարժման մասին է), ունենալով արագացումների և ուժերի ձևափոխությունները $K \rightarrow S$ անցման համար:

Քանի որ նյութոսկյան F ուժը կախված է փոխազդող մարմինների հարաբերական դիրքից և հարաբերական արագությունից, որոնք տարածության և ժամանակի բացարձակության պայմաններում ինվարիանտ են, ապա ինվարիանտ կլինի նաև նյութոսկյան ուժը: Այնպես որ խնդրի լուծումը հանգում է մասնիկի արագացման $K \rightarrow S$ անցման ձևափոխության բանաձևի ստացմանը:

Նշանակենք K -ում S -ի O սկզբնակետի շառավիղ-վեկտորը r_o , մասնիկի «բացարձակ» դիրքը r_{rel} , իսկ հարաբերական դիրքը

$$r = ix + jy + kz. \quad (52.2)$$

Պոտել i, j, k -ն S համակարգի օրթերն են (նկ.8.1). Ժամանակի ցանկացած պահին այս շառավիղ-վեկտորները կապված են

$$r_{\text{rel}} = r_o + r \quad (52.3)$$

առնչությամբ: Ածանցելով այն երկու անգամ ըստ ժամանակի, կստանանք

$$v_a = v_0 + \dot{r} \quad (52.4)$$

$$a_a = a_0 + \ddot{r} \quad (52.5)$$

Ստացված առնչությունների ծախ մատերում մասնիկի բացարձակ արագությունն ու արագացումն են Սակայն աջ մատերում $\dot{r}$ և $\ddot{r}$ վեկտորները, ընդհանուր դեպքում, մասնիկի հարաբերական արագությունն ու արագացումը չեն:

Հարցի ֆիզիկական կողմը պարզաբանելու համար նախ դիտարկենք պարզագույն դեպքը, երբ S-ը K-ի նկատմամբ շարժվում է համընթաց

§53. ՀԱՄԱԵԹԱՑ ԵԱՐՇՎՈՂ ՈՉ ԻՆԵՐՑԻԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ:

ԻՆԵՐՑԻԱՑԻ ՈՒԺԵՐ

Դիցուք S-ը կապված է գնացքի հետ, որն արագացումով համընթաց շարժվում է K-ի նկատմամբ (նկ. 8.2): Դիտարկենք վազոնի առաստաղից կախված ճոճանակի, կամ BC ձողի վրա զսպանակին ամրացված գնդիկի շարժումը գնացքի հետ կապված S ՀՈՀ-ում K-ում այդ շարժումները նկարագրվում են (52.1) հավասարումով, որի աջ մասում F -ը ներկայացնում է գնդիկների վրա ազդող նյութոնյան ուժերի համագործ.

$$F = mg + T, \quad F = mg + N + F_n + F_p: \quad (53.1)$$

Այստեղ T -ն թելի ծգման ուժն է, N , F_n -ը ձողի կողմից գնդիկի վրա ազդող ռեակցիայի և շփման ուժերն են, F_p - զսպանակի առածգականության ուժն է

Ստանանք S-ում գնդիկների շարժման հավասարումը: Այդ նպատակով վերադառնանք (52.4) և (52.5) առնչություններին: Համընթաց շարժման դեպքում S-ի Օ սկզբնակետի շարժումը վազոնի ամբողջական շարժումն է: Այնպես որ v_0 -ն և a_0 -ն ներկայացնում են մասնիկի լրիվ տեղափոխական արագությունն ու արագացումը: S-ի համընթաց շարժման պայմաններում նրա հետ կապված i, k օրթերը չեն փոխում իրենց կողմնորոշումը տարածության մեջ և հետևաբար $i = j = k = 0$: Այնպես որ, մասնիկի հարաբերական արագությունն ու արագացումը կներկայացվեն հետևյալ կերպ.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{l}\dot{\mathbf{x}} + \dot{j}\dot{\mathbf{y}} + \dot{k}\dot{\mathbf{z}} \equiv \mathbf{v}_n. \quad (53.4)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{l}\dot{\mathbf{x}} + \ddot{j}\dot{\mathbf{y}} + \ddot{k}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{a}_n. \quad (53.5)$$

Հաշվի առնելով (53.4) - (53.5) առնչությունները, մասնիկի բացարձակ արագության և արագացման համար (52.4) և (52.5)-ից կստանանք

$$v_n = v_r + v_n. \quad (53.6)$$

$$a_n = a_r + a_n. \quad (53.7)$$

Սրանք ՀԻՀ-ից համընթաց շարժվող ՀՈՀ անցման արագությունների և արագացումների ձևափոխություններն են:

Տեղադրենք (53.7)-ը (52.1)-ում, և արդյունքը ներկայացնենք հետևյալ կերպ

$$ma_n = \mathbf{F} - ma_{\text{ո}}: \quad (53.8)$$

Սա մասնիկի հարաբերական շարժման հավասարումն է համընթաց շարժվող ՀՈՀ-ում:

Ստացված արդյունքը մեկնաբանելու համար կատարենք կանոն քալ ընդհանրացնենք ուժի հասկացությունը համարելով, որ ուժը արագացման պատճառ է ոչ միայն ՀԻՀ-ում, այլև կամայական ՀՀ-ում:

Այդ դեպքում (53.8)-ի աջ մասը պետք է դիտել որպես համընթաց շարժվող ՀՈՀ-ում մասնիկի վրա ազդող ուժ: Ուժ, որը ՀՈՀ-ում մասնիկին հաղորդում է a_n արագացում: Նկատենք, որ այս կերպ ընդհանրացված ուժը պարտադիր չէ, որ հանդիսանա կոնկրետ մարմինների փոխազդեցության արդյունք:

Համընթաց շարժվող ՀՈՀ-ում մասնիկի վրա ազդող ուժը $\mathbf{F} - ma_{\text{ո}}$ բաղկացած է երկու էապես տարբեր բաղադրիչներից: Ղրանցից առաջինը մասնիկի վրա այլ մարմինների կողմից ազդող նյութական ուժն է, որն ազդում է մասնիկի վրա նաև ՀԻՀ-ում և ինվարիանտ է ՀԻՀ-ից ՀՈՀ անցնելիս: Բոլորովին այլ բնույթ ունի

$$\mathbf{F}_\gamma = -ma_\gamma. \quad (53.9)$$

բաղադրիչը, որը պայմանավորված չէ մասնիկի վրա որևէ մարմնի ազդեցությամբ: Այն արդյունք է հաշվարկի համակարգի a_γ արագացման և կոչվում է *իներցիայի համընթաց ուժ*: Այն ինվարիանտ մեծություն չէ, մի ՀՈՀ-ից մեկ այլին անցնելիս կարող է փոփոխվել ինչպես մեծությամբ, այնպես էլ ղեկավարմամբ: Մասնավորապես, ՀԻՀ-ում այն վերանում է.

իներցիայի ուժերի համար կիրառելի չէ Նյուտոնի երրորդ օրենքը:

Երբ մասնիկի վրա ազդում է իներցիայի ուժ, ապա գոյություն չունի մա մին, որը ենթարկվի համապատասխան հակազդող ուժի ազդեցության Այս իմաստով իներցիայի ուժը համանման է արտաքին ուժադաշտի կո մից ազդող ուժին:

Ուրեմն, *իներցիայի ուժերը համախմբում միշտ գործում են որպ արտաքին ուժեր:*

Հաճախ գրականության մեջ կարելի է հանդիպել հետևյալ արտահս տությանը. *թե իներցիայի ուժերը կեղծ են:* Եթե «կեղծ ուժ» ասելով հասկ նանք գոյություն չունեցող, ինարովի ուժ, ապա, իհարկե, իներցիայի ուժել *կեղծ չեն:* Իսկ եթե այդ ասելով ուզում եք նշել իներցիայի ուժերի ոչ նյուտ նյան բնույթը... ճաշակի հարց է ...

Բոլոր փոխազդեցություններն իրականացվում են ուժային դաշտել միջոցով: *Իներցիայի ուժերը նույնպես կարելի է դիտել որպես ինչ-որ իր ական ուժային դաշտերի ազդեցության արդյունք:* Ճիշտ է, այդ ուժադա տերը որոշակիորեն ձևափոխվում են մի ՀՀ-ից մեկ ուրիշին անցնելիս



Նկ. 8.2

վերանում են ՀՆՀ-ում: Բա դրանում տարօրինակ ոչի չկա: Էլեկտրական և մագն սական ուժերը նույնաէ ձևափոխվում են մի ՀՀ- մեկ ալիին անցնելիս, բայց ոք դրա համար էլեկտրո մագնիսական ուժերի իոս կան գոյությանը չի կասե ծում և դրանք կեղծ չի հս մարում...

Անկախ այն բանից, թե ինչպես կմեկնաբանվեն և կանվանվեն ինե ցիայի ուժերը, հաշվարկի ոչ իներցիալ համակարգերում նրանք գործո են: Առանց այդ ուժերի անհնար է բացատրել մարմինների վարքը ՀՆՀ-ու Օրինակ, նկ.8.2-ում պատկերված ՀՆՀ-վազոնում հետազոտողը կնկատ որ ճոճանակը հավասարակշռության վիճակում գրավում է ոչ թե ուղղ- ծիգ դիրք, այլ շեղված է ուղղածիզից որոշակի α անկյունով (ենթադրվում $a_0 = const$), զսպանակին ամրացված զնդիկը փոխել է իր հավասարակշռո քյան դիրքը, դեֆորմացված վիճակում պահելով զսպանակ-ուժաչափ Այս բոլորը նա բացատրում է (53.8) հավասարման օգնությամբ. հաշվի ա նելով, որ հավասարակշռության վիճակում $\alpha_n = 0$: Այդ դեպքում ճոճանակ

ի ձգման ուժի համար կատարվի

$$T = ma_{\alpha} - mg :$$

Սա ցույց է տալիս, որ իներցիայի համընթաց ուժի առկայությամբ ճոճանակի թելը չունի ուղղաձիգի ուղղություն, այլ շեղված է նրանից

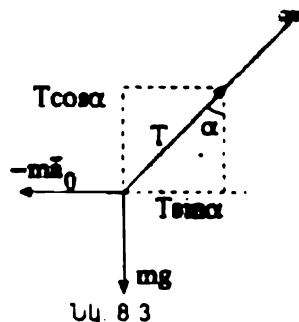
$$\alpha = \arctg(a_{\alpha} / g) \quad (53.10)$$

կունով (նկ.8.3) Համանման ձևով բացատրվում է նաև զսպանակի դեմացված վիճակը երկրորդ գնդիկի հավասարակշռության դիրքում:

Եթե այժմ շեղենք ճոճանակը կամ գնդիկը նշված դիրքերից, ապա մենք կկատարեն տատանումներ հենց այդ դիրքերի շուրջ: Ընդ որում տատանումները կնկարագրվեն (53.8) -ով, որում արդեն $a_{\alpha} \neq 0$:

ՀՈՀ-ում իներցիայի համընթաց ուժի ազդեցությանը ենթարկվում են որ մարմինները, անկախ նրանց գրաված դիրքից և շարժման վիճակից: Ընդ որում իներցիայի համընթաց ուժը բոլոր մարմինների վրա ունի յն ուղղությունը և համեմատական է նրանց իներտ զանգվածներին: Իներցիայի համընթաց ուժի ազդեցությանը ենթարկվում են ուղևորները տրանսպորտում, դռնիս «տեղից պոկման» և արգելակման մանակ: Ընդ որում առաջին դեպքում իներցիայի ուժը ուղևորին հրում է ետ, իսկ երկրորդում՝ առաջ:

Նշված բոլոր երևույթները ՀՈՀ-ից դիտորբացատրում է բոլորովին այլ կերպ. բնական է, առանց իներցիայի ուժ ներմուծելու: Օճանկ, ուղևորի ետ ընկնելը տեղից պոկվող իրանսպորտում բացատրվում է իներցիայի



ենթով: ՀՈՀ-ում ուղևորի իրանը ձգտում է պահպանել իր դադարի վիճակը, իսկ հատակի հետ դադարի չվիճան ուժերով փոխազդող ուղևորի ոտքերը «տարվում» են տրանսպորտի հետ. Արդյունքում ուղևորի իրանը ու է մնում ոտքերից: Համանման ձևով, արգելակվող տրանսպորտում ուղևորի ոտքերը չվիճան պատճառով ետ են մնում իրանից: Եթե S-ից դիտորբ ճոճանակի վարքը բացատրում է իր նկատմամբ ճոճանակի հավասարակշռությամբ, ապա K-ից դիտողի նկատմամբ ճոճանակը շարժվում է a_0 ռագացմամբ: Այդ պատճառով նա ճոճանակի վարքը նկարագրում է բուտոնի $ma_0 = mg \cdot T$ հավասարումով: Այսինքն՝ երկու ՀՀ-երում էլ գրվում նույն հավասարումը: Միայն թե ՀՈՀ-ում դրանով բացատրվում է ճոճանակի արագացումով շարժումը, իսկ ՀՈՀ-ում հավասարակշռությունը:

ՀՈՀ-ում խախտվում է հարաբերականության սկզբունքը: Որպեսզի դրոշմը երևում է դիտարկված օրինակներից, Իսկապես, ուղղաձիգից ճոճանակի թելի շեղման (53.10) անկյունը չափելով կարելի է որոշել գնացքի արագացումը, հետևաբար, հայտնաբերել գնացքի շարժումը: Հիշենք, որ ՀՈՀ-ում որևէ փորձով հնարավոր չէ դա կատարել:

§54. ԵԱՐԺՄԱՆ ՀԱՎԱՄԱՐՈՒՄԸ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՈՉ ԻՆԵՐՑԻԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

Ենթադրենք S -ը K -ի նկատմամբ կատարում է կամայական շարժում, որը, փաստորեն, պինդ մարմնի կամայական շարժումն է: Նախորդ գլխում ցույց տրվեց, որ պինդ մարմնի կամայական շարժումը ներկայացնում է նրա որևէ O կետի $\mathbf{v}$ արագությամբ համընթաց և այդ կետով անցնող ակնթարթային առանցքի շուրջ պտտական շարժումների գումար: Այս պայմաններում S -ի հետ կապված կոորդինատային առանցքների i, j, k օրթերը պտտվում են ակնթարթային առանցքի շուրջ $\boldsymbol{\omega}$ անկյունային արագությամբ: Օգտվելով մոդուլով հաստատուն, պտտվող վեկտորի ըստ ժամանակի ածանցյալի (51.3) բանաձևից, կարող ենք գրել

$$\dot{i} = [\Omega i], \quad \dot{j} = [\Omega j], \quad \dot{k} = [\Omega k]: \quad (54.1)$$

1. **ՀԻՀ→ՀՈՀ անցման արագությունների և արագացումների ձևափոխությունները:** Նախ ստանանք K -ից S անցման արագությունների ձևափոխության բանաձևը: Այդ նպատակով հաշվենք

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}} \quad (54.2)$$

բանաձևում $\dot{\mathbf{r}}$ մեծությունը՝

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{i}x + \dot{j}y + \dot{k}z + i\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z} = \\ &= \mathbf{v}_a + [\Omega(ix + jy + kz)] = \mathbf{v}_a + [\Omega \mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (54.3)$$

որտեղ հաշվի առնվեցին (52.2), (54.1) առնչությունները, և ներմուծվեց

$$\mathbf{v}_a = \dot{i}\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z} \quad (54.4)$$

մեծությունը, որը մասնիկի արագությունն է հաշվարկի այն համակարգի որի նկատմամբ i, j, k օրթերն անփոփոխ են ((54.3) -ում այդ անդամում i, j, k և համարել ենք հաստատուն): Ակնհայտ է, որ դա արագությունն է ՀՈՀ նկատմամբ, այսինքն՝ (54.4)-ը մասնիկի **հարաբերական արագություն** Տեղադրելով (54.3) -ը (54.2) -ում, կստանանք.

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_\lambda + \mathbf{v}_\omega + [\Omega \mathbf{r}] = \mathbf{v}_\lambda + \mathbf{v}_\omega, \quad (54.5)$$

որտեղ

$$\mathbf{v}_\omega = \mathbf{v}_\omega + [\Omega \mathbf{r}]. \quad (54.6)$$

մասնիկի տեղափոխական արագությունն է:

Ուրեմն, մասնիկի բացարձակ արագությունը նրա տեղափոխական և հարաբերական արագությունների գումարն է: Այս օրինաչափությունը խախտվում է արագացումների համար, եթե ՀՌՀ-ը պտտվող է:

Ստանանք արագացման ձևափոխության բանաձևը:

Ածանցենք (54.5) բանաձևի ծախս և աջ մասերը ըստ ժամանակի.

$$\dot{\mathbf{v}}_a \equiv \mathbf{a}_a = \dot{\mathbf{v}}_\lambda + \dot{\mathbf{v}}_\omega;$$

Այստեղ

$$\dot{\mathbf{v}}_\omega = \dot{\mathbf{v}}_\omega + [\dot{\Omega} \mathbf{r}] + [\Omega \dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{a}_\omega + [\epsilon \mathbf{r}] + [\Omega \mathbf{v}_\lambda] + [\Omega [\Omega \mathbf{r}]], \quad (54.7)$$

իսկ

$$\dot{\mathbf{v}}_\lambda = \ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{y}} + \ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{a}_\lambda + [\Omega \mathbf{v}_\lambda], \quad (54.7')$$

որտեղ հաշվի առնվեցին (54.1), (54.4), (54.6) բանաձևերը, իսկ

$$\mathbf{a}_\lambda = \ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{y}} + \ddot{\mathbf{z}} \quad (54.8)$$

մասնիկի հարաբերական արագացումն է:

Տեղադրելով (54.7)-ն ու (54.7')-ը արագացումների ձևափոխության բանաձևում, կստանանք.

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_\omega + [\epsilon \mathbf{r}] - (\Omega^2 \mathbf{r}_\perp + \mathbf{a}_\lambda + 2[\Omega \mathbf{v}_\lambda]), \quad (54.9)$$

որը կներկայացնենք հետևյալ կերպ.

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_\omega + \mathbf{a}_\epsilon + \mathbf{a}_\chi, \quad (54.10)$$

որտեղ

$$\mathbf{a}_\epsilon = 2[\Omega \mathbf{v}_\lambda], \quad (54.11)$$

$$\mathbf{a}_\chi \equiv \mathbf{a}_\omega + [\epsilon \mathbf{r}] - \Omega^2 \mathbf{r}_\perp: \quad (54.12)$$

Արագացումների ձևափոխության (54.10) օրենքում $\mathbf{a}_\omega$ -ը մասնիկի տեղափոխական արագացումն է. քանի որ ՀՌՀ-ում անշարժ մասնիկը ՀՌՀ-ի նկատմամբ կունենա հենց (54.12) արագացումը: Մյուսը $\mathbf{a}_\epsilon$ գումարելին տեղի է կորիոլիսյան արագացում՝ ի պատիվ ֆրանսիացի գիտնական Պոլ Արապյան Կորիոլիսի (1792-1843), որն առաջինն է ներմուծել այս մեծությունը մեխանիկայում: Այն պայմանավորված է ինչպես մասնիկի հարաբերական շարժումով, այնպես էլ ՀՌՀ-ի պտույտով: (54.10) արդյունքը հայտնի է

որպես *Կորիոլիսի թեորեմ բացարձակ արագացումը հավասար է տեղափոխական կորիոլիսյան և հարաբերական արագացումների գումարին*։

Տեղափոխական արագացումը բաղկացած է երեք գումարելիներից *համընթաց՝* $\omega \times \text{կենտրոնամիջ՝ } -\Omega^2 r_\perp$ և $\angle \Omega$ -ի անհավասարաչափ պտույտով պայմանավորված *տանգենցիալ* (εr) արագացումներից։

2. Կամայական $\angle \Omega$ -ում մասնիկի հարաբերական շարժման հավասարումը։ Այն ստանալու համար տեղադրենք (54.9)–ը Նյուտոնի հավասարման մեջ և ձախ մասում թողնենք միայն $ma_\perp$ անդամը

$$ma_\perp = F - ma_\parallel - ma_\chi \quad (54.14)$$

Բացառությամբ աջ մասի առաջին անդամի, որը նյուտոնյան ուժն է, մնացած բոլոր անդամները ներկայացնում են կամայական $\angle \Omega$ -ում մասնիկի վրա ազդող *իներցիալի ուժեր*։ Նախորդ պարագրաֆում իներցիալի ուժերի համար կատարված դիտողությունները վերաբերում են նաև այս ուժերին։

Մի կարևոր դիտողություն ևս։ $\angle \Omega$ -ի $1/j.k$ օրթերը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում են միայն $\angle \Omega$ -ի նկատմամբ։ S -ում այդ օրթերը հաստատուն վեկտորներ են։ Այնպես որ (54.14) հավասարման մեջ $1/j.k$ օրթերը պետք է համարել հաստատուն։ Բաց թողնելով (54.14)–ում « χ » ինդեքսը, *հարաբերական շարժման հավասարումը կամայական $\angle \Omega$ -ում կենդակացնենք հետևյալ կերպ*

$$m \frac{dv}{dt} = F - ma_\parallel - m(\varepsilon r) + m(\Omega^2 r_\perp + 2m[v\Omega]), \quad (54.15)$$

$$v = dr / dt : \quad (54.16)$$

(54.15) հավասարման աջ մասի առաջին երկու անդամները քննարկել ենք նախորդ պարագրաֆում։ *Երրորդ անդամը արդյունք է $\angle \Omega$ -ի անհավասարաչափ պտույտի*։ Այն կանվանենք *իներցիալի տանգենցիալ ուժ*։ Երրորդ գումարելին

$$F_{cf} = m\Omega^2 r_\perp, \quad (54.17)$$

կոչվում է *իներցիալի կենտրոնախույս ուժ*, որը ծագում է հեռացնել մասնիկը պտտման առանցքից։ Այդ ուժի ազդեցությանը ենթարկվում է ուղևորը տրանսպորտը շրջադարձ կատարելիս, կարուսելում պտտվող մարդը բարձրագույն պիլոտաժի վարժություններ կատարող ինքնաթիռի օդաչուն և այլն։

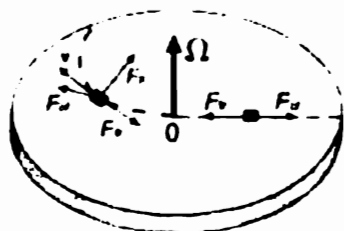
Ի տարբերություն իներցիալի համընթաց ուժի, կենտրոնախույս ուժի մեծությունն ու ուղղությունը կախված են պտտման առանցքի նկատմամբ

մասնիկի գրաված դիրքից: Այն, ուղղված լինելով պատման առանցքից դուրս, աճում է այդ առանցքից մասնիկի ունեցած հեռավորությանը համեմատական օրենքով: Պատման առանցքի վրա գտնվող մասնիկները կենտրոնախույս ուժի ազդեցությանը չեն ենթարկվում:

Դիցուք m զանգվածով փայտյա չորսուն դրված է $\Omega = \text{const}$ անկյունային արագությամբ պտտվող սկավառակին՝ պտտման առանցքից r հեռավորության վրա (նկ. 8.4): Չորսուի վրա ազդող նյութոնյան ուժերը ծանրության mg և սկավառակի ռեակցիայի N ուժերն են (դրանք համակշռում են իրար և նկարում չեն պատկերված), ինչպես նաև դեպի պտտման առանցք ուղղված դադարի շփման ուժը: Սկավառակի հետ կապված ՀՈՀ-ում չորսուի վրա ազդում է նաև իներցիայի կենտրոնախույս ուժը, որը համակշռում է շփման ուժին, ապահովելով չորսուի դադարը սկավառակի նկատմամբ:

$$F_{\text{հ}} + m\Omega^2 r = 0 \quad (54.18)$$

Պարզ է, որ ՀՈՀ-ում իներցիայի ուժերը բացակայում են, իսկ չորսուն կատարում է չրջանագծային շարժում: Այնպես որ այստեղ չորսուի վրա ազդող միակ չհամակշռված $F_{\text{հ}}$ ուժը ապահովում է չորսուի կենտրոնածիզ արագացումը



Նկ. 8.4

$$F_{\text{հ}} = mv^2 / r = m\Omega^2 r : \quad (54.19)$$

Նորից նկատենք, որ երկու ՀՀ-ում էլ գրվում են նույն հավասարումները, սակայն մեկում բացատրվում է չորսուի դադարը, իսկ երկրորդում՝ նրա չրջանագծային շարժումը:

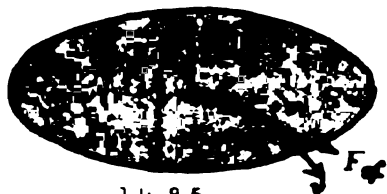
3. Մեծացնելով սկավառակի պտտման անկյունային արագությունը, սկսած Ω -ի որոշ արժեքից, չորսուն կսկսի սահել: Դա բնական է: ՀՈՀ-ում չորսուի դադարը հնարավոր է, քանի դեռ կենտրոնախույս ուժը չի գերազանցում դադարի առավելագույն μmg ուժը: Հետևաբար, $\Omega^2 \geq \mu g/r$ դեպքում չորսուն կսահի սկավառակի վրայով: Այդ պահից սկսած ՀՈՀ-ում չորսուն կենթարկվի նաև կորիոլիսի

$$F_{\text{կ}} = 2m[v\Omega] \quad (54.20)$$

ուժի ազդեցությանը, որտեղ v -ն սկավառակի նկատմամբ չորսուի արագությունն է: Ուրեմն, ՀՈՀ-ում չորսուն շարժվում է իր արագությանը հակառակ ուղղված սահիչ շփման ուժի ազդեցությամբ, այն դեպքում երբ ՀՈՀ-ում այն լրացուցիչ ենթարկվում է նաև իներցիայի կենտրոնախույս և կո-

րիդիսյան ուժերի ազդեցությանը (ծանրության և ռեակցիայի ուժերը երկուսում էլ համակշռված են)։ Ուժերի այս տարբերությունը ՀՌՀ-ում և ՀԻՀ-ում չորսուի հետազոծերի տարբերության պատճառն է (նկ. 8.4)։

Կորիոլիսյան ուժը հողակային է։ ուղղահայաց լինելով արագությանը, այն աշխատանք չի կատարում, այլ միայն կորացնում է մասնիկի հետագիծը։ Դրանում կարելի է համոզվել պարզագույն փորձով։ Ընկրմենք թանաքի մեջ մետաղյա գնդիկը և պտտվող սկավառակի առանցքից հրենք և արագությամբ։ Գնդիկը սկավառակի վրա կթողնի կոր հետք (նկ.8.5)։ ՀԻՀ-ում գնդիկի իներցիայի կենտրոնը շարժվում է ուղղագիծ և հավասարաչափ, թանի որ նրա վրա ազդող ծանրության և ռեակցիայի ուժերը համակշռված են, մինչդեռ սկավառակի հետ կապված ՀՌՀ-ում այն ենթարկվում



Նկ 8.5

է նաև կենտրոնախույս և Կորիոլիսի ուժերի ազդեցությանը։ Ընդ որում Կորիոլիսյան ուժն ազդում է սկավառակի հարթության մեջ գնդիկի արագությանն ուղղահայաց, ինչն էլ սկավառակի նկատմամբ գնդիկի հետագծի կորացման պատճառն է (նկ.8.5)։

Մեկ անգամ ևս հատուկ նշենք

Կորիոլիսյան ուժն ազդում է պտտվող ՀՌՀ-ում շարժվող մասնիկի վրա։ անշարժ մասնիկը Կորիոլիսյան ուժի ազդեցությանը չի ենթարկվում։ Օրինակ, շրջադարձ կատարող տրանսպորտում անշարժ ուղևորի վրա ազդում է միայն կենտրոնախույս ուժը, իսկ շարժվող ուղևորը ենթարկվում է նաև իր շարժմանն ուղղահայաց Կորիոլիսյան ուժի ազդեցությանը։ Այս պատճառով շրջադարձ կատարող տրանսպորտում քաջելիս դժվար է պահպանել հավասարակշռությունը։

Վերադառնալով § 38-ում ժուկովսկու աթոռի վրա մարզագնդերով փորձարարի քննարկված փորձին, նկատենք, որ մարզագնդերի տեղափոխման ժամանակ փորձարարի ձեռքերի վրա ազդող *կորային ճնշման ուժերը հենց Կորիոլիսյան ուժերն են*, որոնք և առաջացնում են համախմբում անկյունային մոմենտի վերաբաշխումը։

§ 55. ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐԸ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՈՉ ԻՆԵՐՑԻԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

Իներցիայի ուժերի վերաբերյալ կատարված կարևոր եզրահանգումն այն մասին, որ համախմբում նրանք հանդես են գալիս որպես *արտաքին ուժեր*, հնարավորություն է տալիս ընդհանրացնել ՀԴՀ-երում ստացված հիմնական օրենքներն ու հավասարումները կամայական ՀՈՀ-ի համար: Դա կկատարենք նյուտոնյան մեխանիկայի շրջանակներում:

Կամայական ՀՈՀ-ում դինամիկայի հիմնական հավասարումը՝

$$m \dot{v} = F - \mathbf{F}, \quad (55.1)$$

ՀՀ-ում համապատասխան հավասարումից տարբերվում է իներցիայի ուժերի համագործի $\mathbf{F}$ լրացուցիչ անդամով: Դժվար չէ ստանալ կամայական ՀՈՀ-ում մասնիկների համախմբի լրիվ իմպուլսի, մեխանիկական էներգիայի, լրիվ իմպուլսի մոմենտի փոփոխությունները նկարագրող հավասարումները:

$$d\mathbf{P} / dt = \mathbf{F} + \mathbf{F}, \quad (55.2)$$

$$\Delta E = A^{\sim} + A, \quad (55.3)$$

$$d\mathbf{L} / dt = \mathbf{M}' + \mathbf{M}, \quad (55.4)$$

որտեղ

$$\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i, \quad A = \Sigma A_i, \quad \mathbf{M} = \Sigma [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i], \quad (55.5)$$

մեծությունները ներկայացնում են համախմբի վրա ազդող *իներցիայի ուժերի համագործը*, *նրանց լրիվ աշխատանքը* և *գումար մոմենտը*: Այս հավասարումների օգնությամբ կարելի է պարզել *համախմբի իմպուլսի իմպուլսի մոմենտի* և *մեխանիկական էներգիայի պահպանման հնարավորության հարցը* կամայական ՀՈՀ-ում:

Ինչպես երևում է (55.2) ից, համախմբի հարաբերական շարժման լրիվ իմպուլսը կպահպանվի, եթե համախմբում գործող արտաքին նյուտոնյան $\mathbf{F}$ և իներցիայի ուժերի $\mathbf{F}$ գումարը հավասար լինի զրոյի:

$$\mathbf{P} = \text{const, եթե } \mathbf{F} + \mathbf{F} = 0: \quad (55.6)$$

Այս պայմանը իրականանում է համախմբի իներցիայի կենտրոնի հետ փափված հաշվարկի համակարգում, որն արտաքին նյուտոնյան ուժերի առկայությամբ կլինի ոչ իներցիալ և ՀՀ-ի նկատմամբ կշարժվի

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{F}' / m \quad (55.7)$$

արագացումով: Հետևաբար, S-ում մասնիկները կենթարկվեն նաև իներ-

ցիայի համընթաց $\mathbf{F} = -m\mathbf{a}$, ուժի ազդեցությանը: Հաշվի առնելով այս S համակարգում մասնիկների վրա ազդող ուժի համար կստանանք

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0, \quad (55.8)$$

որը, (55.7)-ի հաշվառմամբ, հավասար է զրոյի: Այս արդյունքը մնում է ուժ մեջ նաև այն դեպքում, երբ համախումբը կատարում է կամայական $\mathbf{Q}$ անկյունային արագությամբ պտույտ: C -ով անցնող առանցքի շուրջը: Իսկապես, պտույտով պայմանավորված բոլոր իներցիայի ուժերի համագործակցությունը հավասար է զրոյի:

$$\mathbf{F}_{\text{in}} = \Omega^2 \sum m_i \mathbf{r}_{i,\perp} = 0, \quad \mathbf{F}_K = 2 \sum m [\dot{\mathbf{v}}, \Omega] = 0$$

Այստեղ օգտվեցինք իներցիայի կենտրոնի (21.6) հատկություններից C համակարգում համախմբի լրիվ իմպուլսը (ըստ սահմանման) զրո է անկախ այն բանից իներցիալ է C համակարգը, թե ոչ:

Յույց տանք, որ իներցիայի ուժերի մոմենտը C կետի նկատմամբ նույնպես զրո է, եթե C համակարգը շարժվում է համընթաց

$$\mathbf{M}_C = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] = \sum [\mathbf{r}_i, (-m_i \mathbf{a}_i)] = -\mathbf{a}_i \times \sum m_i \mathbf{r}_i = 0, \quad (55.9)$$

որտեղ նորից օգտվեցինք (21.6) հատկությունից: Պտույտով պայմանավորված իներցիայի ուժերի համար այս պնդումը ճիշտ է:

Սովորաբար C համակարգը անելով հասկանում են C կետի հետ կապված համընթաց շարժվող հաշվարկի համակարգ: Ուրեմն, համախմբի սեփական իմպուլսի մոմենտի առանցքային ըստ ժամանակի հավասար է C կետի նկատմամբ արտաքին նյութոնյան ուժերի գումար մոմենտին անկախ այն բանից, իներցիալ է C համակարգը, թե ոչ:

$$d\mathbf{L}_C / dt = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] = \mathbf{M}_C: \quad (55.10)$$

Այստեղից հետևում է, որ C համակարգում համախմբի սեփական իմպուլսի մոմենտը պահպանվում է, եթե արտաքին նյութոնյան ուժերի մոմենտը C կետի նկատմամբ հավասար է զրոյի: Հետևաբար, C համակարգում իմպուլսի մոմենտի պահպանման պայմանը անկախ է այն բանից, իներցիալ է այն թե ոչ:

Անցնենք ՀՈՀ-ում մեխանիկական էներգիայի վարքի քննարկմանը:

ՀՈՀ-ում համախմբի մեխանիկական էներգիայի պահպանման համար (55.3) օրենքից հետևում է, որ անհրաժեշտ է

$$\mathbf{A}^* + \mathbf{A} = 0, \quad (55.11)$$

ինչը կամայական ՀՈՀ-ում չի կարող իրականանալ: Իհարկե, յուրաքանչյուր կոնկրետ դեպքում ՀՈՀ-ի եզակի ընտրությամբ հնարավոր է հասնել այն բանին, որ (55.11) պայմանը տեղի ունենա: Սակայն էներգիայի նման պահպանումը որևէ հետաքրքրություն չի ներկայացնում, քանի որ չի կարող ձեռք բերել գործնական կիրառություն:

§56. ԵԱՐԺՈՒՄԸ ԵՐԿՐԱԿԵՆՏՐՈՆ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՀԱՄԱԿԱԳՈՒՄ

Հայտնի է, որ Արեգակենտրոն հաշվարկի համակարգը ինտեգրիալ է Ցանկացած հաշվարկի համակարգ, որն Արեգակենտրոնի նկատմամբ ունի արագացում, ոչ ինտեգրիալ է: Արեգակի շուրջ ուղեծրային շարժման, ինչպես նաև օրական պտույտի հետևանքով Երկրի հետ կապված հաշվարկի համակարգը ոչ ինտեգրիալ է (նկ.8.6):

Ստանանք Երկրակենտրոն ՀՀ-ում մասնիկի հարաբերական շարժման հավասարումը: Այդ նպատակով ներկայացնենք մասնիկի վրա ազդող նյութադինամիկ ուժերը հետևյալ տեսքով¹.

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_s,$$

որտեղ առաջինը Արեգակի և այլ երկնային մարմինների ձգողության ուժն է, երկրորդը՝ Երկրի ձգողության ուժը, իսկ $\mathbf{F}_s$ -ը մասնիկի վրա ազդող ոչ գրավիտացիոն բնույթի (շփման, առաձգականության, էլեկտրամագնիսական և այլն) ուժերի համագործը:

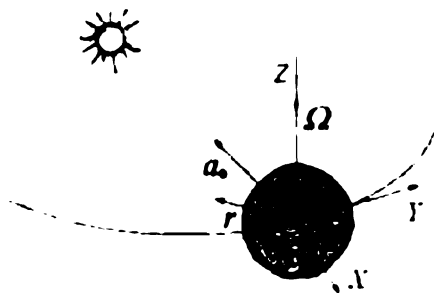
Ներկայացնենք Երկրակենտրոն ՀՈՀ-ում մասնիկի հարաբերական շարժման հավասարումը հետևյալ կերպ.

$$m\mathbf{a} = (\mathbf{F}_g - m\mathbf{a}_g) + (\mathbf{F}_c + m\mathbf{a}_c) + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{F}_s, \quad (56.1)$$

որտեղ բացակայում է անհավասարաչափ պտույտով պայմանավորված ինտեգրիալի տանգենցիալ ուժը, քանի որ $\Omega_0 = \text{const}$:

Յույց տանք, որ Երկրի մակերևույթից ոչ մեծ բարձրությունների վրա շարժվող մասնիկի համար (56.1) հավասարման աջ մասի առաջին փակագիծը qrr է: Իսկապես, Արեգակի և այլ երկնային մարմինների ազդեցությանը ենթարկվում է ոչ միայն դիտարկվող մասնիկը, այլև Երկիրը, որի համընթաց շարժման $\mathbf{a}_g$ արագացումը պայմանավորված է հենց այդ ուժով: Համաձայն Գալիլեյի թեորեմի գրավիտացիոն դաշտի ոչ մեծ տիրույթնե-

¹ Եվ Երկրակենտրոն Երկրագնդի և Արեգակի աստղագիտական նշանակություններն են



Ն 4 8 6

րում բոլոր մարմինները, ակախ իրենց զանգվածներից ծեռք են բերում միևնույն արագացումը (§61): Քանի որ Արեգակն ու մյուս երկնային մարմինները գտնվում են Երկրից բավականաչափ մեծ հեռավորությունների վրա, ապա Երկրի մակերևույթից ոչ մեծ հեռավորության վրա նրանք մասնիկի կիաղորդեն նույն $a_{\oplus}$ արագա-

ցումը. $F_{\oplus} = ma_{\oplus}$: Այնպես որ (§61)-ում առաջին փակագիծը մեծ ձշտությամբ գրո է: Ուրեմն, *Երկրակենտրոն ՀՀ-ում մասնիկի հարաբերական շարժումն ուսումնասիրելիս կարելի է անտեսել Արեգակի և մյուս երկնային մարմինների գոյությունը. քանզի նրանց ազդեցությանը համակշռված է իներցիայի համընթաց ուժով*

Հաշվի առնելով (§61) հավասարման աջ մասի երկրորդ փակագծում $F_{\oplus} = m g_{\oplus}$ առնչությունը, որում $g_{\oplus}$ -ն Երկրի ծգողությամբ պայմանավորված ազատ անկման արագացումն է, կստանանք՝ $F_{\oplus} - m\Omega^2 r_{\perp} = mg$, որտեղ

$$g = g_{\oplus} + \Omega^2 r_{\perp} \quad (§62)$$

Կերջինի հաշվառմամբ Երկրակենտրոն հաշվարկի համակարգում մասնիկի հարաբերական շարժման հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$m \frac{dv}{dt} = F + mg + 2m[v\Omega] \quad (§63)$$

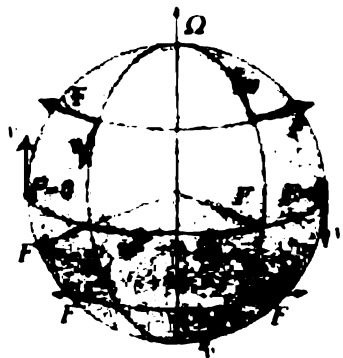
Ստացվածից հետևում է, որ $F = 0$ դեպքում g -ն կներկայացնի մասնիկի ազատ անկման արագացումը միայն այն պահին, երբ մասնիկի հարաբերական շարժումը բացակայում է ($v=0$): Հակառակ դեպքում մասնիկը ծեռք կբերի հարաբերական արագությանն ուղղահայաց $2m[v\Omega]$ արագացում, որը կկորացնի ընկնող մասնիկի հետագիծը (տես § 58):

Քննարկենք Կորիոլիսի ուժի ազդեցությունը Երկրի մակերևույթով շարժվող մարմինների վրա: Երկրի զուգահեռականով դեպի արևելք շարժվող մարմիններին այն ծգում է շեղել դեպի հասարակած, իսկ դեպի արևմուտք շարժվողներին՝ դեպի համապատասխան բևեռները: Հասարակածով դեպի արևելք շարժվող մարմինների վրա այն ազդում է ուղղա-

ծիզ դեպի վեր, փոքրացնելով մարմինների կշիռը, իսկ դեպի արևմուտք չարժվողների վրա այն ունի հակառակ ազդեցությունը (նկ.8.6ա): Միջօրեականով դեպի հյուսիս չարժվող մարմիններին կորիոլիսյան ուժը չեղում է դեպի արևելք՝ հյուսիսային կիսագնդում, և դեպի արևմուտք՝ հարավային կիսագնդում: Դեպի համապատասխան բևեռները չարժվող մարմինների վրա ազդում են դեպի արևելք շեղող կորիոլիսյան ուժեր Դրանով է պայմանավորված Հյուսիսային սառուցյալ օվկիանոսը թափվող մեծ գետերի արևելյան ափերի ողողվածությունը:

Միջօրեականով դեպի հասարակած չարժվող մարմինների վրա կորիոլիսյան ուժն ուղղված է դեպի արևմուտք: Դրանով պայմանավորված արևադարձային գոտիներից դեպի հասարակած տեղափոխվող օդային զանգվածները շեղվում են դեպի արևմուտք (*պասատ քամիներ*)

Հասարակածային գոտում դեպի հյուսիս և հարավ չարժվող մարմինների վրա կորիոլիսյան ուժ չի ազդում, քանի որ այդ դիրքերում արագությունը զուգահեռ է Երկրի Ω -ին



Նկ 8.6ա

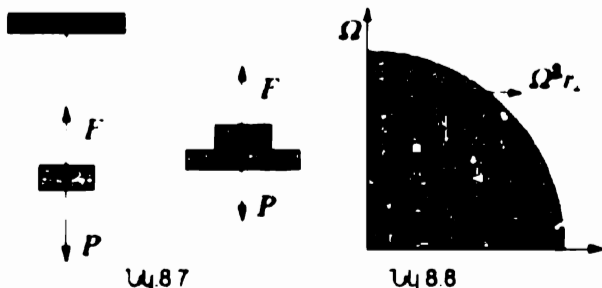
§ 57. ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԿԵԻՌԸ: ԱՆԿՇՈՒԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆ

Անիրաժեշտ է տարբերել և չփոթել *ծանրության ուժ* և *կշիռ* հասկացությունները. Ծանրության ուժը Երկրի կողմից մարմնի վրա ազդող գրավիտացիոն ուժն է $F_g = m g_0$, որն անկախ է հաշվարկի համակարգի ընտրությունից և կախված է Երկրագնդում զանգվածի բաշխումից, մարմնի զանգվածից ու Երկրի նկատմամբ մասնիկի գրաված դիրքից (հիմնականում կենտրոնից մասնիկի ունեցած հեռավորությունից):

Կշիռն ուժ է որը թվապես հավասար է և հակառակ է ուղղված կախոցի թելի ծգման ուժին, որից կախված է մարմինը կամ հենարանի ռեակցիայի ուժին, որի վրա այն դրված է: $P = - F$ (նկ.8.7): Ընդ որում, *թե՛ կախոցը և թե՛ հենարանն ընտրված ՀՀ-ում գտնվում են դադարի վիճակում:* Սովորաբար մարմնի կշռի մասին խոսելիս ենթադրվում է, որ այն կշռված է Երկրի նկատմամբ *անշարժ* կշեռքով

Ենթադրելով, որ հենարանը և կախոցը դադարի վիճակում են, (56.3)-ից հենարանի ռեակցիայի, կամ թելի ծգման ուժի համար (նկ.8.7) կստանանք. $F = -mg$: Իսկ համաձայն կշռի սահմանման՝

$$P = mg + m\Omega^2 r_1 \quad (57.1)$$



Ուրեմն, կշիռը ծանրության ուժից տարբերվում է Երկրի պտույտը պայմանավորված կենտրոնախույս ուժով:

Կախոցի թելը (ուղղալարը), որը հանդիսանում է Երկրի տվյալ մասում ուղղաձիգը, ունի g -ի ուղղությունը: Ընդ որում, շնորհիվ կենտրոնախույս ուժի ազդեցության, g -ն շեղված է դեպի Երկրի կենտրոն տանող ուղղությունից: Եթե Երկիրը համարենք գնդային համաչափ մարմին, ապա նրա ծգողությամբ պայմանավորված $g_{\oplus}$ արագացումը մակերևույթի բոլոր կետերում կունենա միևնույն արժեքը և ուղղված կլինի դեպի Երկրի կենտրոն (նկ.8.8): Երկրի պտույտի հետևանքով ուղղալարից կախված մարմինը ծեռք է բերում նաև $\Omega^2 r_1$ կենտրոնախույս արագացում: Վերջինս կախված է դիտարկվող կետի աշխարհագրական θ լայնությունից (նկ.8.8): Այդ պատճառով, նույնիսկ Երկրի գնդային համաչափության ենթադրության դեպքում, g -ն կախված կլինի θ -ից և կենտրոն տանող ուղղության հետ կկապվի

$$\alpha \approx \sin \alpha = (\Omega^2 r_1 / g) \sin \theta = (\Omega^2 R / g) \cos \theta \sin \theta \quad (57.2)$$

փոքր անկյուն: Պրոյեկտելով $\Omega^2 r_1$ և g վեկտորները դեպի Երկրի կենտրոն տանող ուղղության վրա, օգտվելով (56.2) և (57.2) -ից, կստանանք

$$g = g_{\oplus} \cos \alpha - \Omega^2 r_1 \cos \theta \approx g_{\oplus} - \Omega^2 R_{\oplus} \cos^2 \theta: \quad (57.3)$$

Շրջելի ճոճանակի (§78) տատանումների փորձով g -ն չափվում է մեծ ճշտությամբ: Նման չափումները տալիս են՝ բևեռում $g = 983.2$ սմ/վ², հասարակածում՝ ~ 978.0 սմ/վ²: Հաշվի առնելով այս արդյունքները (57.3) բանա-

ձևում, Երկրի ծանրության ուժի արագացման համար կստանանք. բևեռում $g_{\oplus} = g = 983.2 \text{ սմ/վ}^2$, հասարակածում $g_{\oplus} = g + \Omega^2 R = 981.4 \text{ սմ/վ}^2$: Եթե Երկիրը լիներ գնդաձև համաչափ, ապա բևեռում և հասարակածում $g_{\oplus}$ -ն կընդուներ նույն արժեքը: Այն, որ հասարակածում այն ավելի փոքր է, քան բևեռում, ցույց է տալիս, որ հասարակածը ավելի հեռու է Երկրի կենտրոնից, քան բևեռները: Այսինքն Երկիրն ունի թույլ սեղմված սֆերոիդի տեսք:

Գերբեռնվածություն: Եթե մարմինը կշռենք Երկրի նկատմամբ արագացումով շարժվող վերելակում կամ տիեզերանավում, ապա կստանանք ելդրովին տարբեր արդյունքներ:

Պիցուք m զանգվածով մարմինը կախված է a արագացումով շարժվող վերելակի առաստաղից: Վերելակի հետ կապված ՀՈՀ-ում ծանրոցի հարաբերական հավասարակշռության պայմանից մարմնի կշռի համար կստանանք $P = m(g - a)$: Պրոյեկտելով ստացված առնչությունը ուղղաձիգ առանցքի վրա, կստանանք

$$P = m(g \pm a), \quad (57.4)$$

դրտել տարբեր նշանները համապատասխանում են վերելակի արագաց-

Գերբեռնվածություններ, որոնց ենթարկվում է մարդը.

Ուղևորը՝ ինքնաթիռում ≤ 1.5

Պարաշյուտիստը՝ արագության հետևյալ արժեքների դեպքում

30 մ/վ 1.8

40 մ/վ 3.3

50 մ/վ 5.2

Կատապոլտող օդաչուն ≤ 16

Կառճատն գերբեռնվածությունը, որին դիմանում է վարժված մարդը հետևյալ ուղղություններով

մեջքից դեպի կուրծքը և հակառակը ≤ 30

գլխից դեպի ոտքերը ≤ 20

ոտքերից դեպի գլուխը ≤ 8

Երկարատև գերբեռնվածությունը մարդու դիմացկունության սահմանին 8

Տիեզերագնացը՝ «Վոստոկ»-ի մեկնարկում $8 - 10$

Տիեզերագնացը՝ «Սոյուզ»-ի մեկնարկում $3 - 4$

մանը դեպի վեր կամ վար ուղղություններին: Նկատենք, որ g -ին հակառակ ուղղված արագացումով շարժվող ՀՈՀ-ում ծանրոցի կշիռն աճում է, հակառակ դեպքում՝ նվազում: Առաջին դեպքում $P \cdot mg = 1 + a/g$ մեծությունն անվանում են *գերբեռնվածություն*:

Սղյուսակում ներկայացված են գերբեռնվածության արժեքները որոնց ենթարկվում է մարդը տարբեր իրավիճակներում:

Անկշռելիություն: Եթե վերելակը կատարում է ազատ անկում, ապա նրանում առաջանում է անկշռելիության վիճակ: (57.4) բանաձևից հետևում է, որ այդ դեպքում թելի ձգման ուժը (մարմնի կշիռը) դառնում է զրո:

Անկշռելիության վիճակ է Երկրի շուրջ շարժվող տիեզերանավում որի շարժիչն անջատված է Իրոք, տիեզերանավը Երկրի նկատմամբ ունի $-\Omega^2 r$, կենտրոնածիզ արագացում, որտեղ Ω –ն Երկրի շուրջ տիեզերանավի պտտման անկյունային արագությունն է: Հետևաբար, տիեզերանավի հետ կապված ՀՈՀ-ում բոլոր մարմինները կենթարկվեն $m\Omega^2 r$, ինտեգրալի կենտրոնախույս ուժի ազդեցությանը: Այն համակշռում է Երկրի ձգողության դաշտում մարմինների վրա ազդող ծանրության ուժին $m_g - m\Omega^2 r$: Արդյունքում տիեզերանավում մարմինները չեն ենթարկվում կախոցի թելի կամ հենարանի թեակցիայի ուժերի ազդեցությանը:

§58. ԱՋԱՏ ԸՆԿՈՂ ՄԱՐՄՆԻ ԵՆՈՒՄԸ ՈւՂԱԶԻԳԻՑ

Երկրի մակերևույթով շարժվող մարմնի վրա կորիոլիսյան ուժի ազդեցությունները քննարկեցինք §56-ում: Այժմ դիտարկենք տվյալ աշխարհագրական լայնության վրա ուղղաձիգով շարժվող, օրինակ, ազատ անկում կատարող, մարմնի վրա կորիոլիսյան ուժի ազդեցությունը: Երկրի հետ կապված ՀՈՀ-ում մարմնի ազատ անկումը նկարագրվում է

$$\frac{dv}{dt} = g + 2(v\Omega), \quad (58.1)$$

հավասարումով, որն ստացվում է (56.3)-ում $F = 0$ տեղադրելով:

Ստանանք ոչ մեծ h բարձրությունից առանց սկզբնական արագության ազատ ընկնող մարմնի շարժման օրենքը: Այն ստանալու համար անհրաժեշտ է ինտեգրել (58.1) հավասարումը: Նրա աջ մասում հիմնական անդամը g –ն է: Կորիոլիսյան արագացումը Երկրի օրական պտույտի Ω անկյունային արագության փոքրության պատճառով չնչին մեծություն է:

Նման դեպքում (58.1) հավասարումը կարելի է լուծել *հաջորդական մոտավորությունների եղանակով*, որը կայանում է հետևյալում: Ըստ (5.1)

զրոյական մոտավորության (58.1)–ում անտեսում են կորիոլիսյան արագացումը.

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = g.$$

որտեղից՝

$$v_{\parallel} = gt; \quad (58.2)$$

ինտեգրելիս հաշվի է առնված $v_{\parallel}(0) = 0$ սկզբնական պայմանը:

Ω -ի առաջին մոտավորությամբ մասնիկի արագությունն ստանալու համար (58.1)–ը ներկայացվում է հետևյալ կերպ.

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = g + 2(v_{\parallel}\Omega),$$

որտեղ հաշվի առնելով (58.2)–ը, $v_{\parallel}(0) = 0$ պայմանը և ինտեգրելով, կստանանք

$$v_{\perp}(t) = gt + [g\Omega]t^2; \quad (58.3)$$

Երկրորդ մոտավորությամբ կունենանք.

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = g + 2[v_{\perp}\Omega],$$

որտեղից՝

$$v_{\perp}(t) = gt + [g\Omega]t^2 + \frac{1}{3}[[g\Omega]\Omega]t^3; \quad (58.4)$$

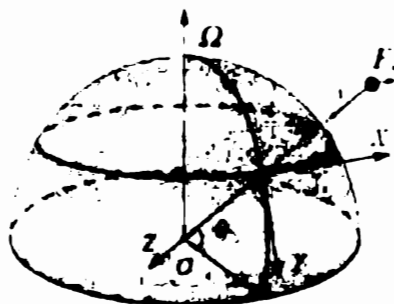
Համաձայն ձևով կարելի է ստանալ մասնիկի ազատ անկման արագության ժամանակից կախվածությունը ավելի բարձր մոտավորություններով: Սակայն մարմնի ազատ անկման հիմնական օրինաչափությունները լիովին ընդգրկված են (58.4) բանաձևում, որն ինտեգրելով ըստ ժամանակի, կստանանք մարմնի ազատ անկման օրենքը Ω^2 մոտավորությամբ.

$$r(t) = r_0 + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{3}[g\Omega]t^3 + \frac{1}{6}[[g\Omega]\Omega]t^4; \quad (58.5)$$

Ստացված արդյունքն ուսումնասիրելու համար ընտրենք դեկարտյան կոորդինատների համակարգը՝ նկ.8.9-ում ներկայացված ձևով: Նրանում

$$r_0 = (0, 0, -h); \quad g = (0, 0, g); \quad \Omega = (0, -\Omega \cos \theta, -\Omega \sin \theta),$$

որոնց հաշվառումը (58.5)–ում տալիս է շարժման օրենքը կորորինատային



Նկ.8.9

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 \Omega^2 \cos \theta, \quad y(t) = \frac{1}{2} t^2 \Omega^2 g \sin 2\theta, \quad z = -h + \frac{1}{2} g t^2. \quad (58.6)$$

որտեղ θ -ն դիտարկվող կետի աշխարհագրական լայնությունն է

Ուղղաձիգ Z առանցքով մասնիկի շարժման (58.5) օրենքի աջ մասի երրորդ և չորրորդ անդամներն անհամեմատ փոքր են առաջին երկուսից, և կարող են անտեսվել: Այդ մոտավորությամբ $z = 0$ պայմանից կորոշենք մարմնի անկման ժամանակը:

$$t = \sqrt{2h/g}: \quad (58.7)$$

Տեղադրելով այս արժեքը (58.6) ի մյուս երկու օրենքներում, կստանանք երկրի մակերևույթի վրա մասնիկի անկման կոորդինատները: Նկատենք նախ, որ պտույտի բացակայության դեպքում (58.6) հավասարումները տալիս են $x=y=0$: Այսինքն՝ մասնիկն ընկնում է ուղղաձիգով: Պտույտն առաջացնում է ուղղաձիգից մարմնի շեղում դեպի արևելք ($x > 0$) և հասարակած ($y > 0$): Ընդ որում հիմնականը դեպի արևելք շեղումն է, քանի որ այն Ω -ից կախված է գծայնորեն Օրինակ, ընդունելով $h = 200$ մ, $\theta = 40^\circ$ (Երևանի աշխարհագրական լայնությունը) և հաշվի առնելով, որ $\Omega = 2\pi T$, որտեղ $T = 24$ ժամ, կստանանք, $t = 6.4$ վ, $x = 4.7$ սմ, $y = 7 \cdot 10^{-2}$ սմ:

§59. ՆՈՒԿՈՑԻ ՃՈՃԱՆԱԿԸ

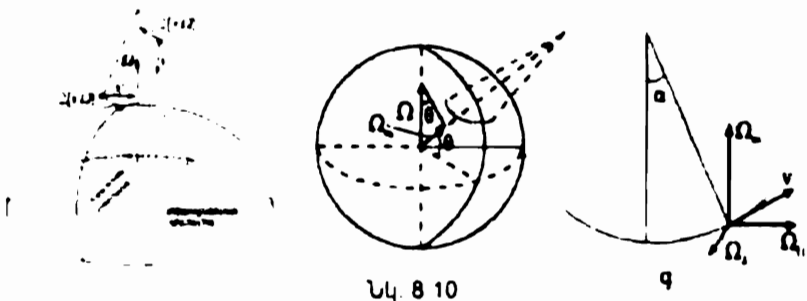
Ածրյա գործունեության ընթացքում որևէ կերպ չենք զգում երկրի պտույտը: Որպեսզի ցույց տրվի, որ գիշեր-ցերեկ հերթագայությունը երկրի պտույտի հետևանք է և ոչ թե նրա շուրջ Արեգակի պտույտի, անհրաժեշտ է դնել ֆիզիկական փորձ, որի օգնությամբ հնարավոր լինի հայտնաբերել երկրակենտրոն <<—ում Նյուտոնի օրենքներից շեղումները: Այդ շեղումներով էլ հենց հնարավոր կլինի որոշել երկրի սեփական արագացումները $\vec{A} < \vec{h}$ նկատմամբ և հաստատել նրա ոչ իներցիալ լինելը:

Նյուտոնի օրենքներից հետևում է, որ տիեզերական ճգողության ուժերով պահվող հեղուկ կամ գազային մարմինը պետք է ունենա զնդի ծև եթե չի պտտվում, և սեղմված սֆերոիդի տեսք, եթե պտտվում է: Երկրաբանական չափումները ցույց են տվել, որ երկրի հասարակածային շառավիղը 21.38% կմ-ով մեծ է բևեռի շառավիղից: Այս արդյունքը հնարավորություն է տվել գնահատել երկրի պտտման անկյունային արագության արժեքը:

Նյուտոնին հաջողվել է չափել նույնիսկ մեծ բարձրությունից ազատ ընկնող մարմնի ուղղաձիգից դեպի արևելք շեղումը:

Նշված փորձերը, թեև ցուցադրել են Երկրապննություն ՀՀ-ի ոչ իներցիալ լինելը, սակայն *Երկրի պտույտի անհերքելի ապացույց է հանդիսանում Ֆուկոյի փորձը* (1850թ.):

Ֆուկոն ուսումնասիրել է երկար թելից (64մ) կախված մեծ զանգվածով (28կգ) զնդի փոքր տատանումները (Ֆուկոյի ճոճանակ) ՀԽՀ-ում այս ճոճանակի տատանումները կկատարվեն անփոփոխ հարթության մեջ, քանի որ զնդի վրա ազդող ծանրության և թելի ծգման ուժերը միշտ ընկած են թելով և ուղղաձիգով կազմված անփոփոխ հարթության մեջ: Եթե Երկրագունդը պտտվում է, ապա նյութոսկյան այս ուժերից բացի ճոճանակը կենթարկվի լրացուցիչ իներցիալի ուժերի, որոնք ունեն տատանումների հարթությանն ուղղահայաց բաղադրիչներ: Ուրեմն, եթե Երկիրը պտտվում է, ապա պետք է պտտվի նաև Ֆուկոյի ճոճանակի տատանումների հարթությունը Այս եոևույթն էլ հենց գրանցվում է փորձում:



Նկ. 8 10

9

Նախ ենթադրենք, փորձը կատարվում է Երկրի բևեռում (Նկ.8.10ա): Իներցիալ ՀՀ-ի նկատմամբ ճոճանակը տատանվում է անփոփոխ հարթության մեջ, իսկ Երկիրը պտտվում է Ω անկյունային արագությամբ: Պարզ է, որ Երկրի հետ պտտվող ՀԽՀ-ում ճոճանակի տատանումների հարթությունը կպտտվի հակառակ ուղղությամբ՝ մեծությամբ նույն անկյունային արագությամբ: Այս պտույտն արդյունք է կորիոլիսյան ուժի ազդեցության:

Այլ աշխարհագրական լայնություններում ճոճանակի տատանումների հարթության պտույտը կատարվում է այլ անկյունային արագություններով: Դիցուք Ֆուկոյի ճոճանակը տեղադրված է θ աշխարհագրական լայնության վրա: Վերածելով Ω վեկտորը ուղղաձիգ և հորիզոնական բաղադրիչների՝ $\Omega = \Omega_n + \Omega_s$: Իր հերթին Ω_s բաղադրիչը վերածենք տվյալ պահին տատանումների հարթությանն ուղղահայաց Ω_s և հարթության մեջ ընկած

Ω բաղադրիչների (նկ.8.10բ,գ): Ճոճանակի շարժման հավասարումն այդ դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$ma = mg + T + 2m[v\Omega_{\omega}] + 2m[v\Omega_z] + 2m[v\Omega_{\omega}]:$$

Կորիոլիսի ուժի $2m[v\Omega_z]$ բաղադրիչն ուղղված է թելի երկայնքով և բնականաբար, չի կարող առաջացնել տատանումների հարթության պտույտ: $2m[v\Omega_{\omega}]$ ուժը միշտ ուղղահայաց է տատանումների հարթությանը և հիմնականում այն է վերջինիս պտույտի պատճառը: Թեև $2m[v\Omega_{\omega}]$ ուժը նույնպես ուղղահայաց է տատանումների հարթությանը, սակայն այն կարելի է արհամարհել, քանի որ համեմատական է տատանման պատճառով ուղղաձիգից թելի շեղման α փոքր անկյանը: Հետևաբար ճոճանակի տատանումների հարթության պտույտը կնկարագրվի

$$ma = mg - T + 2m[v\Omega_{\omega}]:$$

հավասարումով, որը բևեռներում ճոճանակի տատանման հավասարումից տարբերվում է նրանով, որ Ω -ի փոխարեն գրված է $\Omega_{\omega} = \Omega \sin \theta$: Այնպես որ θ աշխարհագրական լայնության վրա Ֆուկոյի ճոճանակի տատանումների հարթությունը կպտտվի $\Omega \sin \theta$ անկյունային արագությամբ: Կամ $m = 2\pi / \Omega = T / \sin \theta$ պարբերությամբ, որտեղ $T = 24$ ժամ:

8.1. ℓ_0 սկզբնական երկարություն - k կոշտություն ունեցող զսպանակից կախված m զանգվածով զնդիկը սկսում է պտտվել էներտրոնախույս մեքենայով Ω անկյունային արագությամբ (նկ. 8.1ա)։ Ինչ α անկյուն կկազմի զսպանակը ուղղածիցի հետ Պտտածողի հետ գնդիկի շփումը անտեսել։

Պատ $\alpha=0$, եթե $\Omega^2 < \frac{k g}{m \ell_0 (1+k m)}$, այլապես՝ $\cos \alpha = \frac{k-m \Omega^2}{\Omega^2-k \ell_0}$, ($\Omega < \sqrt{k \ell_0 m}$)

Լուծում։ Պտտվող համակարգում զնդիկի հավասարակշռության պայմաններն են $T \cos \alpha = m g$, $T \sin \alpha = m \Omega^2 r$, որտեղ $r = (\sin \alpha \cdot T = k(\ell - \ell_0))$ - զսպանակի առածականության ուժն է Արտաքսելով ℓ -ը, եթե $\alpha \neq 0$, կստանանք $m g(1 - m \Omega^2 / k) = m \Omega^2 \ell_0 \cos \alpha$, որտեղից՝ $g / \ell_0 = \Omega^2$, $k / m = \Omega^2$ նշանակումներից հետո կուենանք $\cos \alpha = \Omega^2(1 - \Omega^2 / \Omega^2) / \Omega^2$ որն իմաստ ունի եթե $\Omega, \Omega_2 = \sqrt{\Omega^2 - \Omega^2} < \Omega < \Omega_1$, եթե $\Omega < \Omega, \Omega_2 = \sqrt{\Omega^2 - \Omega^2}$, ապա $\alpha = 0$ իսկ $\Omega \rightarrow \Omega_2$ դեպքում $\ell \rightarrow \infty$, այսինքն զսպանակը խզվում է։

8.2. Ուղղանկյուն հավասարաարուն եռանկյան տեսքով զոդված ձողերի համակարգը Ω անկյունային արագությամբ պտտվում է AB եջի շուրջը (նկ. 8.2ա)։ Զդեֆորմացված վիճակում ℓ երկարություն - k կոշտություն ունեցող զսպանակի մի ծայրը ամրացված է A կետում, իսկ նյուս ծայրը՝ m զանգվածով մարմնին, որը առանց շփման կաող է սահել AC ներքևածիգով։ Ինչ Ω անկյունային արագության դեպքում է հնարավոր չդեֆորմացված վիճակում զսպանակի հավասարակշռությունը։ Կայուն է արդյոք մարմնի դիրքը հավասարակշռության այդ վիճակում։

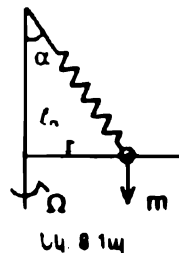
Պատ $\Omega^2 = \sqrt{2} g / \ell$, կայուն է, եթե $k \ell > m g \cos \alpha = m g / \sqrt{2}$

Լուծում։ Պրոյեկտելով պտտվող հաշվարկի համակարգում մարմնի վրա ազող ուժերը AC ներքևածիգի վրա, կստանանք

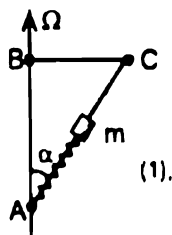
$$m \ddot{r} = -m g \cos \alpha - k(r - \ell) - m \Omega^2 r \sin^2 \alpha.$$

Կամ
$$\ddot{r} = \frac{k - m \Omega^2 \sin^2 \alpha}{m} \left(r - \frac{k \ell - m g \cos \alpha}{k - m \Omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \quad (1).$$

որտեղ r -ը մարմնի հեռավորությունն է A կետից՝ $\ddot{r} = 0$ պայմանից կստանանք մարմնի հավասարակշռության



Նկ. 8.1ա



Նկ. 8.2ա

դիրքին համապատասխանող r_0 -ն

$$r_0 = (k\ell - mg \cos \alpha) / (k - m\Omega^2 \sin^2 \alpha); \quad (k \neq m\Omega^2 \sin^2 \alpha) \quad (2)$$

Պահանջելով $r_0 = \ell$, կորոշեք փետրվող անկյունային արագությունը

$$\Omega^2 = \frac{g \cos \alpha}{\ell \sin^2 \alpha} = \frac{g}{\ell} \sqrt{2}$$

Կայունության հարցը պարզելու համար դիտարկեք (2) հավասարա-
կշռության դիրքից փոքր ξ շեղում $r = r_0 + \xi$ Տեղադրելով այն (1) -ում
կստանաք $\xi = (k/m - \Omega^2 \sin^2 \alpha)\xi$, որի $k > m\Omega^2 \sin^2 \alpha$ դեպքում ներկայացնում
է ներդաշնակ տատանում r_0 -ի շուրջ՝ $\omega = \sqrt{k/m - \Omega^2 \sin^2 \alpha}$ հաճախությամբ

8.3. Հաշվել առանց սկզբնական արագության ազատ ընկնող մարմնի՝
դեպի արևելք - հասարակած շեղումները խնդիրը լուծել կրեպակետորոն
հաշվարկի համակարգում Օգտվել երկու եղանակներից՝

ա) անմիջականորեն կիրառել Լյուտոսի օրենքները,

բ) կիրառել իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքը

Լուծում ա) Իներցիալ հաշվարկի համակարգում երկրի նկատմամբ
առանց սկզբնական արագության ընկնող մարմնի շեղումը AB ուղղաձիգից
բացատրվում է երկու գործոններով՝ նախ երկրի օրական պտույտի հետևա-

քով A, B կետերը ունեն տարբեր՝ $v_H = \Omega_\oplus R_\oplus$,

$v_A = \Omega_\oplus (R_\oplus + h)$ սկզբնական արագություններ

Բացի այդ, ծանրության ուժը ընկնող մարմնի
արագությանն ուղղահայաց է միայն սկզբնական A
կետում: Հետագա դիրքերում g -ն սուր անկյուն է
կազմում արագության հետ, որի հետևանքով այն ոչ
միայն պտտում է v_A արագության ուղղությունը, այլև
փոփոխում է նրա մեծությունը Նկ 8.3ա -ից
հետևում է, որ X առանցքով ընկնող մարմնի արա-
գացումը հետևյալն է

$$\ddot{x} = -g \sin \alpha \approx -g x / R_\oplus \approx$$

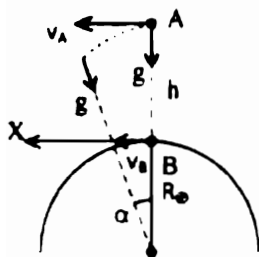
$$-g(R_\oplus + h)\Omega_\oplus^2 / R_\oplus \approx -g\Omega_\oplus^2$$

Ինտեգրելով այս հավասարումը, հաշվի առնելով $x_0 = v_A = (R_\oplus + h)\Omega_\oplus$
սկզբնական պայմանը, կստանաք

$$dx/dt = (R_\oplus + h)\Omega_\oplus - g\Omega_\oplus t^2/2$$

Եվս մեկ անգամ ինտեգրելով, կստանանք՝

$$x = (R_\oplus + h)\Omega_\oplus t - g\Omega_\oplus t^3/6$$



Նկ 8.3ա

Սակայն անկման $t = \sqrt{2h/g}$ ժամանակում B կետը տեղաշարժված կլինի $x_B = R_{\odot} \Omega_{\odot} t$ չափով Չետևաբար, հասարակածի ($\varphi = 0$) լայնության վրա ծարմնի շեղումը դեպի արևելք կլինի՝

$$S = x - x_B = \frac{2}{3} h \sqrt{2h/g} \Omega_{\odot}$$

բ) Զանի որ մարմնի վրա ազդող ծանրության ուժը կենտրոնական է. ապա իմպուլսի մոմենտը երկրի կենտրոնի նկատմամբ պահպանվում է՝ Չափարակածի լայնության վրա ընկնող մարմնի համար այն հետևյալն է՝

$$m(R_{\odot} + h)^2 \Omega_{\odot} = m(R_{\odot} + y)^2 (\Omega_{\odot} + \dot{\chi} / (R + y))$$

որտեղ y -ը երկրի մակերևույթից տվյալ պահին մարմնի քարծրությունն է. $\dot{\chi}$ -ը՝ արագության հորիզոնական բաղադրիչը։ Ոչ մեծ քարծրությունների համար այդ հավասարումից ստացվում է $\dot{\chi} = 2\Omega_{\odot}(h - y)$ ։ Զանի որ $h - y = g t^2 / 2$, ապա $\dot{\chi} = 2\Omega_{\odot} g t^2$ ։ Չետևաբար շեղման համար կունենաք

$$S = \int d\chi = \int_0^{\sqrt{2h/g}} \dot{\chi} dt = \frac{2}{3} h \sqrt{2h/g} \Omega_{\odot}$$

ԳԼՈՒԽ IX

ՏԻԵԶԵՐԱԿԱՆ ԶԳՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

§60. ԿԵՊԼԵՐԻ ՕՐԵՆՔՆԵՐԸ ՏԻԵԶԵՐԱԿԱՆ ԶԳՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

ՕՐԵՆՔԸ

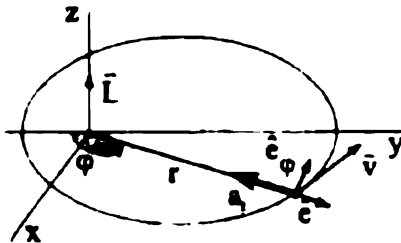
Ղանիացի աստղագետ *Տիխոն Բրահեյի* (1546-1601) ստացած դիտողական տվյալների մշակմամբ *Կեպլերը* (1571-1660) հայտնաբերեց Արեգակի շուրջ մոլորակների շարժման օրենքները.

1. *Մոլորակները շարժվում են էլիպսաձև ուղեծրերով, որոնց կիզակետերից մեկում գտնվում է Արեգակը.*

2. *Էլիպսաձև ուղեծրերով մոլորակները շարժվում են հաստատուն օժիտորային արագություններով.*

3. *Ուղեծրի մեծ կիսաառանցքի խորանարդի հարաբերությունը ուղեծրային շարժման պարբերության քառակուսուն՝ միևնույն հաստատուն մեծությունն է Արեգակի շուրջ պտտվող բոլոր մարմինների համար:*

Այս օրենքները Նյուտոնին հանգեցրին տիեզերական ծգողականության օրենքի հայտնաբերմանը:



Նկ. 9.1

Իսկապես, ելնելով առաջին երկու օրենքներից, ցույց տանք, որ մոլորակի վրա Արեգակի կողմից ազդող ուժն ուղղված է դեպի Արեգակը և հակադարձ համեմատական է Արեգակից մոլորակի հեռավորության քառակուսուն: Մոլորակի ուղեծրի հարթության մեջ ընտրենք բևեռային կոորդինատային (r, φ) համակարգ

Արեգակի հետ համընկնող սկզբնակետով (Նկ. 9.1): *Էլիպսի հավասարումն* այս համակարգում արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով.

$$r = \frac{se}{1 + e \cos \varphi}, \quad (60.1)$$

որտեղ s -ը էլիպսի չափերը բնութագրող մեծություն է, e -ն էլքսցենտրիկիտետ կոչվող մեծություն է, որը էլիպսի համար ընդունում է $0 < e < 1$ արժեքներ և ցույց է տալիս նրա սեղմվածության չափը:

Մոլորակի արագության բաղադրիչներն արտահայտվում են հետևյալ բանաձևերով (§4).

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}: \quad (60.2)$$

Այստեղ հաշվի է առնված, որ r -ը բարդ ֆունկցիա է ժամանակից $r = r(\varphi(t))$.

Օգտվելով նաև §34-ում սեկտորային արագության համար ստացված (34.16) բանաձևից, Կեպլերի երկրորդ օրենքը կներկայացնենք այսպես.

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const}: \quad (60.3)$$

Վերջինիս օգնությամբ բեռնային կոորդինատական համակարգում մոլորակի արագացումների համար կունենանք.

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{4\dot{\Sigma}^2}{r^3} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} \right) = -\frac{4\dot{\Sigma}^2}{se r^2}, \quad (60.4)$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0:$$

Արագացման a_r բաղադրիչի գրոլիները հետևում է Կեպլերի երկրորդ օրենքից, որը Արեգակի նկատմամբ մոլորակի իմպուլսի մոմենտի պահպանման արտահայտությունն է:

Նյուտոնի երկրորդ օրենքի և (60.4)-ի օգնությամբ կստանանք մոլորակի վրա Արեգակի կողմից ազդող ուժը

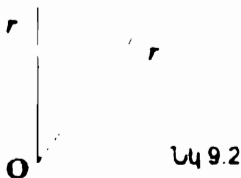
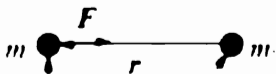
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\frac{4\dot{\Sigma}^2}{se} \frac{m}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (60.5a)$$

որտեղ m -ը մոլորակի զանգվածն է, իսկ $4\dot{\Sigma}^2/se$ հաստատուն մեծությունը Արեգակի ծգողության դաշտի բնութագիրն է: Զանի որ փոխազդեցության ընթացքում Արեգակն ու մոլորակը, համաձայն Նյուտոնի երրորդ օրենքի, ներկայանում են որպես հավասարազոր մարմիններ, ապա բնական է ենթադրել, որ ծգողության (60.5a) ուժը պետք է համեմատական լինի նաև Արեգակի զանգվածին: Այնպես որ Արեգակի կողմից մոլորակի վրա ազդող ուժը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$F = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (60.5)$$

որտեղ միևնույն նշանը ցույց է տալիս, որ այդ ուժն ուղղված է դեպի Արեգակը, իսկ G -ն գրավիտացիոն հաստատուն կոչվող համեմատականության գործակից է, որը ՄԱՀ-ում ունի հետևյալ չափողականությունը.

$$[G] = \text{Ն} \cdot \text{մ}^3 / \text{կգ}^2 \quad (60.6)$$



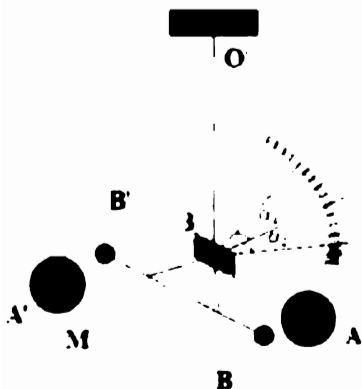
Նկ 9.2

Ստացված (60.5) արդյունքը Նյուտոնը տարածել է վակուումում փոխազդող ցանկացած երկու նյութական կետերի վրա՝ Այն հայտնի է որպես տիեզերական կամ գրավիտացիոն ձգողության օրենք

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (60.7)$$

Երկու նյութական կետեր միմյանց ձգում են իրենց զանգվածներին ուղիղ համեմատական և նրանց միջև հեռավորության քառակուսուն հակադարձ համեմատական ուժերով (Նկ. 9.2): Այս ուժերը կոչվում են տիեզերական ձգողության կամ գրավիտացիոն ուժեր, որոնցով փոխազդում են, առանց բացառության, բոլոր մարմինները.

Ոչ կետային մարմինների փոխազդեցության ուժերը կարելի է հաշվել՝ օգտվելով ուժերի անկախ ազդեցության սկզբունքից: Այդ նպատակով անհրաժեշտ է մտովի տրոհել մարմինները փոքր մասերի, որոնք տվ-



Նկ 9.3

յալ պայմաններում հնարավոր լինի համարել կետային, հաշվել բոլոր զույգ փոխազդեցության ուժերը և վեկտորապես գումարել: Այս ծևով կարելի է համոզվել, որ գնդային մարմինները միմյանց ձգում են նույն (60.7) ուժերով. կարծես նրանց ողջ նյութը կենտրոնացված է նրանց երկրաչափական կենտրոններում:

Գրավիտացիոն հաստատունի փորձնական որոշումը: G -ի որոշման առաջին փորձը կատարել է Կավենդիշը (1798թ) ոլորակշեռքի միջոցով (Նկ

9.3). Այն ներկայացնում է առածգական լարից կախված թեթև լծակ, որի ծայրերին ամրացված են m զանգվածով միանման գնդեր: Գնդերին մոտ, նախ AA' դիրքում, այնուհետև BB' դիրքում տեղադրվում են մեծ M զանգվածով երկու այլ գնդեր: Ընդդիմ m և M զանգվածների գրավիտացիոն ծգողության, լծակը պտտվում է հավասարակշռության դիրքից α_1 (AA' դեպքում) և α_2 (BB' դեպքում) անկյուններով, որոնք չափվում են հայելուն ընկնող լուսային ճառագայթի շեղմամբ (նկ.9.3). Եթե հարևան փոքր և մեծ գնդերի կենտրոնների միջև հեռավորությունը նշանակենք r , իսկ լծակի երկարությունը l , ապա OO' առանցքի նկատմամբ լծակի վրա ազդող գրավիտացիոն ուժերի $G M m l / r^2$ մոմենտը հավասարակշռության վիճակում խավասարվի լարի ոլորման առածգական ուժի $f \alpha$ մոմենտին (f -ը լարի ոլորման մոդուլն է (§75))

$$f \alpha_1 = G M m l / r^2, \quad f \alpha_2 = -G M m l / r^2:$$

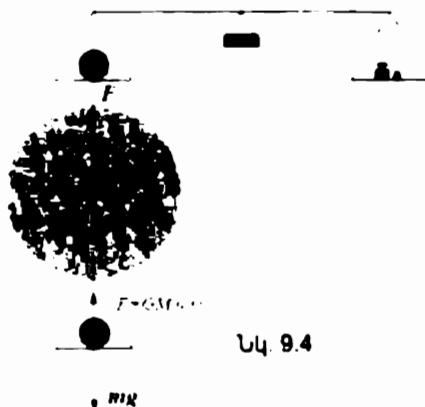
Ոլորման f մոդուլը կարելի է որոշել ոլորական տատանումների պարբերության չափման միջոցով

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{f}} = 2\pi \sqrt{\frac{g l}{\pi^2 f}},$$

որտեղ $I = 2m(l/2)^2$ - գնդիկների իներցիայի մոմենտն է լարով անցնող առանցքի նկատմամբ: Արդյունքում գրավիտացիոն հաստատունի որոշման համար կստանանք հետևյալ բանաձևը

$$G = \frac{\pi^2 l r^3}{M T^2} (\alpha_1 - \alpha_2): \quad (60.8)$$

Գրավիտացիոն հաստատունի որոշման այլ փորձ կատարել է *ժյին* (1878թ.): Փորձի սարքավորման ուրվագիծ պատկերը ներկայացված է նկ. 9.4-ում: Լծակավոր կշեռքի մի լծակից կախված են երկու նժարներ, որոնց միացնող լարը անցնում է մեծ M զանգվածով արձձե գնդի տրամագծով բացված անցքով: Եթե գնդին նժարին դնենք m զանգվածով գունդ, ապա այդ նժարի վրա կազդի հետևյալ ուժը.



Նկ. 9.4

$$F_1 = mg + GMm/r^2:$$

Եթե գնդիկը վերին նմարից տեղափոխենք ստորին նմար, կունենանք

$$F_2 = mg - GMm/r^2:$$

Այստեղ r -ը գնդիկի և մեծ գնդի կենտրոնների միջև հեռավորությունն է, որը նույնն է երկու դեպքում: Չափելով F_1 , F_2 ուժերը և տեղադրելով

$$G = \frac{F_1 - F_2}{2Mm} r^2: \quad (60.9)$$

բանաձևում, կստանանք գրավիտացիոն հաստատունի արժեքը.

$$G = 6,6732 \cdot 10^{-11} \text{ Ն.մ}^2/\text{կգ}^2: \quad (60.10)$$

Տիեզերական ծողողության ուժի բանաձևից հետևում է, որ G -ն *բնական հաստատու է իրարից 1 մ հեռավորության վրա գտնվող մեկական կգ զանգված ունեցող երկու նյութական կետերի ծողողության ուժին*:

§61. ԳՐԱՎԻՏԱԾԻՈՆ ԴԱՇՏ: ԴԱՇՏԻ ԲՆՈՒՑԱԳՐԵՐԸ

Համաձայն ժամանակակից պատկերացումների՝ մարմինների գրավիտացիոն փոխազդեցություններն իրականացվում են մատերիական ուժային դաշտերով: Յուրաքանչյուր մարմին իր շրջապատում ստեղծում է գրավիտացիոն դաշտ, որն էլ հենց ազդում է իրենում գտնվող մարմինների վրա: Այս ներկայացմամբ մարմինների գրավիտացիոն փոխազդեցության խնդիրը հանգեցվում է երկու համեմատաբար պարզ խնդիրների.

-որոշել կամայական մարմնի ստեղծած գրավիտացիոն դաշտը,

-որոշել դաշտում կամայական մարմնի վրա ազդող ուժը:

Ի՞նչ մեծություններով բնութագրել գրավիտացիոն դաշտը:

Փորձը ցույց է տալիս, որ գրավիտացիոն դաշտի տվյալ կետում մասնիկի վրա ազդող ուժը համեմատական է նրա զանգվածին՝ Այսինքն՝ եթե դաշտի տվյալ կետում հաջորդաբար տեղավորենք m_1 , m_2 , ..., m_n զանգվածներով մասնիկներ և չափենք նրանց վրա ազդող F_1 , F_2 , ..., F_n ուժերը, ապա

$$\frac{F_1}{m_1} = \frac{F_2}{m_2} = \dots = \frac{F_n}{m_n} = \text{const}$$

հարաբերություններն անկախ դաշտ մտցված մասնիկի հատկություններից, դիտարկվող կետում նույնն են (ենթադրվում է, որ դաշտը ստացիոնար է): Հենց այս հարաբերությունն էլ ընտրվել է որպես դաշտի ուժային բնութագիր

$$\frac{F(r)}{m} = g(r), \quad (61.1)$$

և անվանվել *գրավիտացիոն դաշտի լարվածություն*։ Ընդհանուր դեպքում լարվածության վեկտորը կարող է կետից կետ փոփոխվել ինչպես մեծությամբ, այնպես էլ ուղղությամբ։ Լյդպիսի դաշտերը կոչվում են *անհամասեռ*։ Մեծությամբ և ուղղությամբ հաստատուն լարվածությամբ բնութագրվող դաշտը կոչվում է *համասեռ*։ Ցանկացած անհամասեռ գրավիտացիոն դաշտում միշտ կարելի է ընտրել բավականաչափ փոքր տիրույթներ, որոնցում դաշտը հնարավոր լինի համարել համասեռ։ Այս պնդումը ճիշտ է ցանկացած դաշտի համար։

Գրավիտացիոն դաշտը համարվում է տրված, եթե հայտնի է նրա լարվածության վեկտորի կախվածությունը կոորդինատներից։

Ստանանք Օ կետում տեղավորված m զանգվածով կետային մարմնի գրավիտացիոն դաշտի լարվածությունը տարածության որևէ կետում։ Տեղավորենք r կետում m' զանգվածով մասնիկ։ Համաձայն տիեզերական ձգողության օրենքի, նրա վրա կազդի

$$F = -G \frac{mm'}{r^2} \hat{r} \quad (61.2)$$

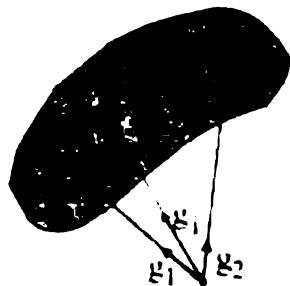
ուժը, որտեղից (61.1) -ի հաշվառմամբ *կետային զանգվածի ստեղծած գրավիտացիոն դաշտի լարվածության համար կստանանք.*

$$g = -\frac{Gm}{r^2} \hat{r} \quad (61.3)$$

Մասնիկների կամայական համախմբի ստեղծած գրավիտացիոն դաշտը կարելի է որոշել (61.3)-ի միջոցով, օգտվելով *դաշտերի վերադրման սկզբունքից*։ Սա դաշտերի կարևորագույն հատկություններից է, որը ուժերի *անկախ ազդեցության սկզբունքի անմիջական հետևանք* է։ տարածության որևէ կետում համախմբի գրավիտացիոն դաշտի լարվածությունը հավասար է համախումբը կազմող մարմինների առանձին-առանձին ստեղծած գրավիտացիոն դաշտերի g , լարվածությունների վեկտորական գումարին։

$$g = \Sigma g_i$$

Հետևաբար, կետային մարմինների համախմբի գրավիտացիոն դաշտի լարվածությամբ



$$\mathbf{g} = \sum \frac{Gm_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (61.5)$$

բանաձևով, որտեղ հաշվարկի սկզբնակետն ընտրված է այն կետը, որում որոշվում է դաշտի լարվածությունը (նկ. 9.6):

Եթե համախմբում զանգվածը բաշխված է անընդհատ, ապա (6.15)-ի փոխարեն կունենանք

$$\mathbf{g} = \int \frac{Gdm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \int \frac{G\rho dV}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (61.6)$$

երկրորդ ինտեգրալում dm տարրական զանգվածն արտահայտված է ρdV տեսքով, և ինտեգրված է ըստ մարմնի ծավալի: Վերջին բանաձևերը տալիս են առաջին խնդրի լուծումը:

Կամայական r կետում տեղադրված m զանգվածով մասնիկի վրա գրավիտացիոն դաշտը կազդի

$$\mathbf{F}(r) = m\mathbf{g}(r) \quad (61.7)$$

ուժով: Այս բանաձևը փաստորեն լուծում է երկրորդ խնդիրը, քանի որ դաշտը մասնիկների կամայական համախմբի վրա կազդի հետևյալ ուժով (դիսկրետ և անընդհատ բաշխումների դեպքում):

$$\mathbf{F} = \sum m_i \mathbf{g}_i(r_i) = \int_V \mathbf{g}(r) dm. \quad (61.8)$$

Ահայն գրավիտացիոն ուժերի ազդեցությամբ մասնիկի շարժումը կոչվում է *ազատ անկում*: Համեմատելով լսելիվածության վեկտորի (61.1) սահմանումը Նյուտոնի երկրորդ օրենքի հետ, նկատում ենք, որ գրավիտացիոն դաշտի լարվածության վեկտորը տվյալ կետում մասնիկի *ազատ անկման արագացումն* է: Այստեղից ստանում ենք չափազանց կարևոր արդյունք. *գրավիտացիոն դաշտի տվյալ մասում մարմիններն, անկախ նրանց զանգվածներից, ազատ անկում են կատարում միևնույն արագացմամբ*: Այս արդյունքը հայտնի է որպես *Գալիլեյի ընդհանրացված թեորեմ*:

Գրավիտացիոն դաշտը կարելի է բնութագրել նաև էներգիապես. §24-ում ցույց ենք տվել, որ գրավիտացիոն ուժերը կոնսերվատիվ են: Հետևաբար *գրավիտացիոն դաշտը պոտենցիալային է*: Օգտվելով $\mathbf{F}d\mathbf{r} = -dU$ առնչությունից, հաշվի առնելով (61.7)-ը և բաժանելով ստացվածը մասնիկի զանգվածի վրա, կստանանք՝

$$\mathbf{g}d\mathbf{r} = -dU/m \equiv -d\phi, \quad (61.9)$$

որտեղ

$$\varphi(r) = U(r) m \quad (61.10)$$

մեծությունն անկախ է դաշտ մտցված մասնիկի m զանգվածից և կոչվում է գրավիտացիոն դաշտի պոտենցիալ։ Այն ներկայացնում է դաշտի r կետում տեղադրված միավոր զանգվածով մասնիկի պոտենցիալ էներգիան։ Ընդ որում դաշտի տվյալ կետն օժտված է $\varphi(r)$ պոտենցիալով և $g(r)$ լարվածությամբ, անկախ այն բանից, տեղադրված է այդտեղ մասնիկ, թե ոչ։

Դաշտի կամայական 1 և 2 կետերում պոտենցիալների տարբերությունը լարվածության հետ կապված է

$$\int_1^2 g(r) dr = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi \quad (61.11)$$

առնչությամբ։ Որը (61.9)-ի անմիջական հետևանքն է։ Ինչպես մասնիկի պոտենցիալ էներգիան, այնպես էլ դաշտի $\varphi(r)$ պոտենցիալը որոշվում է անորոշ գումարելիի ճշտությամբ։ Այս անորոշությունը վերացվում է պոտենցիալի նորմալիզումով (տես §25)։

Օգտվելով (25.4) բանաձևից, կարելի է ստանալ m զանգվածով նյութական կետի գրավիտացիոն դաշտի պոտենցիալը

$$\varphi(r) = -\frac{Gm}{r} \quad (61.12)$$

Դաշտերի վերադրման սկզբունքը թույլ է տալիս որոշել կամայական թափում ունեցող մասնիկների համախմբի ստեղծած գրավիտացիոն դաշտի պոտենցիալը.

$$\varphi = \sum \varphi_i = -\sum \frac{Gm_i}{r_i} \quad (61.13)$$

դիսկրետ բաշխման դեպքում, իսկ անընդհատ բաշխման դեպքում՝

$$\varphi = -\int \frac{G \rho dV}{r} \quad (61.14)$$

Դաշտի էներգետիկ և ուժային բնութագրերի միջև կապը հետևում է (25.16) բանաձևից.

$$g = -\nabla \varphi = -\text{grad} \varphi \quad (61.15)$$

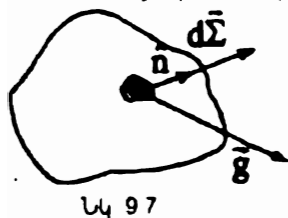
Թեև φ և g մեծությունները դաշտի համարժեք բնութագրերն են, սակայն առավել հարմար է գործ ունենալ պոտենցիալի հետ, քանի որ այն միավոր մեծություն է։

§62. ԳՐԱՎԻ ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ ԴԱՇԵՏ ԵՎ ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ

ԷՆԵՐԳԻԱՆ: ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ ՇԱՌԱՎԻՂ

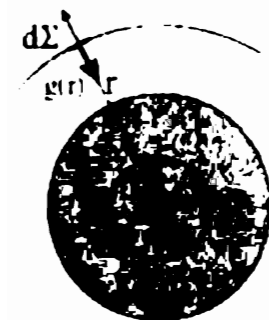
Գառուսի թեորեմ: Գրավիտացիոն դաշտի լարվածության (61.5), (61.6), ինչպես նաև պոտենցիալի (61.14), (61.15) բանաձևերը սկզբունքորեն թույլ են տալիս որոշել կամայական համախմբի ստեղծած գրավիտացիոն դաշտը: Սակայն որոշ դեպքերում հարմար է օգտվել (61.5) և (61.6)–ին համարժեք Գառուսի թեորեմից, որն այստեղ կընդունենք առանց ապացույցի:

Կամայական փակ մակերևույթով գրավիտացիոն դաշտի լարվածության վեկտորի հոսքը հավասար է այդ մակերևույթով պարփակված զանգվածի և $-4\pi G$ մեծության արտադրյալին



$$\oint_S \mathbf{g} d\Sigma = -4\pi G m : \quad (62.1)$$

Սակերևույթի տարրական $d\Sigma$ մակերեսով $\mathbf{g}$ վեկտորի հոսք ասելով հասկանում են $\mathbf{g} d\Sigma$ սկալար արտադրյալը (Նկ 9.7): Փակ մակերևույթով վեկտորի հոսքը հավասար է բոլոր տարրերով վեկտորի հոսքերի հանրահաշվական գումարին:



Օգտվելով Գառուսի թեորեմից, որոշենք M զանգված և R շառավիղ ունեցող համասեռ գնդի գրավիտացիոն դաշտի լարվածությունը:

Նախ որոշենք դաշտը գնդից դուրս տիրություն: Այդ նպատակով մտովի առանձնացնենք գնդին համակենտրոն $r > R$ շառավիղով փակ մակերևույթ (Նկ 9.8) և հաշվենք նրանով գնդի գրավիտացիոն դաշտի լարվածության վեկտորի հոսքը: Համաչափության նկատառումներից ելնելով՝ կարելի է անդել, որ $\mathbf{g}$ –ն ամենուրեք ուղղված է դեպի գնդի կենտրոն և կախված է միայն գնդի կենտրոնից դիտարկվող կետի r հեռավորությունից:

$$\mathbf{g} = -\hat{r}g(r) : \quad (62.2)$$

Պարզ է նաև, որ գնդային մակերևույթի ցանկացած տարրի համար $d\Sigma = \hat{r}d\Sigma$: Հետևաբար

$$\mathbf{g} d\Sigma = -g(r)d\Sigma : \quad (62.3)$$

Հաշվի առնելով, որ (62.1)–ում ինտեգրումը կատարվում է $r = \text{const}$

մակերևութով, որի վրա $g(r) = \text{const}$, կատանանք

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{g} d\Sigma = -g(r) \oint_{\Sigma} d\Sigma = -4\pi r^2 g(r) : \quad (62.4)$$

Քանի որ դիտարկվող մակերևութի ներսում պարփակված է գնդի ողջ զանգվածը, ապա (62.4) և (62.1) բանաձևերից կունենանք. $4\pi r^2 g(r) = 4\pi G M$ որտեղից

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}, \quad (r > R) : \quad (62.5)$$

Ուրեմն, համասեռ գնդի գրավիտացիոն դաշտը գնդից դուրս տիրույթում համընկնում էիր կենտրոնում տեղավորված նույն զանգվածով նյութական կետի դաշտի հետ: Այդ տիրույթում գտնվող m զանգվածով մասնիկը գնդի կողմից կծավի տիեզերական ծգողության օրենքով տրվող

$$F = mg = GMm/r^2 \quad (62.6)$$

ուժով: Այնպես որ, իրողք, (62.6) օրենքը ճիշտ է ինչպես կետային, այնպես էլ գնդային մարմինների համար: Համանման ծեով գնդից դուրս տիրույթում գրավիտացիոն դաշտի պոտենցիալը կարտահայտվի նույն զանգվածով կետային մարմնի ստեղծած դաշտի պոտենցիալի բանաձևով.

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^r g(r) dr = -GM/r, \quad (r \geq R) : \quad (62.7)$$

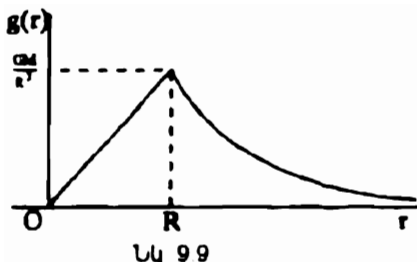
Որոշենք գրավիտացիոն դաշտի լարվածությունը գնդի ներսում: Այդ նպատակով ընտրենք գնդին համակենտրոն $r < R$ շառավիղով գնդային մակերևույթ (նկ.9.8) և օգտվենք Չաուսի թեորեմից: Նորից g վեկտորի հոսքի համար կստանանք (62.4) արդյունքը: Չանգվածի բաշխման համասեռությունից պարզ է, որ $r < R$ շառավիղով գնդային մակերևութի ներսում պարփակված է

$$m(r) = Mr^3/R^3 \quad (62.8)$$

զանգված: Վերջինիս հաշվառմամբ Չաուսի թեորեմից կստանանք

$$g(r) = GMr/R^3 = Gm(r)/r^2, \quad (r \leq R) : \quad (62.9)$$

Ստացվեց կարևոր արդյունք. գնդի $r < R$ կետում գտնվող մասնիկի վրա ազդում է միայն r շառավիղով գնդային մակերևութում պարփակված զանգվածը: Այդ մակերևութից դուրս գտնվող զանգվածը մասնիկի վրա չի ազդում: Այստեղից մասնավորապես հետևում է, որ գնդին համակենտրոն $r < R$ շառավիղով խոռոչում գրավիտացիոն դաշտը բացակայում է:



Համասեռ գնդի գրավիտացիոն դաշտի լարվածության (62.5) և (62.9) կախումները ներկայացված են Նկ 9.9-ում

Գնդի գրավիտացիոն էներգիան Համախմբելով, որոնք կազմավորվել և պահվում են տիեզերական ծգողության ուժերով, կոչվում են գրավիտացվող:

Այդպիսի համախմբեր են երկրագունդը, Արեգակը, մոլորակները, արեգակնային համակարգը, գալակտիկաները և այլն: §26-ում մասնիկների համախմբի ներքին կոնսերվատիվ ուժերի աշխատանքը բնութագրեցինք սեփական պոտենցիալ էներգիայով, որը կախված է համախմբի կոնֆիգուրացիայից: *Գրավիտացվող համախմբի սեփական պոտենցիալ էներգիան կոչվում է գրավիտացիոն էներգիա*

$$dA = -dU_g : \quad (62.10)$$



Գրավիտացիոն էներգիան այն աշխատանքն է, որը կկատարեն ներքին գրավիտացիոն ուժերը համախմբը քայքայելիս այսինքն՝ համախմբը կազմող մասնիկները միմյանցից անվերջ հեռացնելիս: Գրավիտացիոն էներգիան բացասական մեծություն է, քանի որ համախմբը քայքայելու համար արտաքին ուժերը պետք է կատարեն դրական աշխատանք:

Որոշենք համասեռ գնդի գրավիտացիոն էներգիան:

Դիցուք անվերջությունից զանգված բերելով կազմավորում ենք M զանգված և R շառավիղ ունեցող գունդ: Այս ընթացքում արդեն կազմավորված $m(r)$ զանգվածով գնդի դաշտում dm զանգվածով թաղանթ անվերջությունից բերելու և գնդի շուրջ բաշխելու համար (Նկ.9.10) գրավիտացիոն ուժերը կկատարեն

$$dA = -\varphi(r)dm = -\frac{Gm(r)dm}{r} = -dU_g \quad (62.11)$$

աշխատանք: Արտահայտելով (62.7)-ից r -ը $m(r)$ -ով, տեղադրելով (62.11)-ում և ինտեգրելով ըստ զանգվածի, կստանանք *գնդի գրավիտացիոն էներգիայի բանաձևը*

$$U_r = - \frac{GM^{(1)}}{R} \int_0^M m^{(1)} dm = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (62.12)$$

Ուրեմն, համասեռ գնդի գրավիտացիոն էներգիան հակադարձ համեմատական է նրա շառավիղին: Փոքրացնելով տվյալ M զանգվածով գնդի շառավիղը, այսինքն՝ մեծացնելով զանգվածի խտությունը, կարելի է գնդի գրավիտացիոն էներգիան դարձնել իր ռելատիվիստական Mc^2 էներգիայի վարդի: Գնդի շառավիղի այդ արժեքը կոչվում է *գրավիտացիոն շառավիղ*

$$R_g \approx GM/c^2, \quad (62.13)$$

որը կախված է միայն գնդի զանգվածից: Արեգակի համար ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ կգ) այն կիլոմետրի կարգի է, իսկ Երկրագնդի համար՝ մետրի ($M_\oplus = 6 \cdot 10^{24}$ կգ): Եթե հաշվի առնենք, որ Արեգակի շառավիղը՝ $R_\odot = 700$ հազար կմ է, իսկ Երկրինը՝ $R_\oplus = 6400$ կմ, ապա պարզ կդառնա, որ այդ մարմինների գրավիտացիոն էներգիաները նրանց ռելատիվիստական էներգիաների չնչին մասն են կազմում: Սակայն գերխիտ (միջուկային խտություն ունեցող), առաքս կոչված նեյտրոնային աստղերի համար, որոնք ունեն Արեգակի զանգվածի կարգի զանգվածներ, բայց $R \approx 10$ կմ շառավիղ, գրավիտացիոն էներգիան կազմում է հանգստի էներգիայի 10% - 30%: Նման գերխիտ մարմինների շուրջ գրավիտացիոն դաշտերն այնքա չեն նկարագրվում նյուտոնյան (61.3) և (61.12) բանաձևերով: Էյնշտեյնը (1915թ.) կառուցել է գերիզոթ և արագ փոփոխվող գրավիտացիոն դաշտերի տեսությունը, որը կոչվում է *գրավիտացիայի ռելատիվիստական տեսություն կամ հարաբերականության ընդհանուր տեսություն*: Այդ տեսության հիմունքներին կծանոթանաք դասընթացի §68-ում: Այստեղ նշենք միայն, որ գերխիտ գնդային մարմնի կողմից մասնիկի վրա ազդող գրավիտացիոն ուժը, որոշ մոտավորությամբ, տրվում է ոչ թե (60.5), այլ

$$F = \frac{GMm}{r^2 \sqrt{1 - R_g/r}}, \quad (r > R_g) \quad (62.14)$$

բանաձևով, որտեղ

$$R_g = 2GM/c^2 \quad (62.15)$$

գնդի գրավիտացիոն շառավիղի ճշգրիտ արժեքն է: R_g շառավիղով գնդային մակերևույթը կոչվում է *Եվանգշիլդի ոլորտ*:

Նկատենք, որ նյուտոնյան և էյնշտեյնյան ծգողության ուժերը տարբերվում են (62.14)-ի հայտարարի արմատով: Եթե գնդի շառավիղը, կամ Դալարկվող կետի հեռավորությունը գնդի կենտրոնից անհամեմատ մեծ է

գնդի գրավիտացիոն շառավղից, ապա նյութոսնյան և էյնշտեյնյան բանա-
ձևերը տալիս են նույն արդյունքները Սակայն գերխիտ աստղի մակերևույթ-
ին մոտ տիրույթներում էյնշտեյնյան ծգողության ուծը անհամեմատ գե-
րազանցում է նյութոսնյան ծգողության ուծի արծեքը Մասնավորապես
Եվարցշիդի ոլորտին մոտենալիս գրավիտացիայի էյնշտեյնյան ուծը ծրգ-
տում է անվերջության: Պարզվում է, R_g շառավղով մարմինը նույնիսկ չի
կարող գտնվել հավասարակշռության վիճակում և պետք է անկասելիորեն
սեղմվի էյնշտեյնի տեսության հետևանք հանդիսացող այդ երկնային մար-
միններն ստացել են «սև խոռչներ» անվանումը:

Միայնակ սև խոռչից որևէ լուսային այիք չի կարող գրանցվել, քան-
որ նրանից առաքված լուսային քվանտը չի կարող հաղթահարել սև խո-
ռչի հզոր գրավիտացիան: Սակայն, եթե սև խոռչը գտնվում է կրկնակի
աստղի կազմում, ապա նման համակարգերում ընթացող որոշակի ֆիզի-
կական երևույթներ կարող են գրանցվել երկրի վրա:

Այն, որ լույսը ծգվում է երկնային մարմինների կողմից, գիտակցել է
դեռևս Նյուտոնը: 18-րդ դարի վերջին *Լապլասը* նույնիսկ կանխագուշակել
է, որ երկրագնդի խտությունը և 250 երկրային շառավղի ունեցող աստղից
հնարավոր չէ ստանալ լույս, քանի որ նման աստղի շուրջ պարաբոլական
շարժման արագությունը (§66) հավասարվում է լույսի արագությանը:

§63. ԿԵՐԼԵՐԻ ԽՆԴԻՐ

Այսպես է կոչվում մեծ M զանգվածով նյութական կետի գրավիտա-
ցիոն դաշտում թեթև ($m \ll M$) մասնիկի շարժման ուսումնասիրության խնդի-
րը, որը մեծ ճշտությամբ մոդելավորում է Արեգակի շուրջ մարմինների (մո-
լորակների, գիսաստղերի), ինչպես նաև մոլորակների շուրջ արբանյակնե-
րի շարժումը: Ակներև է, որ կախված թեթև մասնիկին հաղորդված էներ-
գիայի չափից, նրա շարժումը կարող է լինել *ֆինիտ* (շրջանագիծ, էլիպս),
կամ *ինֆինիտ* (պարաբոլ, հիպերբոլ): Այնպես որ խնդիրը հանգեցվում է
ծանր կետային զանգվածի գրավիտացիոն դաշտում թեթև մասնիկի ֆի-
նիտ կամ ինֆինիտ շարժման պայմանների բացահայտմանը: Հարմար է
խնդիրը լուծել բևեռային կոորդինատների համակարգում, որի սկզբնա-
կետը կապված է ծանր մասնիկի հետ:

Դիփիպատիվ ուծերի բացակայությամբ *մասնիկի լրիվ մեխանիկա-
կան էներգիան պահպանվում է*:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \text{const.} \quad (63.1)$$

որտեղ v , v_0 -ն մասնիկի արագության շառավղային և ազիմուտային բաղադրիչներն են, r -ը՝ հեռավորությունը ուժային կենտրոնից:

Հաշվի առնելով նաև *խնայողի մոմենտի պահպանման օրենքը*

$$L = mrv_0 = \text{const.} \quad (63.2)$$

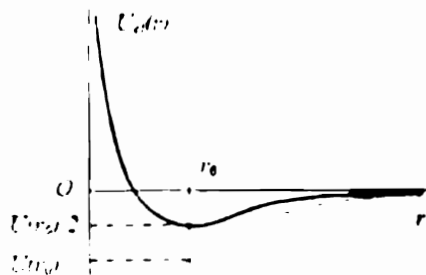
(63.1) -ը կնդունի հետևյալ տեսքը.

$$E = mv_0^2/2 - GMm/r + L^2/2mr^2 = mv_0^2/2 + U_{ef}(r) \quad (63.3)$$

Էներգիայի համար ստացված (63.3) արտահայտությունից հետևում է, որ մասնիկի շառավղային շարժումը կատարվում է

$$U_{ef} = -GMm/r + L^2/2mr^2 \quad (63.4)$$

էֆեկտիվ պոտենցիալ էներգիայով բնութագրվող ուժադաշտում: $U_{ef}(r)$ ֆունկցիայի կախվածությունը ուժային կենտրոնից մասնիկի r հեռավորությունից ներկայացված է նկ.9.11-ում: Քանի որ կինետիկ էներգիան ոչ բացասական մեծություն է, ապա մասնիկը կարող է գտնվել r -ի այն տիրույթներում, որոնցում (§30)



$$U_{ef} \leq E. \quad (63.5)$$

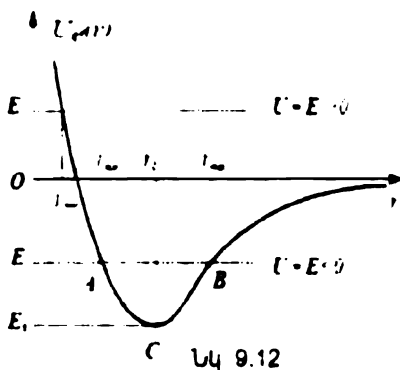
ընդ որում հավասարության նշանին համապատասխանող r -ի արժեքները մասնիկի շառավղային շարժման համար *շրջման կետեր* են, որոնցում v , -ը դառնում է զրո և փոխում նշանը: Գրաֆիկից հետևում է, որ $E < 0$ դեպքում կան երկու շրջման կետեր (A և B), որոնց համապատասխանում են ուժային կենտրոնից մասնիկի *մերձակետային* r_{min} և *հեռակետային* r_{max} հեռավորությունները (նկ.9.12):

$$U(r) = -GMm/r$$

Նկ. 9.11

$E < 0$ դեպքում կատարվում է *ֆինիտ* շարժում՝ *էլիպսան* ուղեծրով: Պրական լրիվ էներգիայով մասնիկին համապատասխանում է մեկ շրջման կետ: Այդ դեպքում r_{min} -ը նվազագույն հեռավորությունն է, որով կարող է մոտենալ ուժային կենտրոնին տվյալ E էներգիայով մասնիկը *պարաբոլական* ($E = 0$) և *հիպերբոլական* ($E > 0$) ուղեծրերով շարժվելիս:

Պրական լրիվ էներգիայով մասնիկին համապատասխանում է մեկ շրջման կետ: Այդ դեպքում r_{min} -ը նվազագույն հեռավորությունն է, որով կարող է մոտենալ ուժային կենտրոնին տվյալ E էներգիայով մասնիկը *պարաբոլական* ($E = 0$) և *հիպերբոլական* ($E > 0$) ուղեծրերով շարժվելիս:



Մասնիկի շարժումն այս դեպքում ինֆինիտ է. Թանի որ $U_{\infty} \rightarrow 0$ երբ $r \rightarrow \infty$, ապա

$$E = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2 : \quad (63.6)$$

Ուրեմն, հիպերբոլական շարժման դեպքում մասնիկն անվերջությունից ուժային կենտրոնին մոտենում է զրոյից տարբեր սկզբնական արագությամբ v_{∞}^{in} իսկ պարաբոլական դեպքում առանց սկզբնական արագության $v_{\infty}^p = 0$:

Ստանանք համախմբի ֆիզիկական պարամետրերի կապը մասնիկի շարժման ուղեծրի երկրաչափական բնութագրերի հետ: Այդ նպատակով ներկայացնենք շրջման կետերին համապատասխանող $E = U_{\infty}(r)$ հավասարումը բացահայտ տեսքով.

$$r^2 + (GMm/E)r - L^2/2mE = 0, \quad (63.7)$$

որտեղ օգտվելով Վիետի թեորեմից՝

$$r_{min} + r_{max} = -GMm/E, \quad r_{min} \times r_{max} = -L^2/2mE, \quad (63.8)$$

և հաշվի առնելով նաև (տես (60.1) և նկ.9.13)՝

$$r_{min} = \frac{se}{1 \pm e}, \quad r_{max} - r_{min} = 2a = \frac{2se}{1 - e^2}, \quad se = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad (63.9)$$

կստանանք հետևյալ բանաձևերը.

$$e^2 = 1 + 2EL^2/G^2M^2m^3, \quad E = -\frac{1}{2}m(GMm/L)^2(1 - e^2): \quad (63.10)$$

Վերջին առնչությունները լիովին հաստատում են մասնիկի հետագծի վերաբերյալ մեր պնդումները: Նկատենք, որ (63.5) է ֆեկտիվ պոտենցիալով ուժադաշտում մասնիկի էներգիան սահմանափակված է ներքևից: Դա շրջանագծային շարժման ($e=0$) էներգիան է, որը համապատասխանում է նկ.9.12-ում գրաֆիկի C կետին: Դժվար չէ ստանալ շրջանագծային ուղեծրի (տվյալ էներգիայով, կամ իմպուլսի մոմենտով) շառավիղն ու նրանով մասնիկի շարժման արագությունը.

$$r_0 = L^2/GMm^2, \quad v_0 = L/mr_0 = GMm/L = (GM/r_0)^{1/2} \quad (63.11)$$

Օգտվելով (63.8) և (63.10)-ի առաջին առնչություններից, նաև նրանից որ պարաբոլական շարժման համար $e=1$, կստանանք r_{min} կետում մասնի-

և պարաբոլական շարժման արագությունը.

$$v_p = (2GM/r_{\min})^{1/2}. \quad (63.12)$$

Ստացված առնչությունների օգնությամբ *ապացուցենք Կեպլերի երրորդ օրենքը*. Կեպլերի երրորդ օրենքից ունենք

$$\dot{\Sigma} = L/2m = \text{const.}, \quad (63.13)$$

որն էլիպսաձև ուղեծրով մասնիկի մեկ լրիվ պտույտի համար տալիս է

$$\Sigma = \frac{LT}{2m}, \quad T = \frac{2m\Sigma}{L} = \frac{2\pi abm}{L}. \quad (63.14)$$

որտեղ $\Sigma = \pi ab$ -ն a , b կիսաառանցքներով էլիպսի մակերևույթի մակերեսն է, իսկ T -ն՝ մոլորակի ուղեծրային շարժման պարբերությունը. Հաշվի առնելով, որ (63.9)-ից

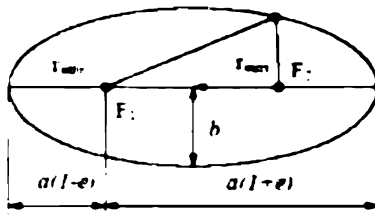
$$a = L^2/GMm^2(1-e^2),$$

տեղադրելով L -ը (63.14)՝ ից և օգտվելով (նկ. 9.13)՝ $b^2 = a^2(1-e^2)$ առնչությունից, կստանանք

$$a^3/T^2 = GM/4\pi^2, \quad (63.15)$$

որը և ապացուցում է Կեպլերի երրորդ օրենքը:

Այս պարագրաֆում ստացված արդյունքները ճիշտ են անշարժ ուժային կենտրոնի շուրջ թեթև մասնիկի շարժման համար. Իրական խնդիրներում համախմբի ղեկավարող կենտրոնը շեղված է ծանր մարմնի զանգվածի կենտրոնից: Այդ պատճառով վերջինս չի



Նկ 9.13

մնում անշարժ, այլ թեթև մարմնի ազդեցության տակ կատարում է փոքր տատանումներ (որը նույնպես էլիպսաձև ուղեծրով շարժում է) համախմբի ղեկավարող կենտրոնի շուրջը: Ասվածը ճիշտ է ինչպես Արեգակ - մոլորակ, Երկիր - Լուսին, այնպես էլ կրկնակի աստղերի շարժման համար: Նման համախմբերի շարժումները ուսումնասիրվում են երկու մարմնի խնդրի շրջանակներում:

§64. ԵՐԿՈՒ ՄԱՐՄՆԻ ՆՐԴՐ: ԵՐԵՔ ՄԱՐՄՆԻ

ՄԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՆՐԴՐ

Գրավիտացիոն կամ կուլոնյան ուժերով փոխազդող երկու կետային կամ զնդային մարմինների շարժման խնդիրը հայտնի է որպես *երկու մարմնի խնդիր*: Պարզվում է, որ այս խնդիրը միշտ հանգեցվում է անշարժ ուժային կենտրոնի շուրջ մեկ մարմնի շարժման Կեպլերի խնդրին. Իրոք դիցուք m_1 և m_2 զանգվածներով փոխազդող մարմինները ժամանակի t պահին գրավում են r_1 և r_2 շառավիղ-վեկտորներով բնութագրվող դիրքերը Նրանց շարժումները կնկարագրվեն

$$m_1 \ddot{r}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (64.1)$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (64.2)$$

հավասարումներով, որտեղ $r_{12} = r_1 - r_2$ մարմինների հարաբերական դիրք բնութագրող շառավիղ-վեկտորն է (նկ. 9.2): Բաժանելով (64.1) -ը m_1 -ի (64.2) -ը՝ m_2 -ի և հանելով մեկից մյուսը, կստանանք.

$$\ddot{r}_{12} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}: \quad (64.3)$$

Ներմուծելով համախմբի *բերված զանգվածը*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (64.4)$$

վերջին հավասարումը կներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$\mu \ddot{r}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}: \quad (64.5)$$

Ստացվածը μ զանգվածով մասնիկի շարժման հավասարումն է (64.5)-ի աջ մասում գրված ուժի ազդեցությամբ: Պնդումն ապացուցված է

Նախորդ պարագրաֆում (64.5) հավասարումն ուսումնասիրել ենք Երկու մարմնի խնդրում լուծումները ներկայացնում են r_{12} վեկտորի ժամանակային փոփոխման վարքը, այսինքն m_1 զանգվածով մասնիկի շարժումը m_2 -ով մասնիկի նկատմամբ. կարծես վերջինիս անշարժ լինի ԴՆՈւմ: Սակայն այս դեպքում մասնիկի զանգվածը ոչ թե m_1 է, այլ μ : Ստացված լուծումից առանձին մասնիկների շարժման տեսքն ստանալու համար անհրաժեշտ է անցնել մասնիկների C համակարգին, որում

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0:$$

Քանի որ

$$\vec{r}_{1,2} = -\vec{r}_2 = \frac{m}{\mu} \vec{r}_2 = -\frac{m_2}{\mu} \vec{r}_1,$$

այս իներցիայի կենտրոնի նկատմամբ մասնիկների շառավիղ-վեկտորների համար կստանանք՝

$$\vec{r}_1 = \frac{\mu}{m_1} \vec{r}_{1,2}, \quad \vec{r}_2 = \frac{\mu}{m_2} \vec{r}_{1,2}, \quad (64.6)$$

Այնպես որ ունենալով $\vec{r}_{1,2}$ -ի փոփոխման օրենքը, որը ի դեպ, տրվում է կոնական հատույթի (60.1) հավասարումով, որում

$$se = \frac{L^2}{\mu G m_1 m_2}, \quad E = -\frac{\mu G m_1^2 m_2^2}{2L^2}, \quad (64.7)$$

(64.6)-ի օգնությամբ կստանանք C կետի նկատմամբ մարմինների շարժման օրենքները:

Նրանցից յուրաքանչյուրը իներցիայի C կենտրոնի շուրջ կատարում է (64.7)-ով տրվող ուսյն e էքսցենտրիսիտետով էլիպսածն ուղեծրերով շարժումներ: Ընդ որում ուղեծրի գծային չափսերը կախված են համապատասխան մասնիկի զանգվածից, որքան մեծ է մասնիկի զանգվածը, այնքան փոքր է ուղեծրի գծային չափսերը: Մասնավորապես, $m_1 \ll m_2$ ($\mu = m_1$) դեպքում կստանանք անշարժ m_2 զանգվածով մարմնի դաշտում թեթև մասնիկի շարժման համար նախորդ պարագրաֆում ստացած արդյունքը:

Երկու մարմնի խնդիրը մեծ կիրառություն ունի աստղաֆիզիկայում: Այս խնդրի լուծման վրա է հիմնված կրկնակի աստղերի զանգվածների որոշման ամենահիուսալի մեթոդը:

Երեք մարմնի սահմանափակ խնդիր: Որոշենք m_1 և m_2 զանգվածներով կրկնակի աստղի գրավիտացիոն դաշտում թեթև մասնիկի հավասարակշռության դիրքերը, եթե աստղերի միջև հեռավորությունը է է:

Կրկնակի աստղի իներցիայի կենտրոնի հետ կապված $\ll$ -ում, որը պետք է

$$\Omega = \sqrt{G(m_1 + m_2)/l^3} \quad (64.8)$$

անկունային արագությամբ, միավոր զանգվածով մասնիկի հավասարակշռությունը կորոշվի հետևյալ հավասարումով.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \Omega^2 \vec{r}, \quad (64.9)$$

(նկ. 9.14) որի լուծումները կոչվում են *լիբրացիայի* կամ *Լագրանժի կետեր*։ Կոորդինատային առանցքների վրա այս հավասարման պրոյեկցիաներն ունեն հետևյալ տեսքը.

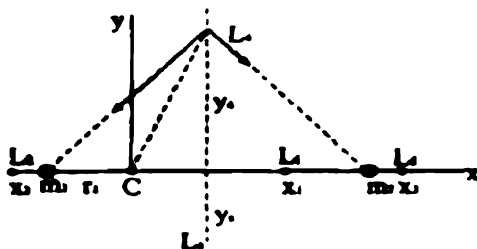
$$\Omega^2 x + \frac{Gm_2(r_2 - x)}{[(r_2 - x)^2 + y^2]^{3/2}} = \frac{Gm_1(r_1 + x)}{[(r_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}}, \quad (64.10)$$

$$\Omega^2 y + \frac{Gm_2 y}{[(r_2 - x)^2 + y^2]^{3/2}} = \frac{Gm_1 y}{[(r_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \quad (64.10')$$

X առանցքի վրա ($y=0$) (64.10') - հավասարումը բավարարվում է նույնաբար, իսկ (64.10) -ը (64.8) -ի օգնությամբ բերվում է հետևյալ տեսքին

$$\frac{m_1}{(r_1 + x)^2} - \frac{m_2}{(r_2 - x)^2} = \frac{m_1 - m_2}{\ell^2} x:$$

Ստացված հավասարումն ունի երեք իրական լուծումներ. դրանց աստիճան միացնող ուղղի L_1 , L_2 , L_3 կետերն են (նկ. 9.13): Այդ առանցքից դուրս (64.9) և (64.10) հավասարումները տալիս են ևս երկու լուծումներ



Նկ. 9.14

$$x_4 = x_5 = \frac{(m_1 - m_2)\ell}{2(m_1 + m_2)},$$

$$y_{4,5} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \ell,$$

որոնց համապատասխանող կետերը հավասարառիե են աստղերից և նրանցով կազմված հավասարակողմ եռանկյունների գագաթներն են:

§65. ՄՈԼՈՐԱԿՆԵՐԻ ԻՐԱԿԱՆ ԺԱՐԺՈՒՄԸ ԱՐԵԳԱԿԱՑԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ

Մոլորակների տեսանելի շարժումների մանրագնին ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս նախորդ պարագրաֆներում նկարագրված շարժումներից ոչ մեծ. դանդաղ ընթացող շեղումներ: Որս հասկանալի է, քան որ Կեպլերի խնդրի շրջանակներում մոլորակի շարժման վրա հաշվի չեն առնվում այլ մոլորակների գրավիտացիոն ազդեցությունը, ինչպես նաև Արեգակում գտնվածի բաշխման զնդային համաչափությունից թույլ շեղումները:

Մոլորակի շարժման վրա մյուս մոլորակների ազդեցությունը կարելի է հաշվի առնել *խոտորումների* (գրգռումների) տեսությամբ, որի էությունը կայանում է հետևյալում: Ջրոլական մոտավորությամբ անտեսվում է մոլորակի շարժման վրա այլ մոլորակների ազդեցությունը և որոշվում չգրգռված շարժումը: Այնուհետև հաշվում են այդ շարժման փոփոխությունը, պայմանավորված մյուս մոլորակների գրավիտացիոն ազդեցությամբ: Թափի որ վեոջինս շատ թույլ է, ապա նրա առաջացրած փոփոխությունները ներկայացվում են որպես հիմնական շարժման փոքր խոտորումներ: Նման հաշվարկները մեծ ճշտությամբ համընկնում են դիտումներից ստացվող տվյալների հետ: Խոտորումների տեսությունը հնարավորություն է տալիս ոչ միայն որոշել տվյալ մոլորակի կողմից այլ մոլորակի շարժման փոփոխությունը, այլև լուծել *հակադարձ խնդիրը*, տվյալ մոլորակի գրգռված շարժմամբ որոշել *խոտորում առաջացնող մարմնի զանգվածն ու ուղեծիրը*: Այս կերպ (եվերյեն (1846թ.) Ուրան մոլորակի գրգռված շարժմամբ կանխագուշակել է Նեպտուն մոլորակի գոյությունը, իսկ վերջինիս գրգռված շարժմամբ (ովելը (1914թ.) կանխագուշակեց Պլուտոնի գոյությունը¹:

Չնայած Նյուտոնյան տեսության նշված հաջողություններին, այն անգոր գտնվեց բացատրելու մոլորակների շարժման մի կարևոր օրինաչափություն: Դա նրանց (հատկապես Մերկուրիի) *ուղեծրերի մերձակետի պտույտի* դիտվող չափն է:

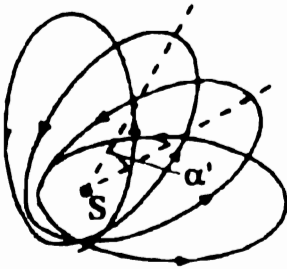
Սեփական պտույտի շնորհիվ Արեգակի թույլ սեղմվածության, մյուս մոլորակների ազդեցության հետևանքով մոլորակների ուղեծրերի մեծ կիսաառանցքները դանդաղ պտտվում են ուղեծրային շարժման ուղղությամբ (նկ. 9.15): Պտտման այդ անկյունը մեծ չէ և տարբեր է տարբեր մոլորակների համար: Նյուտոնյան տեսությամբ որոշված մերձակետի պտույտի անկյունը տարբերվում է դիտումներից ստացվող արժեքից: Ամենամեծ տարբերությունը գրանցվում է Արեգակին ամենամոտ Մերկուրի մոլորակի համար, որը մեկ հարյուրամյակում կազմում է 43.°03, այն դեպքում, երբ Երկրի համար այդ տարբերությունը չի գերազանցում 4.°6 արժեքը:

Նյուտոնյան տեսության արդյունքներից այս շեղումները, որոնք չափման սխալներ չեն (օրինակ, Մերկուրիի մերձակետի պտտման անկյունը չափված է 0.°41 ճշտությամբ) պահանջում են բացատրություն:

Պարզվում է, որ եթե Արեգակի ծաղղության համար օգտվում ենք ռե-լատիվիստական տեսությամբ տրվող (62 14) բանաձևից, ապա մոլորակի

¹ Ներառումս Պլուտոնը հանված է մոլորակների ցուցակից

ուղեծրի մերձակետի պտույտ առաջանում է նույնիսկ մյուս մոլորակներ գրգռումների բացակայության դեպքում: Ընդ որում մոլորակի ուղեծրային մեկ պտույտի ընթացքում նրա մերձակետի դիրքը պտտվում է



Նկ 9 15

$$\alpha_s = \frac{6\pi GM_\odot}{ab^2(1-e^2)}$$

անկյունով: Այն էապես կախված է ուղեծրի եկրաչափական պարամետրերից (մեծ և փոք կիսաառանցքներից, էքսցենտրիսիտետից) և սմենամեծն է Մերկուրի մոլորակի համար. $43'' \pm 0.''5$ -մեկ հարյուրամյակում: Այս արդյունքը լիվին բացատրում է դիտումներից նյութոնյա ծգողության տեսության նշված շեղումը և գրեկիտացիայի ռելատիվիստական տեսությա

հիմնավորումներից մեկն է:

§66. ԵՐԿՐԻ ԱՐԶԵՍՏԱԿԱՆ ԱՐԲԱՆՅԱԿՆԵՐԻ ԾԱՌԺՈՒՄԸ:

ԿՈՍՄԻԿԱԿԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Երկրի շուրջ արեեստական արբանյակների շարժումները չեն եկարկվում Կեպլերի օրենքներին: Դա պայմանավորված է երկու հիմնական պատճառներով. Երկիրը գնդային տեսք չունի և նրանում զանգված բաշխումը գնդային համաչափ չէ, Երկրագունդը չրջապատված է մթնոլորտով, որում շարժվող մարմինները ենթարկվում են լրացուցիչ չվման դիմադրության ուժերի ազդեցությանը: Արբանյակների ուղեծրային շարման շեղումները Կեպլերի օրենքներից թույլ են տալիս ստանալ արժեքվոր տեղեկություններ Երկրի իրական ձևի, նրանում զանգվածի բաշման, ինչպես նաև մթնոլորտի կառուցվածքի մասին:

Երկրակենտրոն հաշվարկի համակարգում արբանյակի շարժում նկարագրվում է

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m(\mathbf{g} + \Omega^2 \mathbf{r}_\perp) + 2m[\mathbf{v}\Omega] + \mathbf{F}, \quad (66)$$

հավասարումով, որտեղ $\mathbf{r}$ -ը արբանյակի հարաբերական դիրքը բնուգրող շառավիղ-վեկտորն է, m -ը՝ զանգվածը, $\mathbf{F}$ -ը՝ մթնոլորտի դիմադրության և տիեզերանավի հրթիռային (եթե շարժիչն աշխատում է) ուժեր համագորը: Եթե $\mathbf{F} = 0$, իսկ $\mathbf{g}$ -ն համասեռ գնդի (63.1) լարվածությունն ապա արբանյակի ուղեծրի հարթությունը կպտտվի Երկրի նկատմամ

շնորհիվ կորիուիսյան ուժի ազդեցության, ինչպես Ֆուկույի ճոճանակի դեպքում: Սակայն այս դեպքում (66.1) հավասարման լուծումը խիստ տարբերվում է դիտումներով գրանցվող շարժումներից: Տարբերությունները պայմանավորված են F -ի անտեսումով և համասեռ զնդի դաշտի լարվածությունից g_0 -ի շեղմամբ: Սրանց մանրագնին ուսումնասիրությունները ցույց են տվել զնդածնությունից Երկրի հետևյալ շեղումները.

- *հասարակածային միջին տրամագիծը բևեռայինից մեծ է 42,77 կմ,*

- *գոյություն ունի անհամաչափություն հյուսիսային և հարավային կիսագնդերի միջև* հյուսիսային բևեռը 40 մետրով ավելի է հեռացված հասարակածային հարթությունից, քան հարավայինը.

- *Երկրի հասարակածը մոտավորապես էլիպս է*, որի մեծ կիսառանցքը մոտ 140 մետրով գերազանցում է փոքր կիսառանցքի երկարությանը:

Այս շեղումներից առաջինն առաջացնում է Արեգակենտրոն $\llcorner$ -ում արբանյակի ուղեծրի հարթության և մերձակետի պտույտներ: Երկրորդի հետևանքով, արբանյակի մերձակետի հեռավորությունը կախված է լինում նրանից՝ մերձակետն անցնում է հյուսիսային, թե հարավային կիսագնդով: Երրորդը հանգեցնում է հասարակածային հարթության մեջ շարժվող արբանյակի ուղեծրի շառավիղի մի քանի հարյուր մետր լայնությով օրական տատանումների:

Արբանյակի շարժման վրա *մթնոլորտի ազդեցությունը* որոշվում է (66.1) հավասարման F անդամով, որը կախված է ինչպես արբանյակի ծևից, չափսերից, այնպես էլ տվյալ մասում մթնոլորտի ֆիզիկական հատկություններից: Այս ուժի ազդեցությունը հիմնականում դրսևորվում է արբանյակի կինետիկ էներգիայի դիսիպացիայով: Ջանի որ թաց շփման ուժը կախված է արբանյակի արագությունից, որն առավելագույնն է մերձակետում, և բացի այդ մթնոլորտի խտությունն ու մածուցիկությունը արագ նվազում են բարձրության հետ, ապա արբանյակի էներգիան հիմնականում դիսիպացվում է հետագծի մերձակետի շրջակայքում: Դա բերում է մերձակետային հեռավորության նվազմանը: Դրա հետևանքով է՛լ ավելի մեծ չափով նվազում է հեռակետային բարձրությունը և հետևաբար, ուղեծրի ձգվածությունը էքսցենտրիսիտետը: Չնայով արագացող այս պրոցեսը բերում է արբանյակի անկմանը Երկրի վրա: Պարզվում է, որ եթե արբանյակի ուղեծիրն ընկած է Երկրի մակերևույթից $h > 160$ կմ տիրույթում, ապա դիսիպիտիվ երևույթները էական չեն: Հակառակ դեպքում, համեմատաբար կարճ ժամանակում արբանյակը կընկնի Երկրի վրա:

2. Կոսմիկական արագություններ: Տիեզերական մարմնի ստեղծած

գրավիտացիոն դաշտը բնութագրվում է երկու հիմնական արագություններով: Դրանք մարմնի շուրջ *շրջանագծային* և *պարաբոլական* ուղեծրերով մասնիկի շարժման *արագություններն են*:

Շրջանագծային արագությունը մարմնի մակերևութին մոտ տիրություն շրջանագծային ուղեծրով մասնիկի շարժման արագությունն է

$$v_c = \sqrt{GM/R} \quad (66.2)$$

որտեղ M -ը մարմնի զանգվածն է, R -ը շառավիղը: Երկրագնդի համար այն կոչվում է *առաջին կոսմիկական արագություն*:

$$v_c = \sqrt{g_{\text{երկ}} R_{\text{երկ}}} = 7.9 \text{ կմ/վ:} \quad (66.3)$$

Պարաբոլական է կոչվում այն արագությունը, որը պետք է հաղորդել գրավիտացվող մարմնի մակերևութին գտնվող մասնիկին, պարաբոլական հետագծով մարմնից հեռացնելու համար: Բանի որ պարաբոլական հետագծով շարժվող մասնիկի լրիվ էներգիան զրո է

$$E = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 0, \quad (66.4)$$

այսպես

$$v_p = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2}v_c: \quad (66.5)$$

Երկրագնդի համար պարաբոլական արագությունը կոչվում է *երրորդ կոսմիկական արագություն*:

$$v_p = \sqrt{2}v_c = 11.2 \text{ կմ/վ:} \quad (66.6)$$

Այս արագությունները բնութագրում են երկնային մարմնի գրավիտացիոն դաշտը, հաշվի չեն առնում նրա սեփական պտույտն ու մթնոլորտի գոյությունը: Իսկապես, Երկրի մակերևութի վրա անշարժ մարմնին 11.2 կմ/վ արագություն հաղորդելիս այն չի շարժվի պարաբոլական հետագծով, քանի որ կինետիկ էներգիայի մի մասը կծախսվի մթնոլորտի դիսիպատիվ ուժերը հաղթահարելու վրա: Մյուս կողմից Երկրի պտույտի հետևանքով հասարակածի վրա գտնվող մասնիկը արդեն Երկրի կենտրոնի նկատմամբ ունի ≈ 465 մ/վ արագություն: Այնպես որ կախված այն բանից, թե ինչ ուղղությամբ է մասնիկը նետվում՝ պտույտի ուղղությամբ, թե նրան հակառակ, ուղեծիր դուրս բերելու համար կպահանջվեն տարբեր արագություններ:

Գրականության մեջ կարելի է հանդիպել նաև *երրորդ կոսմիկական արագություն* հասկացությանը: Դա այն նվազագույն արագությունն է, որն անհրաժեշտ է հաղորդել Երկրի մակերևութի վրա սկզբնապես անշարժ

մասնիկին Արեգակնային համակարգից հեռացնելու համար. Այն 16.7 կմ վ կարգի մեծությամբ է. եթե հաղորդվում է Երկրի ուղեծրային շարժման ուղղությամբ: Հակառակ ուղղությամբ նետելիս մասնիկին անհրաժեշտ է Երկրի նկատմամբ հաղորդել արդեն 72.7 կմ վ արագություն:

§67. ԻՆԵՐՏ և ԳՐԱՎԻՏԱԾԻՈՆ ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐ:

ԷՏՎԵՏԻ ՓՈՐՁԸ

Մինչև այժմ որևէ տարբերություն չենք դրել Նյուտոնի

$$F = m'a, \quad (67.1)$$

և տիեզերական ծգողականության՝

$$F = G \frac{m^e m^g}{r^2}, \quad (67.2)$$

օրենքներում հանդես եկող զանգվածների միջև:

Իրականում Նյուտոնի երկրորդ օրենքում և (67.2)–ում զանգվածները ներկայացնում են մարմնի բոլորովին տարբեր ֆիզիկական հատկություններ: Եթե առաջինում զանգվածը բնութագրում է մարմնի *իներտ հատկությունները*, այսինքն՝ ուժի ազդեցությամբ արագացում ստանալը, ապա երկրորդում այն բնութագրում է այլ մարմիններ իրեն ձգելու, այսինքն՝ գրավիտացիոն դաշտ ստեղծելու հատկությունը և կոչվում է *գրավիտացիոն զանգված*: Որևէ նախապայման չկա մարմնի այդ երկու տարբեր ֆիզիկական հատկությունները բնութագրող m^e և m^g զանգվածները համարել իրար հավասար: Ինչպես Կուլոնի օրենքում, այնպես էլ (67.2) –ում համեմատականության անհայտ K և G գործակիցների չափողականություններն ու մեծությունները կախված են նրանից. թե ինչ միավորներ կընտրենք լիցքը, կամ զանգվածը չափելու համար. *Նյուտոնի տիեզերական ծգողության օրենքի կարևորագույն պնդումներից մեկն այն է, որ մարմինների միջև գործող ծգողության ուժը համեմատական է նրանց իներտ զանգվածներին*: Այստեղից հետևում է, որ մարմնի իներտ և գրավիտացիոն զանգվածները համեմատական մեծություններ են: Սա արդեն *ֆիզիկական օրենք է*, որը փորձնականորեն ստուգված է բավականաչափ մեծ ճշտությամբ:

Մարմնի իներտ և գրավիտացիոն զանգվածների համար չափման միևնույն միավորի (իսկ G -ի համար (60.10) արժեքի) ընտրությամբ հավասարեցվում են նաև նրանց թվային արժեքները.

$$m^* = m' ; \quad (67.3)$$

Իներտ և գրավիտացիոն զանգվածների հավասարության այս պնդումը հայտնի է որպես համարժեքության սկզբունք:

Բերենք համարժեքության սկզբունքը հաստատող մի քանի փորձեր՝ Նախ նկատենք, որ Գալիլեյի թերթերը, համաձայն որի գրավիտացիոն դաշտի տվյալ մասում բոլոր մարմիններն ազատ անկում են կատարում միևնույն արագացմամբ, համարժեքության սկզբունքի առաջին փորձնական իրմնավորումն է: Իսկապես, m^* զանգվածով մարմինը Երկրի կողմից ձգվում է $F = m^*g$ ուժով, որը համաձայն Նյուտոնի երկրորդ օրենքի մարմնին հաղորդում է

$$a = \frac{F}{m'} = \frac{m^*}{m'} g = \text{const} \quad (67.4)$$

արագացում: Այն փաստը, որ բոլոր մարմինների համար $a = g$, հաստատում է (67.3) պնդումը:

Համարժեքության սկզբունքի ապացույց է նաև մաթեմատիկական ճոճանակի տատանումների պարբերության՝

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{m'}{m^*}} \quad (67.5)$$

զանգվածից անկախ լինելու փաստը: Այս փորձում (67.3) հավասարությունը հաստատվում է

$$(m' - m^*) / m' \approx 1.7 \cdot 10^{-5}$$

ճշտությամբ (Նյուտոն, Բենել):

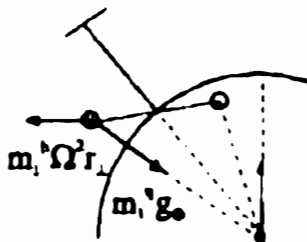
Առավել մեծ ճշտությամբ (67.3)–ը ցույց է տվել *Էտվենը* (1887թ.): Փորձի էությունը հետևյալն է: §57–ում տեսանք, որ մարմնի կշիռը՝

$$P = m^* g_{\perp} + m' \Omega^2 r_{\perp} \quad (67.6)$$

ծանրության և կենտրոնախույս ուժերի գումարն է. որոնցից առաջինը համեմատական է մարմնի գրավիտացիոն, իսկ երկրորդը՝ իներտ զանգվածին: Եթե սխալ է համարժեքության սկզբունքը, ապա տվյալ θ աշխարհագրական լայնության վրա ուղղալարի ուղղությունը կախված կլինի գնդիկի նյութի տեսակից: Էտվենի փորձը նպատակ ուներ հայտնաբերել այդ կախվածությունը:

Էտվենի փորձի ուրվագիծ պատկերը ներկայացված է նկ. 9.16-ում Աշխարհագրական θ լայնության վրա երկար առածական թելից կախված (երկարություն ունեցող հորիզոնական ծողի ծայրերին ամրացված են

տարբեր նյութերից պատրաստված գնդեր՝ շողը կողմնորոշում են միջօրեական հարթությանն ուղղահայաց (նկ. 9.16)։ Գնդիկներից յուրաքանչյուրը ենթարկվում է (67.6) ուժերի ազդեցությանը։ Վերածելով այդ ուժերը g_{θ} -ի, և նրան ուղղահայաց ուղղությոններով (նկ. 9.16-ում պատկերված են գնդերից մեկի վրա ազդող ուժերը), հորիզոնական դիրքում ծողի հավասարակշռության համար կարող ենք գրել.



Նկ. 9.16

$$m_1'(\alpha_1 g_{\theta} - \Omega^2 r_1 \cos \theta) = m_2'(\alpha_2 g_{\theta} - \Omega^2 r_2 \cos \theta), \quad (67.7)$$

որտեղ

$$\alpha_1 = m_1''/m_1', \quad \alpha_2 = m_2''/m_2'. \quad (67.8)$$

Եթե $\alpha_1 \neq \alpha_2$, այսինքն $m_1'' \neq m_2''$, ապա գնդերի վրա ազդող կենտրոնախույս ուժերի հորիզոնական բաղադրիչները (նկ. 9.16) նույնպես կլինեն տարբեր, և կախողի թելի նկատմամբ կառագացնեն պտտող մոմենտ՝

$$M = (m_1' - m_2') \frac{l}{2} \Omega^2 r_1 \sin \theta, \quad (67.9)$$

որը կոլորի լարը $\varphi_1 = M/f$ անկյունով (f -ը լարի ոլորման մոդուլն է, §75)։

Փորձը կրկնում են՝ սարքը հորիզոնական հարթության մեջ 180° -ով պտտելով։ Այդ դեպքում լարը կոլորվի հակառակ ուղղությամբ՝ $\varphi_2 = -\varphi_1$ անկյունով։ Արդյունքում կստացվի հորիզոնական հարթության մեջ ծողի պտույտ՝

$$\varphi = \frac{2M}{f} = (m_1' - m_2') \frac{l}{f} \Omega^2 r_1 \sin \theta \quad (67.10)$$

անկյունով։ Նրբագույն սարքավորումների օգնությամբ էտվեշը կարող էր գրանցել 10^{-6} անկյունային վայրկյան² կարգի պտույտներ։ Սակայն փորձը տվեց բացասական արդյունք. ծողի պտույտը բացակայում էր։ Կրկնելով փորձը ինը տարբեր նյութերից պատրաստված գնդերի համար, էտվեշը ապացուցեց իներտ և գրավիտացիոն զանգվածների հավասարությունը $5 \cdot 10^{-6}$ ճշտությամբ։

Էտվեշի փորձի կատարելագործմամբ *Պիկկեն* (1964թ.) իներտ և գրավիտացիոն զանգվածների հավասարությունը ցույց տվեց $\approx 3 \cdot 10^{-11}$ ճշտությամբ։

² Այս անկյան տակ կերպա էունի վրա 1սմ չափեր ունեցող ամառական երկրից դիտելիս

յամբ: Դիկկեն նպատակ էր դրել հայտնաբերել առածգական լարից կախված ծողի վրա Արեգակի կողմից ազդող գրավիտացիոն ուժերի և Երկրի ուղեծրային շարժմամբ պայմանավորված իներցիայի համընթաց ուժերի տարբերությունը (§56):

Փորձի հետագա կատարելագործումը *Բրազինսկուն և Պանոփին* փուլվեց համարժեքության սկզբունքը հաստատել $\approx 10^{-12}$ ճշտությամբ:

§ 68. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՇՆՆԱՆՈՒՐ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Նյութոնյան մեխանիկան որևէ նշանակություն չի տվել իներտ և գրավիտացիոն զանգվածների հավասարությանը, համարելով այն պատահական համընկում: Համարժեքության սկզբունքի խորը ֆիզիկական բովանդակությունը բացահայտել է էյնշտեյնը: Դրա էությունը կայանում է հետևյալում: $g(r)$ լարվածությամբ գրավիտացիոն դաշտի տվյալ մասում բոլոր մարմինները ենթարկվում են իրենց գրավիտացիոն զանգվածներին համեմատական

$$F^g = m^g g(r) \quad (68.1)$$

ուժի ազդեցությանը և ձեռք են բերում միևնույն g արագացումը: *Նման հատկությամբ օժտված են նաև իներցիայի տեղափոխական ուժերը* Նրանց $a(r)$ արագացումով շարժվող ՀՈՀ-ում ազդում են բոլոր մարմինների վրա՝ իրենց իներտ զանգվածներին համեմատական

$$F^i = -m a(r) \quad (68.2)$$

ուժով և անկախ մարմինների զանգվածներից հաղորդում են նրանց $-a$ արագացում:

Իներտ և գրավիտացիոն զանգվածների համարժեքությունից և (68.1), (68.2) առնչություններից հետևում է, որ գրավիտացիոն դաշտում շարժվող ՀՈՀ-ի նկատմամբ տարածության այն մասերում, որոնցում $a(r) = g(r)$, անշարժ մասնիկի վրա ուժ չի ազդի:

$$F^i + F^g = 0: \quad (68.3)$$

Ուրեմն, ՀՈՀ-ի *համապատասխան ընտրությամբ հնարավոր է տարածության որոշ մասերում վերացնել գրավիտացիոն դաշտը՝ չեզոքացնելով այն իներցիայի ուժով* Ավելին, գրավիտացիոն դաշտ չպարունակող տարածության տիրույթներում շարժվող ՀՈՀ-ում որևէ ֆիզիկական փոր-

ծով հնարավոր չէ պարզել՝ տվյալ կետում անշարժ մասնիկի վրա ազդողը գրավիտացիոն դաշտն է. թե ինքնոցիայի տեղափոխական ուժը՝ Սա է այն ֆիզիկական բովանդակությունը, որ պարունակում է իներտ և գրավիտացիոն զանգվածների հավասարությունը՝ Ու ինքնոցիայի և գրավիտացիոն ուժերի համարժեքության սկզբունքն է, որն էյնշտեյնը դրել է հարաբերականության ընդհանուր տեսության հիմքում:

Լուսաբանենք համարժեքության սկզբունքը պարզ օրինակով.

Նկ. 9.17ա-ում պատկերված է Երկրի ծանրության ուժադաշտում անշարժ կամ ուղղաձիգ և հավասարաչափ շարժվող վերելակ, որի առաստաղից կախված են m զանգվածով գնդիկներ՝ թելից և զսպանակից. Հավասարակշռության վիճակում գնդիկները ենթարկվում են $m'g = T = F$ ուժերի ազդեցությանը. Հավասարակշռության դիրքից շեղելիս նրանք կտատանվեն (Երկրի հետ կապված $\ll$ -ն համարում ենք ինքնոցիայ)

$$T_1 = 2\pi\sqrt{l'/g}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{m'/k} \quad (68.4)$$

պարբերություններով: Եթե փորձարարը h բարձրությունից բաց թողնի գնդիկը, ապա այն ազատ անկում վկատարի g արագացմամբ և հատակին փասնի

$$t = \sqrt{2h'/g} \quad (68.5)$$

ժամանակում:

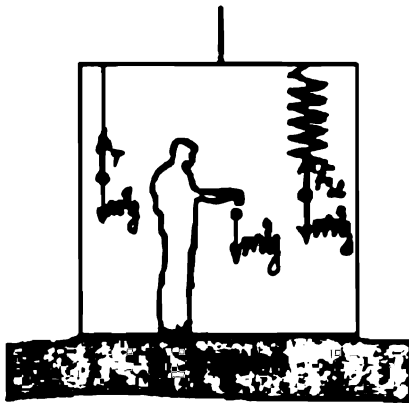
Այժմ ենթադրենք՝ վերելակը գրավիտացիոն դաշտից դուրս է, և առաստաղից կապված ճոպանով տեղափոխվում է $a = -g$ արագացումով (նկ. 9.17բ). Այս դեպքում վերելակը $\ll \ll$ է, որում բոլոր մարմինները ենթարկվում են ինքնոցիայի համընթաց $F' = -m'a = m'g$ ուժի ազդեցությանը: Զանի որ $m' = m^*$, ապա վերելակում նկարագրված բոլոր երևույթները կընթանան նույն ձևով, ինչ՝ ա դեպքում: Ուրեմն, *ֆիզիկական երևույթները միատեսակ են ընթանում ծանրության ուժի դաշտում անշարժ և այդ դաշտից դուրս $a = -g$ արագացումով շարժվող վերելակում:*

Նկատենք, որ դիտարկված երկու դեպքերը նյութաբանական մեխանիկայում խալես տարբեր են: Առաջինում ունենք համասեռ ծանրության ուժի դաշտում անշարժ $\ll \ll$, իսկ երկրորդում $\ll \ll$, որում ծանրության ուժի փոխարեն ազդում է ինքնոցիայի համընթաց ուժը:

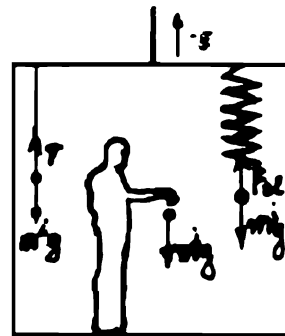
Կտրենք այժմ a և g դեպքերում վերելակը ձգող ճոպանները:

Առաջին դեպքում վերելակն ազատ անկում կկատարի g արագացմամբ և կհանդիսանա $\ll \ll$, որում բոլոր մարմինների վրա լրացուցիչ կազդի ինքնոցիայի համընթաց ուժը՝ $F' = -m'g$: Հեշտ է նկատել, որ թե՛ մարդը, և

թե՛ թելից կախված մարմինները կգտնվեն անկշռելիության վիճակում, քանի որ իներցիայի համընթաց ուժը կչեզոքացնի վերելակում ծանրության ուժադաշտը:



Նկ 9 17ա



զրավիտացիոն
դաշտից դուրս

Նկ 9 17բ

Երկրորդ դեպքում ճոպանը կտրելիս վերելակը կշարժվի ուղղագիծ և հավասարաչափ. այսինքն՝ կհանդիսանա ՀՈՀ, որում կբացակայի իներցիայի ուժը: Դժվար չէ նկատել, որ Երկրի ծանրության ուժի դաշտում ազատ ընկնող ՀՈՀ-վերելակում վերը նկարագրված երևույթները նույնությամբ կընթանան նաև այս դեպքում, չնայած երկրորդ դեպքում վերելակը ՀՈՀ է:

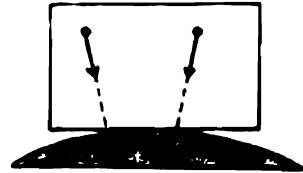
Ընդհանրացնելով շարադրված փորձնական արդյունքները, հանգում ենք հետևյալ կարևոր եզրակացությանը. *զրավիտացիոն դաշտում ազատ անկում կատարող հաշվարկի համակարգը իներցիալ է*: Նման հաշվարկի համակարգում մասնիկի շարժման հավասարումը տրվում է Նյուտոնի երկրորդ օրենքով.

$$ma = F, \quad (68.61)$$

որի աջ մասում F -ը մասնիկի վրա ազդող բոլոր Նյուտոնյան ուժերի համագործ է. բացի արտաքին զրավիտացիոն ուժերից

Հարկ է նշել, որ համարժեցության սկզբունքը չի պնդում, թե ցանկացած զրավիտացիոն դաշտ կարելի է ամբողջ տարածության մեջ փոխարինել իներցիայի ուժերով կամ հակառակը. *իներցիայի և զրավիտացիոն ուժերի համարժեցությունը տեղի ունի միայն տարածության փոքր տիրույթներում, որոնցում այդ ուժերը համասեռ են*. Միայն այդ դեպքում է

նառավոր նրանց փոխադարձ չեզոքացումը, համակշռումը: Իսկապես, չե՞ն նկ.9.17-ում վերելակները ունենան բավականաչափ մեծ չափսեր, ա-
յա նրանցում ծանրության ուժի դաշտը կլինի անհամասեռ, և նրա տար-
բեր հեռավոր կետերում ծանրության ուժերը կտարբերվեն ինչպես մեծու-
թյամբ, այնպես էլ ուղղությամբ (նկ.9.18), այն
դեպքում, երբ իներցիայի համընթաց ուժերը
միշտ գուգահեռ են իրար: Այս փաստը նշելու
համար ասում են, որ *իներցիայի և գրավի-
տացիոն ուժերի համարժեքությունը ունի տե-
ղային լոկալ բնույթ*, այսինքն՝ ճիշտ է միայն
տարածության փոքր տիրույթներում:



նկ. 9 18

Նյուտոնյան գրավիտացիոն և իներցիայի ուժերի լոկալ համարժեքու-
թյան մասին խոսելիս չպետք է մոռանալ նրանց միջև հետևյալ էական
տարբերությունը: Նյուտոնյան գրավիտացիոն ուժերը անկախ են մասնի-
կի արագությունից և կախված են մասնիկի զանգվածից ու նրա գրաված
դիրքից: Նույն հատկությամբ օժտված են նաև իներցիայի տեղափոխա-
կան ուժերը: Սակայն ՀՌՀ-ում շարժվող մասնիկը ենթարկվում է նաև իներ-
ցիայի կորիոլիսյան ուժի ազդեցությանը, որը կախված է մասնիկի արա-
գությունից: Այդ պատճառով պարագրաֆի սկզբում հատուկ նշել ենք, որ
*իներցիայի և գրավիտացիոն ուժերը չի կարելի տարբերել, եթե նրանք ազ-
դում են ՀՌՀ-ում անշարժ մասնիկի վրա*: Ինչևէ, ելնելով համարժեքության
սկզբունքից, *էյնշտեյնը միավորել է իներցիայի և գրավիտացիայի ուժերը*
*մի միասնական դաշտի մեջ. միաժամանակ հաշվի առնելով փոխազդե-
ցությունների տարածման վերջավոր արագությունը: Զգողական-ինե-
րցիոն միավորյալ այս դաշտը նորից կոչվում է գրավիտացիոն դաշտ, իսկ*
այդ դաշտի տեսությունը՝ հարաբերականության ընդհանուր տեսություն
կամ գրավիտացիայի ռելատիվիստական տեսություն:

Ի տարբերություն նյուտոնյան գրավիտացիոն դաշտի, ռելատիվիս-
տական դաշտը բնութագրվում է ոչ թե մեկ, այլ տասը պոտենցիալներով և
նկարագրվում է էյնշտեյնի ոչ գծային հավասարումներով: Ընորիփվ հավա-
սարումների ոչ գծայնության՝ *էյնշտեյնյան գրավիտացիոն դաշտի համար*
նախատվում է վերադրման սկզբունքը

Պարզաբանենք այս հարցը.

Էներգիայի ցանկացած ձևի համապատասխանում է որոշակի զանգ-
ված (§32), որը գործում է որպես գրավիտացիոն դաշտի աղբյուր: Ուրեմն,
եթե երկու մարմիններ ստեղծում են գրավիտացիոն դաշտ, ապա բացի

մարմինների զանգվածից, գրավիտացիոն դաշտի աղբյուր է հանդիսանում նաև նրանց ստեղծած դաշտի էներգիան: Այդ դեպքում, բնական է, որ նման դաշտում մասնիկի վրա ազդող ուժը հավասար չի լինի առանձին մարմինների կողմից ազդող ուժերի գումարին:

Գրավիտացիայի ռելատիվիստական տեսության մեջ ցույց է տրվում, որ արագացումով շարժվող զանգվածն առաջում է *գրավիտացիոն ալիքներ*, այնպես, ինչպես արագացող լիցքը էլեկտրամագնիսական ալիքներ: Սակայն դրանց միջև գոյություն ունեն էական տարբերություններ: Էլեկտրամագնիսական ալիքները չեն փոխազդում իրար հետ և հանդիպելիս պարզապես վերադրվում են: Գրավիտացիոն ալիքները փոխազդվում են իրար հետ, քանզի օժտված լինելով էներգիայով և հետևաբար, զանգվածով, հանդիսանում են գրավիտացիայի աղբյուրներ:

Գրավիտացիայի ռելատիվիստական տեսության երեք կանխատեսումներ այսօր կարելի է համարել փորձնականորեն հաստատված՝

Պրանք են՝

- մոլորակների ուղեծրերի մերձակետի պտույտը,
- գրավիտացիոն կարմիր շեղումը,
- յույսի ճառագայթների շեղումը Արեգակի գրավիտացիոն դաշտում:

Առաջինն արդեն քննարկել ենք § 65-ում: Դիտարկենք մյուս երկու երևույթները:

§69. ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ ԿԱՐՄԻՐ ՇԵՂՈՒՄ

Ռելատիվիստական մեխանիկայի նշանավոր $E = mc^2$ արդյունքը համարժեքության սկզբունքի տեսանկյունից տալիս է, որ տարածության ցանկացած փոքր ծավալում էներգիայի ΔE քանակին համապատասխանում է

$$\Delta m = \Delta E / c^2$$

զանգված: Համաձայն այս պատկերացումների ֆոտոնը, շնորհիվ

$$m = h\nu / c^2 \quad (69.2)$$

զանգվածի, գրավիտացիոն g դաշտում կենթարկվի

$$F = mg = \frac{h\nu}{c^2} g \quad (69.3)$$

ուժի ազդեցությանը և կունենա պոտենցիալ էներգիա՝

$$U = m\varphi = \frac{h\nu}{c^2} \varphi \quad (69.4)$$

որտեղ φ -ն գրավիտացիոն դաշտի պոտենցիալն է

էյնշտեյնի տեսության (69.3) և (69.4) արդյունքները բերում են կարևոր հետևանքների, որոնք կարող են ստուգվել փորձով

Դիցուք M զանգված և R շառավիղ ունեցող աստղի մակերևույթին ծնված ν_0 հաճախության ֆոտոնը հասել է Երկրի (նկ. 9.19)։ Ի՞նչ հաճախություն կունենա գրանցված ֆոտոնը։ Խնդիրը կլուծենք, ելնելով էներգիայի պահպանման օրենքից, անտեսելով աստղից Երկրի տեղափոխման ընթացքում ֆոտոնի էներգիայի հնարավոր կորուստները, ինչպես նաև արհամարհելով Երկրի հետ ֆոտոնի փոխազդեցությունը։

Աստղի մակերևույթի վրա ֆոտոնի լիով էներգիան կլինի՝

$$E = h\nu_0 + \frac{h\nu_0}{c^2} \varphi(R) = h\nu_0 \left(1 - \frac{GM}{c^2 R}\right), \quad (69.5)$$

որտեղ $\varphi(R) = -GM/R$ գրավիտացիոն դաշտի պոտենցիալն է աստղի մակերևույթի վրա։ Նշանակելով գրանցվող ֆոտոնի հաճախությունը ν , կունենանք՝

$$E_\gamma = h\nu \quad (69.6)$$

էներգիայի պահպանման օրենքը կներկայացվի $E_1 = E_2$ տեսքով, որտեղից

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{GM}{c^2 R}\right):$$

Ճշգրիտ տեսությունը փակագծում տալիս է $1 - 2GM/c^2 R$ ։ Հաշվի առնելով գրավիտացիոն շառավիղի համար (62.15) բանաձևը, կստանանք

$$\nu = \nu_0 (1 - R_g/R), \quad (69.7)$$

որտեղից ֆոտոնի հաճախության հարաբերական փոփոխության համար կունենանք.

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{R_g}{R}; \quad (69.8)$$

Արեգակի համար ստացված արտահայտության աջ մասը 10^{-6} կարգի մեծություն է, իսկ նեյտրոնային աստղերի համար՝ 0.1 - 0.3:

Նկատենք, որ գրանցված ֆոտոնի հաճախությունը միշտ փոքր է աստղից առաքված ֆոտոնի հաճախությունից։ Տեսանելի լույսի սպեկտրում ամենափոքր հաճախությունը համապատասխանում է



Նկ 9.19

կարմիր լույսին: Այս իմաստով հաճախության փոքրացումը անվանում են *կարմիր շեղում*: (69.8)–ով տրվող շեղումը կոչվում է *գրավիտացիոն կարմիր շեղում* երբ ֆոտոնը գրավիտացիոն դաշտի մեծ պոտենցիալով կետից տեղափոխվում է փոքր պոտենցիալով կետ. ապա առաջանում է կարմիր շեղում Հակառակ անցման դեպքում կստացվի *մանուշակագույն շեղում*: հաճախության աճ:

1960 թ. Պաունդն ու Ռեբկան լաբորատոր պայմաններում գրանցել են γ –ճառագայթների հաճախության փոփոխությունը, երբ ուղղաձիգ ուղղությամբ նրանք տեղափոխվել են ընդամենը 22մ: Թեև այդ տեղափոխության վրա երկրի գրավիտացիոն դաշտի պոտենցիալը կրում է չնչին փոփոխություն և նրանով պայմանավորված ալիքի երկարության հարաբերական փոփոխությունը կազմում է $\Delta\lambda \approx 4.92 \cdot 10^{-15}$, այնուամենայնիվ այն գրանցվել է Փորձում ստացվել է

$$\Delta\lambda / \lambda \approx (5.13 \pm 0.51) \cdot 10^{-15}.$$

որը գրավիտացիոն կարմիր շեղման երևույթի փայլուն ապացույց է

§70. ԼՈՒՅՍԻ ՇԵՆՈՒՄԸ ԱՐԵԳԱԿԻ ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ

ԴԱՇՏՈՒՄ

Օպտիկապես համասեռ միջավայրում լույսը տարածվում է ուղղագիծ: Այս պնդումը ճշմարիտ է ՎԻՀ–ում: ՀՈՀ–ում, ընդհանրապես ասած, այն ճիշտ չէ: Պարզվում է, իներցիայի ուժերը (պտույտով պայմանավորված) շեղում են լույսը ուղղագիծ տարածումից. Համարժեքության սկզբունքից ելնելով պետք է սպասել, որ գրավիտացիոն ուժերը նույնպես կկորացնեն լուսային ճառագայթը

Պատվող ՀՈՀ–ում լուսային ճառագայթի կորացումը փորձնականորեն հաստատել է Սանյակը (1913 թ.) Մայքելսոնի պտտվող ինտերֆերոչափի օգնությամբ

Ցույց տանք, որ *լուսային ճառագայթի կորացում տեղի ունի նաև գրավիտացիոն դաշտում*, ասենք՝ Արեգակի դաշտում: Դա պետք է հանգեցնի նրան, որ երկնակամարի վրա Արեգակի ուղղությամբ աստղերը, Արեգակի գրավիտացիոն դաշտում նրանցից եկող լույսի ճառագայթների կորացման պատճառով, պետք է տեղաշարժված թվան իրենց իրական դիրքերից (նկ. 9.20): Այս խնդրի ճշգրիտ լուծումը տրվում է էյնշտեյնի հավասարումներով: Սակայն մենք այդ շեղումը կգնահատենք պարզագույն հաշ-

վարկով, օգտվելով Արեգակի կողմից լուսային քվանտի ծգողության ուժի (69.3) բանաձևից: Արեգակին մոտ $P(R_0, y)$ կետում ֆոտոնի վրա ազդող ուժի X բաղադրիչը կլինի

$$F_x = GM_\odot m R^2 \odot / (R_\odot^2 + y^2)^{3/2} \quad (70.1)$$

որտեղ y -ը չափվում է O կետի մակարդակից: Ֆոտոնի իմպուլսի լայնական p , բաղադրիչը Արեգակի դաշտում շարժվելիս անընդհատ կաճի: Նրա վերջնական արժեքը կորոշենք X առանցքով ֆոտոնի շարժման հավասարումից

$$m v_x = \int F_x dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_x \frac{dy}{v_y} = \frac{2}{c} \int_0^{\infty} F_x dy.$$

որտեղից

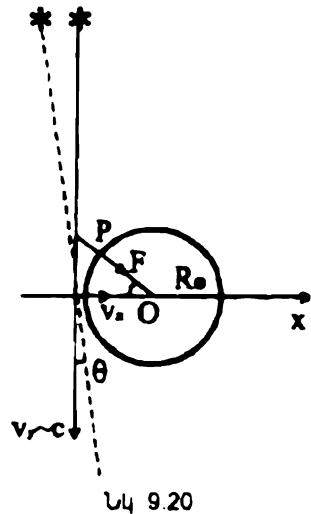
$$v_x = \frac{2GM_\odot R_\odot}{c} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(R_\odot^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{2GM_\odot}{c R_\odot} \quad (70.2)$$

Այնպես որ, ճառագայթի θ անկյունային շեղումն Արեգակի դաշտում կլինի

$$\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_x}{c} \approx \frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} = 0''.87: \quad (70.3)$$

Ենչտեյնի հավասարումների լուծումից ստացվող ճշգրիտ արժեքը գերազանցում է (70.3)–ը երկու անգամ $1''.75$:

Ստացված արդյունքի ստուգումը կապված է որոշ դժվարությունների հետ, թեև $1''.75$ անկյունը աստղագիտական մեթոդներով գրանցելը որևէ դժվարություն չի ներկայացնում: Բանն այն է, որ նման դիտում կարելի է իրականացնել միայն Լուսնի կողմից Արեգակի լրիվ խավարման ժամանակ, քանի որ այդ ընթացքում աստղերը դառնում են տեսանելի և կարող են գրանցվել: Ունենալով Արեգակի սկավառակի շուրջ դիտվող աստղերի բաշխումը խավարման ժամանակ և համեմատելով սովորական պայմաններում այդ տիրույթի աստղերի բաշխման հետ, կարելի է պարզել աստղերի անկյունային տեղաշարժը: Մինչև վերջերս կատարված դիտումները թե՛ օպտիկական և թե՛ հատկապես, ռադիո տիրույթներում, ընդհանուր առմամբ, հաստատում են տեսությամբ կանխատեսվող



շեղումները, սակայն դրանք դեռևս ցանկալի ճշտություն չունեն, և աշխատանքներ են տարվում այդ դիտումների ճշտության մեծացման ուղղությամբ:

ՆԱԴԻՐՆԵՐ

9.1. Ստացեք անսահման երկար համասեռ գլանի գրավիտացիոն դաշտ լարվածությունը գլանի ներսի և դրսի տիրույթներում:

9.2. Որոշեք բարակ համասեռ սկավառակի գրավիտացիոն դաշտի լարվածությունը սկավառակի առանցքի վրա: Սկավառակի շառավիղը անսահման մեծացնելով ստացեք հարթության գրավիտացիոն դաշտի լարվածության բանաձևը Համոզվեք, որ նույնը կատացվի եթե գնդային թաղանթի դաշտի լարվածության բանաձևում շառավիղը ծզոտեցնենք անվերջության:

9.3. Ձանգվածի σ մակերևութային խտություն ունեցող հարթության վրա r շառավիղով շրջանային անցք կա: Որոշեք անցքի առանցքի վրա գրավիտացիոն դաշտի լարվածությունը: Ինչ շարժում կկատարի այդ առանցքի վրա գտնվող մասնիկը:

9.4. Ենթադրենք, Երկրի հասարակածային հարթության մեջ, Երկրի կենտրոնով անցնող անցք է բացված: Ստացեք անցքում մասնիկի շարժման օրենքը Երկրակենտրոն ՀՈՀ-ում, անտեսելով պատերի հետ մասնիկի շփումը: Ինչպիսին է մասնիկի ճնշման ուժը անցքի պատերի վրա:

9.5. Ապացուցեք, որ եթե մեխանիկական համակարգում մասնիկները կառուրում են ֆինիտ շարժում, ապա ճիշտ է վիճակի թեորեմը:

$$\langle \Sigma m_i v_i^2 \rangle_t = -\Sigma \langle F_i r_i \rangle_t,$$

որտեղ $\langle f \rangle_t$ մեծությունը f -ի ըստ ժամանակի միջինն է

$$\langle f \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t f(t) dt:$$

Ապացույց: Ըստ ժամանակի ածանցենք հետևյալ սկզբար ֆունկցիան

$$f = \Sigma \mathbf{p}_i \mathbf{r}_i, \quad \dot{f} = \Sigma \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{r}}_i + \Sigma \dot{\mathbf{p}}_i \mathbf{r}_i$$

Հաշվի առնելով, որ $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$, $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i$, կունենանք

$$\frac{df}{dt} = \Sigma m_i v_i^2 + \Sigma \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i,$$

որի միջինացումը $[0, \tau]$ միջակայքում կտա

$$\langle \Sigma m v^2 \rangle_t = \frac{1}{t} [f(t) - f(0)] + \langle \Sigma F r \rangle_t$$

Այժմ մասի առաջին անդամը երկու կարևոր դեպքերում հավասարվում է զրոյի, նախ, եթե շարժումը պարբերական է և պարբերությամբ, և եթե մասնիկների շարժումը ֆինիտ է՝ Առաջին դեպքում $f(t) = f(t_0)$, իսկ երկրորդում $f(t) \rightarrow 0$ մնում է վերջավոր երբ $t \rightarrow \infty$:

9.6. Ցույց տվեք, որ

- վիրիալի թեորեմը գրավիտացվող համակարգերի միջին կինետիկ էներգիայի համար տալիս է $\langle K \rangle_t = \frac{1}{2} \langle U \rangle_t$, որտեղ U -ն համախմբի պոտենցիալ էներգիան է.
- լրիվ մեխանիկական էներգիայի դրական արժեք ունեցող մասնիկների համախումբը քայքայվում է (մասնիկները կատարում են ինֆինիտ շարժումներ) և դառնում դինամիկորեն անկայուն;
- եթե ժամանակի որևէ պահին համախմբի միջին կինետիկ էներգիան մեծությամբ գերազանցի պոտենցիալ էներգիայի արժեքը, ապա համախումբը կդառնա դինամիկորեն անկայուն;
- համախմբի էներգիան մեծացնելիս համախումբն ընդարձակվում է, իսկ փոքրացնելիս՝ սեղմվում:

9.7. Որոշեք Երկրագնդի համար երրորդ կոմիկական արագությունը:

9.8. Ելնելով ֆիզիկական մեծաթյունների չափողականության անալիզից՝ ստացեք.

- զանգվածի ρ ծավալային խտություն ունեցող գրավիտացվող համախմբի պտտման անկյունային արագությունը.
- համախմբի սեփական իմպուլսի մոմենտի և զանգվածի կապը.
- նույնը՝ զանգվածի σ մակերևութային խտությամբ սկավառակի համար:

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Մարմինների մակրոսկոպիկ հատկություններն ուսումնասիրելիս անտեսվում է նրանց դիսկրետ-մոլեկուլային կառուցվածքը, և համարվում անընդհատ, հոծ միջավայրեր: Ռա հնարավոր է կատարել, եթե մոլեկուլների ազատ վազքի միջին երկարությունն անհամեմատ փոքր է միջավայրի չափսերից:

Հոծ միջավայրի դիտարկմանը ենթակա ցանկացած փոքր տարր, աֆնումենայնիվ, այնքան մեծ է, որ պարունակում է բավականաչափ մեծ թվով մոլեկուլներ: Այնպես որ այս տեսության մեջ օգտագործվող «անվերջ փոքր տարրին»՝ «հեղուկ մասնիկին», հատուկ են միջավայրի բոլոր մակրոսկոպիկ հատկությունները, ինչպիսիք են խտությունը, ճնշումը, ջերմաստիճանը, ներքին էներգիան և այլն:

Հոծ միջավայրը կարող է գտնվել պինդ, հեղուկ և գազային վիճակներում: Այս գլխում կքննարկենք պինդ մարմինների առաձգական հատկությունները:

§71. ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՑԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ

ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Արտաքին ուժերի ազդեցությամբ մարմինները փոխում են իրենց ձևը և ծավալը: Նման փոփոխությունները կոչվում են *դեֆորմացիաներ*: Տարբերվում են *առաձգական* և *պլաստիկ դեֆորմացիաներ*: Առաձգական են այն դեֆորմացիաները, որոնք անհետանում են կիրառված ուժի վերացումով: Այն դեֆորմացիաները, որոնք զոնե մասամբ պահպանվում են արտաքին ուժի վերացումից հետո, կոչվում են *պլաստիկ*: Դեֆորմացիայի առաձգական կամ պլաստիկ լինելը պայմանավորված է ոչ այնքան մարմնի նյութի տեսակից, որքան կիրառված ուժի մեծությունից: Եթե ուժը (ավելի ճիշտ՝ մարմնի միավոր մակերեսին ազդող ուժը) չի գերազանցում *առաձ*

գավառության սահման կոչվող մեծությունը, ապա նրա առաջացրած դեֆորմացիան կլինի առաձգական Հակառակ դեպքում դեֆորմացիան պլաստիկ է:

Առաձգականության սահմանը տարբեր նյութերի համար տարբեր է Այն խստորեն սահմանված որոշակի մեծություն չէ. Այնպես որ մարմինների ընդունված դասակարգումը առաձգականի և պլաստիկի ինչ-որ չափով պայմանական է: Խիստ ասած, արտաքին ուժի վերացումից հետո ոչ մի դեֆորմացիա լիովին չի անհետանում: Այս իմաստով բոլոր դեֆորմացիաները պլաստիկ են. Սակայն եթե մնացորդային դեֆորմացիաները մեծությամբ փոքր են, շատ դեպքերում դրանք կարելի է հաշվի չառնել. Իսկ թե ինչ մեծության դեֆորմացիաներն է պետք անտեսել - կախված է կոնկրետ խնդրի պայմաններից: Օրինակ, որոշ խնդիրներում մնացորդային դեֆորմացիան անտեսվում է, եթե այն չի գերազանցում դեֆորմացիայի առավելագույն չափի 0.1%-ը: Այլ դեպքերում այդ սահմանը հարկ է լինում իջեցնել մինչև 0.01%:

Մեխանիկան նկարագրում է մարմինների առաձգական հատկությունները փորձնականորեն ներմուծվող *առաձգականության հաստատուններով*, որոնք տարբեր են տարբեր մարմինների համար և կախված են նրանց ջերմադինամիկական վիճակից: Առավել խորն է ֆիզիկական մոտեցումը, որը դեֆորմացիաների երևույթը դիտարկում է ատոմիստական տեսանկյունից: Դրանով զբաղվում է պինդ մարմնի ֆիզիկան, որը թույլ է տալիս ստանալ ոչ միայն դեֆորմացվող մարմինների մեխանիկայի հիմնական հավասարումները, այլև կապ հաստատել առաձգականության հաստատունների և մարմնի ֆիզիկական հատկությունների միջև:

Կենթադրենք, որ մարմիններն ունեն *իզոտրոպ* առաձգական հատկություններ: Այսինքն՝ տարբեր ուղղություններով մարմնի առաձգականության հաստատունները նույնն են: Մետաղները, սովորաբար, ունեն բազմաբյուրեղային կառուցվածք, այսինքն՝ կազմված են անկանոն կողմնորոշված անիզոտրոպ բյուրեղիկներից: Բայց մետաղի կտորը, որում բյուրեղիկների բոլոր հնարավոր կողմնորոշումները հանդես են գալիս միևնույն հավանականությամբ, իրենց պահում են որպես իզոտրոպ մարմին. Պլաստիկ դեֆորմացիայի հետևանքով բյուրեղների քառասնությունը կարող է խախտվել: Այդ դեպքում պլաստիկ դեֆորմացիաները կարող են մետաղը դարձնել անիզոտրոպ:

Դեֆորմացված մարմնի տարբեր մասերը փոխազդում են իրար հետ.

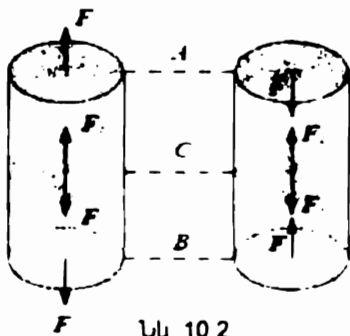
Դրա հետևանքով մարմնի ամբողջ ծավալը գտնվում է լարված վիճակում: Եթե դեֆորմացված մարմինը հարթությամբ մտնի հատենք երկու մասի, ապա բաժանման սահմանի մակերևույթի կամայական dS մակերեսով տարրը վրա դեֆորմացիայի հետևանքով կազդեն ուժեր: Նշանակենք մարմնի II մասի կողմից I մասի վրա dF տարրին կիրառված դեֆորմացիայի ուժը dF (նկ.10.1): Դեֆորմացված վիճակը բնութագրվում է առաձգական լարում կոչվող ֆիզիկական մեծությամբ, որը միավոր մակերեսին ազդող առաձգականության ուժն է՝ dF/dS : Առաձգական լարումը ներկայացվում է նորմալ և տանգենցիալ լարումների վեկտորական գումարի տեսքով.

$$dF/dS = n dF_n/dS + \tau dF_\tau/dS.$$

Նորմալ լարումը մակերեսին ուղղահայաց առաձգական լարումն է, իսկ տանգենցիալը շոշափող լարումը:

§72. ԶԳՈՒՄ ԵՎ ՍԵՂՄՈՒՄ: ՀՈՒԿԻ ՕՐԵՆՔԸ

Կիրառենք համասեռ ծողի հիմքի վրա ծգող, կամ սեղմող F ուժեր (նկ. 10.2): Զողը կդեֆորմացվի, այսինքն կծգվի կամ կսեղմվի: Դիտարկենք ծողի առանցքին ուղղահայաց C հատույթը: Զողերի վերին և ստորին մասերը



Նկ. 10.2

հավասարակշռության համար անհրաժեշտ է, որ C հատույթի վրա ազդեն $F_1 = F_2$ ուժեր: Դրանք այն ուժերն են, որոնցով փոխազդում են ծողի ստորին և վերին մասերը առաձգական դեֆորմացիայի հետևանքով: Այս ուժերն ազդում են դեֆորմացված ծողի ցանկացած լայնական հատույթի վրա: Ուրեմն, դեֆորմացված ծողի ցանկացած հատույթի վրա ազդում են հավասար ուժեր:

քում առաջանում են առաձգականության ուժեր, որոնցով փոխազդում են ծողի սահմանակցող մասերը: Նկատենք, որ դիտարկվող դեպքում առաձգական լարումը ուղղահայաց է ծողի լայնական հատվածքի մակերևույթին:

Զգված ծողում լարումը կոչվում է *ձգման լարում*

$$\sigma = F / \Sigma, \quad (72.1)$$

որտեղ Σ –ն ծողի լայնական հատույթի մակերեսն է:

Սեղմված ծողում լարումը կոչվում է *ճնշում* և որոշվում է

$$P = F / \Sigma \quad (72.2)$$

բանաձևով: *Ճնշումը կարելի է դիտել որպես բացասական ձգման լարում* և հակառակը

$$P = -\sigma: \quad (72.3)$$

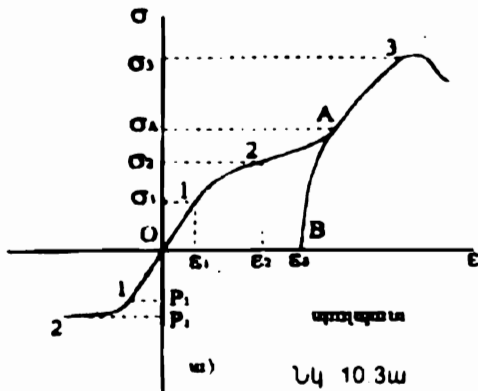
Վերջինս ազատում է ձգումն ու սեղմումն առանձին դիտարկելու անհրաժեշտությունից:

Նշանակենք չդեֆորմացված ծողի երկարությունը l_0 : Արտաքին F ուժի ազդեցությամբ ծողը կստանա երկարության Δl աճ: Ծողի երկարացումը բնութագրվում է

$$\varepsilon = \Delta l / l_0 \quad (72.4)$$

մեծությամբ, որը կոչվում է *հարաբերական երկարացում*: Այն դրական է ձգման, և բացասական սեղմման դեֆորմացիաների համար (վերջին դեպքում այն անվանում են հարաբերական սեղմում):

Դեֆորմացիայի լարման (αP) և հարաբերական երկարացման (ε) միջև գոյություն ունի կապ: Այն տարբեր է տարբեր նյութերի համար: Նկ. 10.3-ում ներկայացված գրաֆիկը պատկերում է այդ կախվածությունը պողպատյա համասեռ ծողի համար, որը բնութագրական է նյութերի մեծամասնությանը լարման մեծացմանը զուգընթաց այդ կախվածությունը նախ գծային է (գրաֆիկի 1-1 հատվածը), որից հետո այն ունի ոչ գծային վարք: Գրաֆիկի 1-1 հատվածով նկարագրվող դեֆորմացիաները կոչվում են *վռոք*, որոնց համար



ճիշտ է *Հուլի օրենքը*. ծգման լարումը (կամ ճնշումը) համեմատական է հարաբերական երկարացմանը (սեղմմանը).

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (P = -E\varepsilon), \quad (72.5)$$

որտեղ E համեմատականության գործակիցը կախված է ծողի նյութի տեսակից և ջերմադինամիկական վիճակից (հիմնականում ջերմաստիճանից): Այն կոչվում է *Յունգի մոդուլ* և հանդիսանում է նյութի առաձգական հատկությունների կարևոր բնութագրերից մեկը:

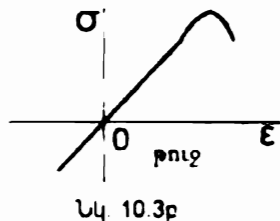
Թեև գրաֆիկի 1-2 տիրույթները արտահայտվում են լարման և հարաբերական երկարացման միջև ոչ գծային կախվածությամբ, փորձը ցույց է տալիս, որ նրանց համապատասխանող դեֆորմացիաները նույնպես առաձգական են: Այսինքն՝ 2 կետերում արտաքին ուժը վերացնելիս դեֆորմացիան անհետանում է: Ընդ որում ծողը վերադառնում է հավասարակշռության Օ կետը նույն 2-Օ կորով: 2 կետին համապատասխանող σ : լարումը (P : ճնշումը), կոչվում է *առաձգականության սահման*, որից մեծ լարումների (ճնշումների) դեպքում դեֆորմացիան դառնում է *պլաստիկ* (գրաֆիկի 2-3 մասերը), որոնք կոչվում են նաև *հոսունության տիրույթներ*: քանի որ լարման փոքր փոփոխությունները առաջ են բերում ծողի մեծ հարաբերական երկարացումներ: Առաձգականության 1-2 տիրույթից դուրս ցանկացած A կետում ծողի բեռնավորումը աստիճանաբար վերացնելիս ծողը չի վերադառնում իր սկզբնական վիճակին, այլ պահպանում է ε_0 մնացորդային դեֆորմացիա:

Ուրեմն, *պլաստիկ դեֆորմացիան ոչ դարձելի պրոցես է*:

Հետաքրքիր է, որ եթե պլաստիկ դեֆորմացիայի ենթարկված և մնացորդային դեֆորմացիա ձեռք բերած ծողը նորից բեռնավորենք, ապա նրա դեֆորմացիան կնկարագրվի BA կորով, ընդ որում առաձգականության սահմանը այս դեպքում կլինի մոտավորապես σ_0 , որն ավելի մեծ է քան σ_0 : -ը: Ուրեմն, *պլաստիկ դեֆորմացիայի ենթարկվելուց հետո ծողի առաձգականության սահմանը մեծանում է*: Այս կերպ մշակված նյութերը բնութագրվում են նաև մեծ ամրության պաշարով (սահմանով):

Գրաֆիկի 3 կետը բնութագրվում է ծգման լարման հնարավոր առավելագույն (սովյալ ծողի համար) արժեքով: Այս կետում սկսվում է ծողի *խզումը*, որը շարունակվում է նույնիսկ ծողի բեռնավորումը փոքրացնելիս: Ծգման լարման առավելագույն σ_3 արժեքը կոչվում է ծողի *ամրության սահման*:

Տարբեր նյութերի լարման σ_1 , σ_2 , σ_3 բնութագրական արժեքները խիստ տարբեր են: Որոշ նյութերի համար (թուջ, բետոն) ալյաստիկ դեֆորմացիաների 2-3 տիրույթը գործնականորեն բացակայում է, և նրանց խզումը տեղի է ունենում առաձգականության սահմանին մոտ (նկ 10.3բ): Դեֆորմացիաների նման վաղը ցուցաբերող մարմինները կոչվում են *փխրուկ*:



Առաձգական դեֆորմացիաների 1-2 տիրույթում ձգման լարումը (ճնշումը) միարժեք ֆունկցիա է հարաբերական երկարացումից, $\sigma = \sigma(\varepsilon)$: Համաձայն առաձգական դեֆորմացիայի սահմանման՝ $\sigma(0) = 0$: Շարքի վերածելով $\sigma(\varepsilon)$ -ը ըստ ε -ի աստիճանների, կունենանք

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon + C\varepsilon^2 + D\varepsilon^3 + \dots \quad (72.6)$$

որտեղ E , C , D գործակիցները նյութի տեսակից և ջերմաստիճանից կախված հաստատուններ են: Փոքր դեֆորմացիաների դեպքում (72.6) շարքում կարելի է արհամարիել ε^2 և ε^3 և ավելի փոքր անդամներն ու տառնալ (72.5) Հուլի օրենքը: Նկատենք, որ (72.6)-ի փոխարեն առաձգական դեֆորմացիաների համար Հուլի օրենքից օգտվելիս թույլ է տրվում ε կարգի փոխալ: Հետևաբար Հուլի օրենքի կիրառությամբ կատարված բոլոր հաշվարկներում պարտավոր ենք անտեսել հիմնական անդամի նկատմամբ ε և ավելի բարձր կարգի անկետեղ փոքրերը: Օրինակ, այս մոտավորությամբ

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \approx \frac{\Delta l}{l} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \varepsilon + O(\varepsilon^2): \quad (72.7)$$

Այնպես որ Հուլի օրենքը կարելի է ներկայացնել նաև այսպես.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \quad \sigma = E \frac{\Delta l}{l}: \quad (72.8)$$

Դեֆորմացիաների ժամանակ նյութի հատկությունները, ընդհանրապես առած, փոփոխվում են: Սակայն եթե դեֆորմացիաները փոքր են, ապա Յունգի մոդուլի փոփոխությունները կարելի է անտեսել (ի դեպ, Յունգի մոդուլի մասին կարելի է խոսել միայն փոքր դեֆորմացիաների դեպքում): Այս դիտողությունը ճիշտ է ցանկացած այլ փոքր դեֆորմացիաներ բնութագրող առաձգականության հաստատունների համար: Այստեղից հետևում է *փոքր դեֆորմացիաների վերադարձնական սկզբունքը*. Համազոր

ուժի առաջացրած դեֆորմացիան հավասար է բաղադրիչ ուժերի առաջացրած դեֆորմացիաների գումարին:

Սեղմման կամ ձգման դեֆորմացիաները փոխում են նաև ծողի լայնական չափերը: Այս փոփոխությունները կարելի է բնութագրել ծողի *հարաբերական լայնական սեղմումով*.

$$\kappa = \frac{\Delta a}{a} \approx \frac{\Delta \sigma}{\sigma}, \quad (72.9)$$

որը դրական է ծողի սեղմման և բացասական՝ ձգման դեֆորմացիաների համար (a - ծողի լայնական չափն է):

Փորձը ցույց է տալիս, որ հարաբերական լայնական սեղմման և հարաբերական երկարացման հարաբերությունը

$$\mu = -\frac{\kappa}{\varepsilon} = -\frac{\Delta \sigma}{\Delta l} \frac{l}{\sigma}, \quad (72.10)$$

որը կոչվում է *Պուասոնի գործակից*, մարմնի նյութի տեսակից կախված հաստատուն է:

Իզոտրոպ նյութի առածգական բոլոր հատկությունները լիովին նկարագրվում են Յունգի մոդուլով և Պուասոնի գործակցով: Այսինքն, առածգականության մյուս բոլոր հաստատունները կարող են արտահայտվել E և μ գործակիցներով:

Ցույց տանք, որ *համասեռ նյութի Պուասոնի գործակիցը չի կարող գերազանցել 1/2-ը*: Ծողի ներսում առանձնացնենք առանցքին զուգահեռ տարրական ℓ_0 կողի երկարություն ունեցող խորանարդիկ: Զդեֆորմացված վիճակում այն կունենա ℓ_0' ծավալ: Ծողի ε հարաբերական երկարացման հետևանքով խորանարդի ծավալը կդառնա

$$\ell_0'^3 (1-\varepsilon)(1-\kappa)^2 = \ell_0^3 (1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2 = \ell_0^3 (1+\varepsilon-2\mu\varepsilon-0(\varepsilon^2)):$$

Զգման դեպքում խորանարդի ծավալը չի կարող փոքրանալ, ուրեմն՝

$$\varepsilon(1-2\mu) \geq 0$$

Քանի որ ձգման համար $\varepsilon > 0$, ապա $\mu \leq 1/2$:

Հետագա պարագրաֆներում կսահմանափակվենք միայն փոքր դեֆորմացիաների դիտարկմամբ, որոնց համար ճիշտ է Հուկի օրենքը: Ընդ որում կենթադրենք, որ դեֆորմացիաների ընթացքում մարմնի ջերմաստիճանը չի փոփոխվում, այսինքն դեֆորմացիայի պրոցեսը իզոթերմ է: Դա հնարավորություն է տալիս մարմնի առածգականության գործակիցները համարել հաստատուն: Դանդաղ ընթացող դեֆորմացիաների համար այս պայմանը սովորաբար միշտ տեղի ունի:

Մարմինը դեֆորմացնելու համար պետք է աշխատանք կատարել: Իր հերթին դեֆորմացված մարմինը կարող է աշխատանք կատարել շնորհիվ իր պոտենցիալ էներգիայի: Վերջինս կոչվում է առաձգականության էներգիա, որն առաձգական դեֆորմացիայով պայմանավորված սեփական պոտենցիալ էներգիան է և թվապես հավասար է դեֆորմացնող ուժի այն ամենափոքր աշխատանքին, որն անհրաժեշտ է տվյալ առաձգական դեֆորմացիան առաջացնելու համար: Այստեղ հատուկ նշում ենք ամենափոքր աշխատանքը, քանի որ այդ ուժը կարող է, դեֆորմացնելուց զատ, ձարմնին հաղորդել նաև լրացուցիչ կինետիկ էներգիա, աշխատանք կատարել այլ բնույթի (ոչ առաձգական) ուժերի դեմ (օրինակ, չփման ուժերի, քեթ մարմինը ենթարկվում է նաև արտաքին դիսիպատիվ ուժերի ազդեցությանը): Դեֆորմացիայի ժամանակ մարմնին կինետիկ էներգիա չհաղորդելու համար դեֆորմացիան պետք է իրականացնել բավականաչափ դանդաղ, աստիճանաբար մեծացնելով արտաքին ուժը այնպես, որ ժամանակի ցանկացած պահին մարմնի յուրաքանչյուր մասը գործնականորեն գտնվի հավասարակշռության վիճակում: Այլ կերպ ասած, դեֆորմացիայի ընթացքում արտաքին ուժերը միշտ պետք է համակշռված լինեն մարմնում առաջացող ներքին լարումներով: Այս պայմանի բավարարման դեպքում ասում են, որ դեֆորմացիայի պրոցեսը քվադրատատիկ է: Կիրառենք ծողի վրա արտաքին ուժ L դանդաղ մեծացնենք, այն սկզբնական $f = 0$ արժեքից $f = F$ վերջնական արժեքը: Այդ դեպքում ծողի դեֆորմացիան կիռփոխվի $x = 0$ -ից $x = \Delta l$ վերջնական արժեքը: Ըստ Հուկի օրենքի՝ $F = k\Delta l$, որտեղ k -ն ծողի առաձգականության գործակիցն է, որը բացի նյութի տեսակից, կախված է նաև մարմնի ձևից և չափսերից:

$$k = E \Sigma / l: \quad (73.1)$$

Այստեղ E -ը ծողի երկարությունն է, Σ -ն լայնական հատվածի մակերեսը, E -ն Յունգի մոդուլը:

Քվադրատատիկ դեֆորմացիայի դեպքում արտաքին ուժը փոփոխվում է $f = kx$ օրենքով, որի կատարած աշխատանքը հենց *առաձգականության էներգիան է*

$$U = \int_0^{\Delta l} f dx = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} F \Delta l, \quad (73.2)$$

որտեղ F -ը դեֆորմացնող ուժի վերջնական արժեքն է

Նկատենք, որ եթե չդեֆորմացված ծողին անմիջականորեն ազդենք հաստատուն F ուժով, ապա այն ծողի Δl դեֆորմացիայի դեպքում կատարի $A = F \Delta l$ աշխատանք, որի միայն կեսն է ծախսվում ծողի առաձգականության էներգիայի աճի վրա. Աշխատանքի մյուս կեսը վերածվում է դեֆորմացիայի ոչ քվադրատիկությամբ պայմանավորված առաձգական տատանումների և ալիքների կինետիկ էներգիային. Զվազիստա-տիկ դեֆորմացիաների դեպքում նման երևույթներ չեն առաջանում: Ղրա-նով էլ պայմանավորված է (73.2) –ում $1/2$ գործակիցը:

Դեֆորմացված մարմնի առաձգականության էներգիան բաշխված է նրա ամբողջ ծավալում: Եթե դեֆորմացիան համասեռ է, այսինքն մարմնի ծավալի յուրաքանչյուր փոքր տարրի հարաբերական ε դեֆորմացիան ունի միևնույն արժեքը, ապա առաձգականության էներգիայի բաշխումը նույնպես կլինի համասեռ: Դեֆորմացված մարմնի ցանկացած տարրի ա-ռաձգականության dU' էներգիան համեմատական է տարրի dV' ծավալին

$$dU' = w dV' : \quad (73.3)$$

w -ն կոչվում է *առաձգականության էներգիայի ծավալային խտություն* և ունի միավոր ծավալի առաձգականության էներգիայի իմաստ: Անհամա-սեռ դեֆորմացիայի դեպքում էներգիայի խտությունը կախված է մարմնում ընտրված տարրական ծավալի դիրքից: Համասեռ դեֆորմացիայի դեպ-քում $w = const$: Այն կարելի է հաշվել (73.2) արտահայտությունը ծողի $l' = \Delta l$ ծավալին բաժանելով.

$$w = \frac{U'}{\Sigma l} = \frac{1}{2} \frac{F}{\Sigma} \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon , \quad (73.4)$$

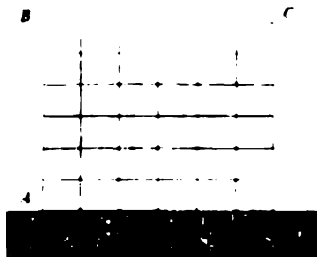
որտեղ օգտվեցինք (72.1), (72.4) սահմանումներից. Օգտվելով Հուկի (72.5) օրենքից (73.4) բանաձևը կգրենք հետևյալ կերպ

$$w = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \sigma^2 / 2 E : \quad (73.5)$$

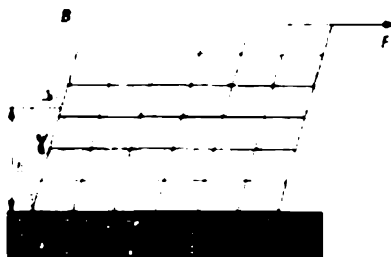
Ուրեմն, դեֆորմացված ծողի յուրաքանչյուր միավոր ծավալն օժտ-ված է իր հարաբերական երկարացման քառակուսուն համեմատական առաձգականության էներգիայով: Թեև (73.2) բանաձևը ստացանք համա-սեռ դեֆորմացված ծողի համար, սակայն այն ճիշտ է նաև անհամասեռ դեֆորմացիաների դեպքում: Այդ դեպքում, իհարկե, ε -ը ֆունկցիա է կոոր-դինատից:

§74. ՄԱՀՔԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱ

Ամրացմանը ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ձև ունեցող համասեռ մարմինը ստորին հիմքով հենարանին և վերին նիստի վրա ազդեցը շոշափող F ուժ (նկ.10.4ա)։ Մարմինը կընդունի շեղանկյուն զուգահեռանիստի տեսք, որի հիմքին զուգահեռ բոլոր հարթությունները շեղված են միմյանց նկատմամբ γ անկյունով (նկ.10.4բ)։



Նկ. 10.4ա



Նկ. 10.4բ

Նշանակենք ամրացված հիմքից b բարձրության վրա գտնվող հարթության չդեֆորմացված դիրքից շեղումը Δa (նկ.10.4բ)։ Փոքր դեֆորմացիաների դեպքում

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \Delta a / b \ll 1 \quad (74.1)$$

մեծությունը կոչվում է *հարաբերական սահք* կամ *սահքի անկյուն*։ Ընդհանուր դեպքում սահքի անկյունը կարող է տարբեր լինել տարբեր հարթությունների համար $\gamma = \gamma(b)$ ։ Դա անհամասեռ սահքի դեֆորմացիայի դեպքն է։ Համասեռ սահքը, որը մենք դիտարկում ենք, մարմնի ցանկացած տարրական ուղղանկյուն զուգահեռանիստ վերածում է նույն սահքի անփամբ բնութագրվող շեղանկյուն զուգահեռանիստի։ Այսինքն՝ համասեռ սահքի դեպքում γ -ն ունի նույն արժեքը մարմնի ծավալի բոլոր մասերում։ Դա զուգահեռանիստի AB նիստի շեղման անկյունն է։

Նշանակենք ամրացված նիստի մակերևույթի մակերեսը Σ ։ Դեֆորմացնող F ուժը կառաջացնի

$$\tau = F / \Sigma \quad (74.2)$$

շոշափող լարում։ *Սահքի փոքր դեֆորմացիաների համար ճիշտ է Հուկի օրենքը*։

$$\tau = G \gamma \quad (74.3)$$

Համեմատականության G գործակիցը կոչվում է *սահքի մոդուլ*։ Այն նյութի առածագական հատկությունների կարևոր բնութագիր է։

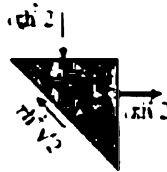
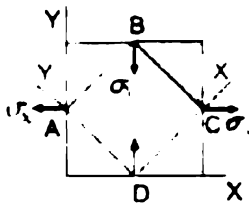
Բվագիստատիկ դեֆորմացնող ուժի աշխատանքը, որն ըստ սահմանման առաձգականության էներգիան է, կլինի

$$U = \frac{1}{2} FBB' = \frac{1}{2} r\Sigma\gamma h = \frac{1}{2} r\gamma V, \quad (74.4)$$

քանի որ $BB' = \gamma h$, որտեղ h - ը զուգահեռանիստի բարձրությունն է, իսկ $V = h\Sigma$ -ն ծավալը: Օգվելով Հուկի (74.3) օրենքից և էներգիայի խտության սահմանումից, կստանանք

$$w = r\gamma/2 = r^2/2G: \quad (74.5)$$

Փոքր դեֆորմացիաների հիմնական տեսակներն են ձգումն ու սեղմումը: Բոլոր մնացած դեֆորմացիաները կարող են արտահայտվել այդ երկուսի միջոցով: Հետևաբար սահից մոդուլը կարող է ներկայացվել սեղմման և ձգման դեֆորմացիաները բնութագրող E և μ հաստատուններով: Այս պնդումը կապացուցենք պարզագույն օրինակի դիտարկմամբ:



Նկ. 10.5

$$\Delta_1 h/h = \sigma_1/E:$$

Եթե ազդեր միայն σ_1 լայնումը, ապա Y առանցքի ուղղությամբ խորանարդը կստանար հարաբերական լայնական աճ.

$$\Delta_2 h/h = -\mu\sigma_1/E:$$

Համաձայն վերադրման սկզբունքի X առանցքով խորանարդի հարաբերական երկարացման համար կունենանք՝

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta_1 h + \Delta_2 h}{h} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} = \frac{1-\mu}{E} \sigma_1:$$

Նույն ձևով կստանանք Y առանցքով հարաբերական երկարացումը.

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} = -\frac{1-\mu}{E} \sigma_2: \quad (74.6)$$

Ուրեմն

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \frac{1+\mu}{E} \sigma_2 \equiv \varepsilon_2: \quad (74.7)$$

Այս դեֆորմացիան X' , Y' առանցքների ուղղությամբ ներկայացնում է մաքուր սահից: Իսկապես, Նկ. 10.5 ա-ում շտրիխված պրիզմայի հավասարակշռության պայմանից (տե՛ս Նկ. 10.5բ) հետևում է, որ նրա BC նիստի

վրա ազդում է շոշափող լարում. որը կառաջացնի ABCD խորանարդի սահք: Ասիքի անկյունը համաձայն Հուկի (74.3) օրենքի, հավասար է

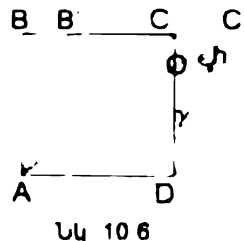
$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma_z}{G} \quad (74.8)$$

Պարզ է, որ (74.7)–ը ներկայացնում է նկ.10.5ա–ում ABCD խորանարդի անկյունագծերի հարաբերական երկարացումը. ABCD քառակուսու դեֆորմացիայի երկրաչափական դիտարկումից (նկ.10.6), հաշվի առնելով, որ $\gamma < 1$ պայմանի շնորհիվ $CO = C'O = \varepsilon_0 h$, $CC'O$ ուղղանկյուն եռանկյունուց կատանանք

$$\frac{\gamma h}{\sqrt{2}} = \varepsilon_0 h \sqrt{2}.$$

Որտեղից $\gamma = 2\varepsilon_0$: Հաշվի առնելով (74.7),
(74.8) առնչությունները, կունենանք

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (74.9)$$



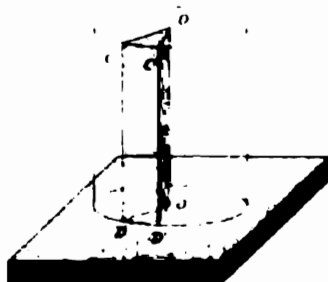
որն էլ առաձգականության հաստատունների միջև կապն է:

§ 75. ՈՒՈՐՈՒՄ ԵՎ ՃՎԱՄ

1. *Ոլորում:* Եթե համասեռ գլանի ստորին հիմքն ամրացնենք պատվանդանին, իսկ վերին հիմքի վրա կիրառենք առանցքի նկատմամբ M ուժի մոմենտով ուժազույգ, ապա գլանում առաջացած դեֆորմացիան կանվանենք *ոլորում* (նկ.10.7): Ոլորման ժամանակ գլանի այն հիմքը, որի վրա ազդում է ուժազույգը, պտտվում է որոշակի φ անկյունով, որը *ոլորման դեֆորմացիայի քանակական բնութագիրն է*: Նկատենք, որ ոլորման անկյունը կախված է գլանի հիմքից դիտարկվող կետի *հարձրությունից*. $\varphi = \varphi(h)$. Այսինքն՝ *ոլորումը անհամասեռ դեֆորմացիա է*: Ոլորման փոքր դեֆորմացիաների համար *Հուկի օրենքն* արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով.

$$M = J \varphi, \quad (75.1)$$

որտեղ J -ը կոչվում է *ոլորման մոդուլ*՝ տարբերություն E , μ , G գործակիցների, *ոլորման մոդուլը բացի նյութի տեսակից կախված է նաև մարմնի երկրաչափական ձևից ու չափսերից*:

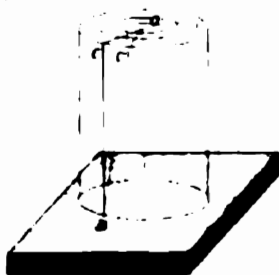


Նկ. 10.7ա



Նկ. 10.7բ

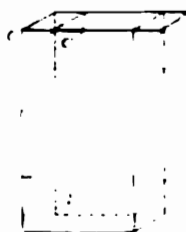
Ցույց տանք, որ ոլորման դեֆորմացիան ներկայացնում է անհամասեռ սափք. Այդ նպատակով գլանը մտուկի տրոհենք համառանցք գլանային խողովակների (նկ. 10.8ա): Առանձնացնենք չդեֆորմացված 1 խողովակից տարրական ABCD ուղղանկյուն զուգահեռանիստ (նկ. 10.8բ): Գլանի ոլորման դեֆորմացիայի հետևանքով դիտարկվող ուղղանկյուն զուգահեռանիստը կընդունի AB'C'D տեսքը: Նույն ոլորման հետևանքով 2 գլանային խողովակի (որի շառավիղը ավելի փոքոր է) համապատասխան տարրական մասը կենթարկվի ավելի փոքոր ($\gamma_1 < \gamma_2$) անկյամբ սափք (նկ. 10.8գ): Այնպես որ, իսկապես, ոլորումն անհամասեռ սափք է: Նույն եզրակացությանը կարելի է հանգել գլանը հիմքին զուգահեռ տարրական սկավառակների տրոհելով:



Նկ. 10.8ա



Նկ. 10.8բ



Նկ. 10.8գ

Գլանի ոլորման մոդուլը որոշելու համար նախ դիտարկենք h բարձրություն, r շառավիղ և տարրական δr հաստություն ունեցող գլանային խողովակի քվադրատատիկ ոլորումը վերին հիմքի վրա τ շոշափող լարման ազդեցությամբ: Վերին հիմքի $\delta \Sigma = 2\pi \delta r$ մակերեսի վրա ազդող ուժի մոմենտը կլինի $\delta M = \tau \delta \Sigma$: Գլանը φ անկյամբ քվադրատատիկ ոլորելիս $\delta M (= \delta r \varphi)$ ուժի մոմենտը կկատարի $\delta A = \delta M \varphi / 2$ աշխատանք: Բաժանելով վեր-

ջին խողովակի $\delta V = 2\pi h \delta r$ ծավալին, կստանանք ոլորման դեֆորմացիայի էներգիայի ծավալային խտությունը

$$w = \delta M \varphi + 2\pi h \delta r = \delta M^2 \cdot 2 \delta f \delta V - \pi r^2 \delta r / h \delta f \quad (75.2)$$

Ոլորված խողովակի առաձգականության էներգիայի խտությունը կառելի է ստանալ, ոլորումը դիտելով որպես սահք Այս դեպքում էներգիայի խտությունը տրվում է (74.4) բանաձևով. Համեմատելով վերջինս (75.2) բանաձևի հետ (էներգիայի արժեքը անկախ է նրա հաշվման եղանակից), խողովակի ոլորման մոդուլի համար կստանանք՝

$$\delta f = 2\pi G r^3 \delta r / h: \quad (75.3)$$

Եթե խողովակն ունի վերջավոր $r_1 - r_2$ հաստություն, ապա նրա ոլորման մոդուլի արժեքը կստանանք (75.3) -ի աջ մասը ինտեգրելով r_1, r_2 սահմաններում

$$f = \pi G (r_2^4 - r_1^4) / 2h: \quad (75.4)$$

Հոծ գլանի ոլորման մոդուլի համար կստանանք

$$f = \pi G R^4 / 2h, \quad (75.5)$$

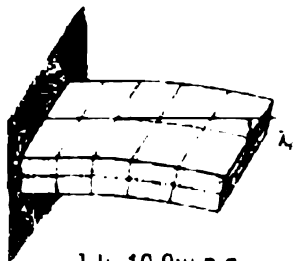
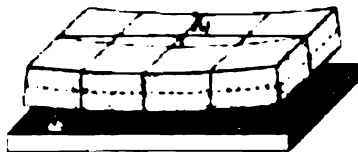
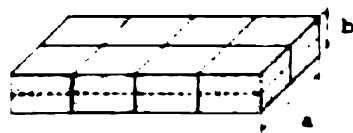
որտեղ R -ը գլանի շառավղին է:

2. Ճկումը եռյեռյես անհամասեռ դեֆորմացիա է Ուղղանկյուն ծողի ձկման դեֆորմացիաների օրինակներ են նկ.10.9-ում պատկերված դեպքերը: Սովորաբար ձկման դեֆորմացիան քանակապես բնութագրում են λ ձկման պարկոչվող մեծությամբ: *ձկման պաշը ծողի ամենամեծ դեֆորմացիայի ենթարկված մասի շեղման չափն է չդեֆորմացված վիճակից* (նկ. 10.9բ,գ): ձկման պաքին ուղղահայաց ծողի համաչափության հարթությունը (նկ.10.9)-ում ներկայացված է կետագծերով) կոչվում է *նորմալ հարթություն*: ձկման ժամանակ նորմալ հարթությունից վեր ընկած մասերը ենթարկվում են սեղմման (ծզման) դեֆորմացիայի, իսկ հակառակ մասերը՝ ծզման (սեղմման) դեֆորմացիայի (նկ. 10.9բ,գ): Նորմալ հարթության գծալին չափսերը ձկման ընթացքում մնում են անփոփոխ: Ուրեմն, *ձկումը մարմնի մի մասում ներկայացնում է ծզման, իսկ մյուսում՝ սեղմման դեֆորմացիա*: Սա էլ ապացուցում է ձկման դեֆորմացիայի անհամասեռ լինելը:

Հուլի օրենքը ձկման փոքր դեֆորմացիաների դեպքում ներկայացվում է այսպես

$$F = k\lambda, \quad (75.6)$$

որտեղ F -ը դեֆորմացիա առաջացնող ուժն է, իսկ λ ձկման պաշը կախված է ծողի երկրաչափական ձևից, չափսերից, ինչպես նաև Յունգի մոդու-



Նկ 10.9 ա, բ, գ

ից: Վերջինս լիովին հասկանալի է. քանի որ ձկումը սեղմման և ծգման դեֆորմացիաների համակցություն է. Հաշվարկները ցույց են տալիս, որ նկ. 10.9-ում պատկերված ուղղանկյուն ծողի համար

$$\lambda = l^3 P / 4 E a b^3, \quad (75.7)$$

որտեղ P -ն ծողի կշիռն է, l -ը հենարանների միջև հեռավորությունը, իսկ նկ. 10.9գ դեպքում

$$\lambda_1 = 3l^3 P / 2 E a b^3, \quad (75.8)$$

որտեղ l -ը ծողի երկարությունն է: Այս բանաձևերում ենթադրվում է, որ ծողը ձկումը պայմանավորված է սեփական կշռով:

Եթե ծողի ազատ ծայրում կիրառված է F ձկող ուժ, ապա նրա առաջացրած ձկման պաշը կորոշվի հետևյալ բանաձևով.

$$\lambda_2 = 3l^3 F / E a b^3, \quad (75.9)$$

Համաձայն փոքր դեֆորմացիաների վերադրման սկզբունքի եթե ծողի վրա ազդում են մի քանի ձկող ուժեր, որոնք առանձին-առանձին առաջացնում են $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ձկման պաքներ, ապա արդյունաբար ձկման պաքը հավասար կլինի առանձին ձկման պաքների հանրահաշվական գումարին

$$\lambda = \sum \lambda_i, \quad (75.10)$$

ընդ որում, հակառակ ձկումներն ունեն տարբեր նշանի ձկման պաքներ:

3. Այժմ ցույց տանք, որ բացարձակ պինդ մարմնի մոտավորությամբ համակարգերի հավասարակշռության խնդիրների ստատիկորեն անորոշությունը վերանում է առածգական դեֆորմացիայի հաշվառմամբ: Նման անորոշության հետ առնչվել ենք § 44-ում երեք հենարանների վրա ծողի հավասարակշռությունը դիտարկելիս:

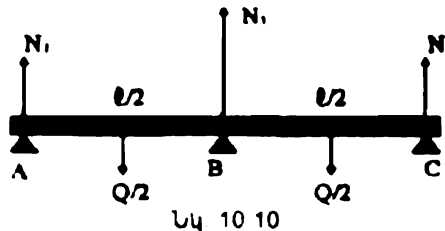
Քննարկենք նույն խնդիրը առածգական դեֆորմացիաների հաշվառմամբ: Որոշենք ուղղանկյուն ծողի Q կշռի բաշխումը երեք A, B, C հենարանների վրա (նկ. 10.10), որտեղ B հենարանը դրված է ծողի մեջտեղում

Համան կետերում ազդող ռեակցիայի ուժերը նշանակենք N_1 , N_2 , N_3 ։ Համաչափությունից ելնելով կարող ենք պնդել, որ $N_1 = N_3$ ։ Ստորվի ամրացնենք ծողը B կետերունից։ Խնդիրը հանգեցվում է նկ. 10.9a-ում պատկերված դեպքին։ N_2 ուժի ազդեցությամբ ծողի BC մասի C ծայրը կշեղվի վեր

$$\lambda_2 = \frac{4N_2}{Eab^3} \left(\frac{l}{2} \right)^3 \quad (75.11)$$

(75.11) չափով, իսկ սեփական Q/2 կշռի ազդեցությամբ նույն C կետը կշեղվի ցած

$$\lambda = \frac{3Q}{4Eab^3} \left(\frac{l}{2} \right)^3 \quad (75.12)$$



չափով։ Արդյունքում BC մասի ձկման սլաքը կլինի (դեպի վեր շեղումը)։

$$\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \quad (75.13)$$

Հաշվի առնելով նաև հավասարակշռության

$$2N_2 + N_3 = 0 \quad (75.14)$$

պայմանը, (75.11)–(75.13) առնչությունների օգնությամբ կստանանք.

$$N_1 = N_2 = \frac{3}{16} Q - \frac{2Eab^3}{l^3} \lambda, \quad N_3 = \frac{5}{8} Q - \frac{4Eab^3}{l^3} \lambda \quad (75.15)$$

Եթե բոլոր հենարանները գտնվում են միևնույն հորիզոնական մակարդակի վրա, ապա $\lambda = 0$, և (75.15)–ից կստանանք՝

$$N_1 = N_2 = \frac{3}{16} Q, \quad N_3 = \frac{5}{8} Q \quad (75.16)$$

Ստացված (75.15) արդյունքից հետևում է, որ ծողի կշռի բաշխումը երեք հենարանների վրա խիստ որոշակի է։ Ընդ որում հենարանների վրա ճնշման ուժերի արժեքները կախված են ծողի (խիստ ասած, նաև հենարանների, որոնք տվյալ դեպքում համարվեցին բացարձակ պինդ) առած-գական հատկություններից։

ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐ

Ուսումնասիրելով արտաքին պոտենցիալային ուժադաշտում մասնիկի շարժումը, §30-ում տեսանք, որ պոտենցիալային հորում այն ունի տատանումների բնույթ: Այսինքն՝ մասնիկը պարբերաբար կրկնում է իր շարժումը շրջման կետերով սահմանափակված տիրույթում: Նույն պարագրաֆում ցույց տվեցինք, որ մասնիկի տատանողական շարժումը հնարավոր է միայն կայուն հավասարակշռության դիրքի շուրջը, քանի որ այդ դիրքից մասնիկի շեղման դեպքում է առաջանում դեպի հավասարակշռության դիրքն ուղղված ուժ: Ընդհանուր դեպքում վերադարձնող ուժի կախվածությունը հավասարակշռության դիրքից մասնիկի շեղման չափից արտահայտվում է բարդ ֆունկցիաներով: Սակայն գործնական կարևորություններ կայացնող մի շարք կարևոր խնդիրներում մենք գործ ենք ունենում հավասարակշռության դիրքից մասնիկի փոքր շեղումների հետ:

Անկախ նրանից, թե ինչպիսին է վերադարձնող F ուժի կախվածությունը հավասարակշռության դիրքից մասնիկի շեղման x չափից, այն միշտ կարելի է ներկայացնել ըստ x -ի աստիճանների *Թեյլորի շարքով*

$$F_x = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{2} F''(0) + \frac{x^3}{6} F'''(0) + \dots, \quad (76.1)$$

որտեղ շտրիկները նշանակում են ըստ x -ի ածանցյալներ:

Քանի որ հավասարակշռության $x=0$ դիրքում մասնիկի վրա ուժ չի ազդում, ապա $F(0)=0$: Անվերջ փոքր շեղումների դեպքում (76.1) շարքի հիմնական անդամը $xF'(0)$ -ն է: Յուրաքանչյուր հաջորդ անդամ իր մեծությամբ անհամեմատ փոքր է նախորդից: Եթե պարզվի, որ $F'(0) \neq 0$, ապա անհրաժեշտ է վերցնել շարքի մյուս անդամը:

§76. ՆԵՐՈՒՇԵՆԱԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐ

Կայուն հավասարակշռության դիրքից անվերջ փոքր շեղման դեպքում $F'(0) = -k < 0$, քանի որ վերադարձնող ուժն ուղղված է շեղմանը հակառակ.

$$F(x) = -kx: \quad (76.2)$$

Այստեղ k գործակիցը համակարգի ֆիզիկական պարամետրերից կախված հաստատուն է և բնութագրում է հավասարակշռության վիճակը: Ստացված (76.2) ուժն արտաքինապես համընկնում է առածգականության ուժի արտահայտության հետ և ի հայտ է գալիս ֆիզիկայի բազմազան խնդիրներում: Այն կոչվում է *բվազիառածգական ուժ*:

Բվազիառածգական ուժի ազդեցությամբ m զանգվածով նյութական կետի շարժումը նկարագրվում է

$$m\ddot{x} = -kx \quad (76.3)$$

հավասարումով, որը կոչվում է *ներդաշնակ տատանումների հավասարում*: Նման փոքր տատանումներ կատարող համակարգը կոչվում է *զծախն օսցիլատոր*, որի օրինակներ են մաթեմատիկական և ֆիզիկական ճոճանակները, զսպանակից կախված մարմինը և այլն:

Ստանանք (76.3)-ի ընդհանուր լուծումը, ենթադրելով որ $t = 0$ պահին

$$x(0) = x_0; \quad v(0) = v_0: \quad (76.4)$$

Կատարենք նշանակում.

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (76.5)$$

և օգտվելով

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

ձևավորությունից, (76.3)-ը ներկայացնենք այսպես՝

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -\omega_0^2 x,$$

որն ինտեգրելով ըստ x -ի, կստանանք՝

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \omega_0^2 (A^2 - x^2),$$

որտեղից՝

$$\varphi + \omega_0 t = \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{A}:$$

Ստացված արդյունքից հետևում է մասնիկի շարժման օրենքը

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \varphi), \quad (76.6)$$

որտեղ A -ն և φ -ն անորոշ ինտեգրման հաստատուններ են: Օգտվելով սկզբնական (76.4) պայմաններից, հաշվի առնելով մասնիկի արագության փոփոխման օրենքը,

$$v(t) = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t - \varphi). \quad (76.7)$$

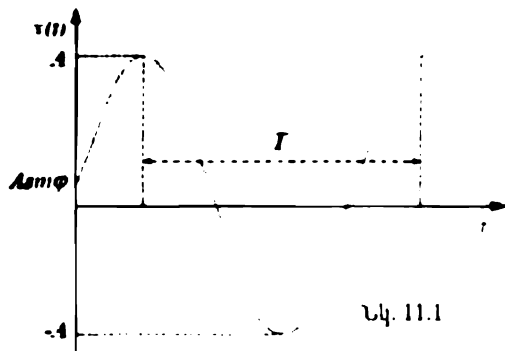
կատանանք՝

$$x_0 = A \sin \varphi, \quad v_0 = A\omega_0 \cos \varphi,$$

որտեղից ինտեգրման հաստատունների համար կունենանք՝

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = v_0 / \omega_0 x_0. \quad (76.8)$$

(76.6) օրենքով տրվող շարժումը կոչվում է *ներդաշնակ տատանում*: որը գրաֆիկորեն պատկերված է նկ. 11.1 -ում: A մեծությունը կոչվում է



Նկ. 11.1

տատանման լայնույթ (ամպլիտուդ), ω_0 -ն շրջանափու հաճախություն, $\omega_0 t + \varphi$ -ն տատանման փուլ, որի արժեքը $t=0$ պահին - սկզբնական փուլ (φ): Քանի որ սինուսը պարբերական ֆունկցիա է, ապա որոշակի T ժամանակ անց շարժումը կկրկնվի, այսինքն.

$$x(t) = x(t + T):$$

(76.6)-ի հաշվառմամբ վերջինս տալիս է

$$\omega_0 T = 2\pi: \quad T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{m/k}: \quad (76.9)$$

T -ն մեկ լրիվ տատանման ժամանակն է և կոչվում է տատանման պարբերություն: *Ներդաշնակ տատանման պարբերությունն անկախ է տատանման լայնույթից* (տատանումների իզոքրոնության հատկություն):

Միավոր ժամանակում տատանումների թիվը կլինի

$$\nu = 1/T, \quad (76.10)$$

որը կոչվում է *գծային հաճախություն* և շրջանափու հաճախության հետ կապված է

$$\omega_0 = 2\pi\nu \quad (76.11)$$

առնչությամբ: Վերջինից հետևում է, որ ω_0 -ն 2π վայրկյանում տատանումների թիվն է:

Ներդաշնակ տատանումներ կատարող մարմնի լրիվ մեխանիկական էներգիան ժամանակի կամայական պահին հավասար է քվադրատաձևական ուժի աշխատանքով պայմանավորված $\frac{1}{2}kx^2$ պոտենցիալ և մասնիկի կինետիկ էներգիաների գումարին:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = const, \quad (76.12)$$

որտեղ օգտվեցինք (76.5), (76.6) և (76.7) առնչություններից: Ստացվածը էներգիայի պահպանման օրենքն է օսցիլատորի համար, քանի որ ներդաշնակ տատանումները ստացվում են դիսիպատիվ ուժերի բացակայության դեպքում:

Առավելագույն շեղման վիճակում օսցիլատորի կինետիկ էներգիան զրո է, իսկ լրիվ մեխանիկական էներգիան հավասար է պոտենցիալ էներգիային: Հավասարակշռության դիրքով անցնելիս օսցիլատորը բնութագրվում է լրիվ էներգիային հավասար կինետիկ էներգիայով:

Համակարգի կայուն հավասարակշռության դիրքից սկզբնական շեղմամբ առաջացած տատանումները կոչվում են *սեփական տատանումներ*: Սեփական տատանումների ω_0 հաճախությունը կախված է համակարգի կայուն հավասարակշռության վիճակը բնութագրող ֆիզիկական մեծություններից:

Ներդաշնակ տատանումները հարմար է ներկայացնել *կոմպլեքս* տեսքով, օգտվելով *էլեքտրի բանաձևից*

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (i^2 = -1): \quad (76.13)$$

Ուրեմն (76.6) ներդաշնակ տատանումը կարելի է ներկայացնել որպես (76.13) կոմպլեքս մեծության իրական մաս:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{i(\omega_0 t + \varphi)} \right\}. \quad (76.14)$$

որտեղ φ , սկզբնական փուլը (76.6) լուծման սկզբնական φ փուլից տարբերվում է $\pi/2$ -ով: Սովորաբար հաշվարկներ կատարելիս հարմար է լուծումը ներկայացնել

$$x(t) = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)} \quad (76.15)$$

կոմպլեքս տեսքով և միայն վեցնական արտահայտության մեջ առանձնացնել լուծման իրական մասը

Ներդաշնակ տատանումները (76.15) տեսքով ներկայացնելը հարմար է նրանց վերադրման, տատանողական շարժմանը վերաբերող տարբեր հավասարումներ լուծելիս:

Ապացուցված է, որ մեզ հանդիպող բոլոր բարդ տատանումները կարելի է ներկայացնել տարբեր հաճախություններ, սկզբնական փուլեր և լայնություններ ունեցող ներդաշնակ տատանումների վերադրման տեսքով (Ֆուրիեի թեորեմ): Այս փաստը թույլ է տալիս սահմանափակվել ներդաշնակ տատանումների ուսումնասիրությամբ

§77. ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐ

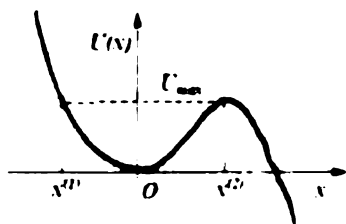
Համակարգի սեփական տատանումները կարող են լինել ինչպես ներդաշնակ, այնպես էլ ոչ ներդաշնակ եթե հավասարակշռության դիրքից մասնիկի շեղումը փոքր է, բայց վերջավոր, ապա (76.1) շարքում անհրաժեշտ է հաշվի առնել նաև x^2 կարգի անդամը: Այդ դեպքում մասնիկի շարժման հավասարումը կներկայացնենք այսպես:

$$m\ddot{x} = -dU/dx, \quad (77.1)$$

որտեղ

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}(1 - \varepsilon x), \quad (77.2)$$

$$\varepsilon = F'''(0)/3k \quad (77.3)$$



Նկ. 11.2

Հավասարակշռության դիրքից շեղման քառակուսային և ավելի բարձր կարգի անդամներ պարունակող հավասարումներով նկարագրվող տատանումները կոչվում են ոչ գծային: Ոչ գծային տատանումներ կատարող համակարգը կոչվում է ոչ գծային կամ ոչ ներդաշնակ օսցիլատոր: Նկատում ենք, որ ոչ գծային օսցիլատորը շարժման ուսումնասիրությունը հանգեցվում է (77.2) պոտենցիալով արտաքին դաշտում մասնիկի շարժման խնդրին:

Կախված (77.2) -ում ε պարամետրի արժեքից, $U(x)$ ֆունկցիայի շեղումը պարաբոլից կլինի տարբեր: Ընդհանուր դեպքում այդ ֆունկցիայի տեսքը ներկայացված է Նկ 11.2-ում: Այն զրո է դառնում $x'' = 1/\varepsilon$ կետում և ունի մաքսիմում

$$U_{\text{max}} = 2k/27\varepsilon^2. \quad (77.4)$$

$x^{(2)} = 2x^{(0)}/3$ կետում:

Օգտվելով արտաքին պոտենցիալային ուժադաշտում մասնիկի շարժման վերաբերյալ §30-ում ստացված արդյունքներից, կարող ենք պնդել, որ E էներգիայով մասնիկը կկատարի ֆինիտ շարժում, այսինքն տատանումներ, եթե $0 < E < U_{\text{max}}$: Ընդ որում նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում ոչ գծային տատանումներ կատարող մասնիկի հավասարակշռության դիրքից տարբեր կողմեր $x^{(1)}$ և $x^{(2)}$ (օրինակ, $E = U_{\text{max}}$ դեպքում) շեղումները տարբեր են: Այդ տարբերությունը կախված է $U(x)$ պոտենցիալի տեսքից և մասնիկի լրիվ էներգիայի արժեքից:

Ոչ գծային օսցիլատորի շարժման $x(t)$ օրենքը ε -ի կամայական արժեքների դեպքում արտահայտվում է բարդ հատուկ ֆունկցիաների միջոցով: Սակայն ε -ի փոքր արժեքների դեպքում, երբ $x^{(0)}$ -ն բավականաչափ մեծ է, $|x| \ll x_0$ տիրույթում (փոքր էներգիաների՝ $E \ll U_{\text{max}}$ համար) մասնիկի շարժման հավասարման մեջ ոչ գծային անդամը կարելի է համարել խոտորում և օգտվել խոտորումների տեսությունից:

Օգտվելով (76.5), (77.2)-ից, ներկայացնենք (77.1) հավասարումը, հետևյալ տեսքով.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0^2 x^2: \quad (77.5)$$

Օսցիլատորի շարժումը $\varepsilon = 0$ դեպքում տրվում է ներդաշնակության

$$x_0(t) = A_0 \sin \omega_0 t \quad (77.6)$$

օրենքով, որը ներկայացնում է չխոտորված շարժումը: Եթե $\varepsilon \neq 0$, ապա (77.5)-ում աջ մասը կդիտենք որպես (77.6) շարժման խոտորում և մասնիկի շարժման օրենքը կներկայացնենք

$$x(t) = A_0 \sin \omega_0 t + x_1(t) \quad (77.7)$$

տեսքով, որտեղ $|x_1| \ll A_0$ և ներկայացնում է շարժման շեղումը ներդաշնակության օրենքից:

Տեղադրելով (77.7)-ը (77.5)-ում, x_1 -ի համար կստանանք հետևյալ հավասարումը՝

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \varepsilon \omega_0^2 (A_0^2 \sin^2 \omega_0 t + 2A_0 x_1 \sin \omega_0 t + x_1^2),$$

որի աջ մասի փակագծում վերջին երկու անդամները, շնորհիվ $|x_1| \ll A_0$ պայմանի, կարելի է անտեսել առաջինի նկատմամբ: Ներկայացնենք այդ հավասարումն այսպես

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0^2 A_0^2 (1 - \cos 2\omega_0 t), \quad (77.8)$$

իսկ վերջինիս լուծումը

$$x_1(t) = a_1 + b_1 \cos 2\omega_0 t \quad (77.9)$$

տեսքով, որտեղ a_1, b_1 մեծությունները հաստատուններ են. Տեղադրելով (77.9)-ը (77.8)-ում և հավասարեցնելով ստացված առնչության մեջ աջ և ձախ մասերում $\cos 2\omega_0 t$ -ի գործակիցները և ազատ անդամները, կստանանք

$$b_1 = \varepsilon A_0^2 / 6; \quad a_1 = \varepsilon A_0^2 / 2: \quad (77.10)$$

Ուրեմն ոչ գծային տատանումների համար ստացվում է հետևյալ չարժման օրենքը.

$$x(t) = A_0 \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon A_0^2 \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t \right): \quad (77.11)$$

Այստեղ $\varepsilon A_0^2 / 2$ հաստատուն գումարելին X առանցքի դրական և բացասական ուղղություններով մասնիկի առավելագույն շեղման անհամաչափության պատճառն է: Ոչ գծային տատանման (77.11) օրենքի առավել կարևոր առանձնահատկությունը կայանում է $2\omega_0$ հաճախությամբ չարժման ավելացումը: Այդ չարժումը ներկայացվում է $\cos 2\omega_0 t$ պարունակող անդամը, որը կոչվում է *երկրորդ հարմոնիկ*:

Պարզվում է, որ (77.5)-ում x^1, x^4 կարգի անդամների հաշվառումը բերում է (77.11)-ում $3\omega_0, 4\omega_0$ հաճախության հարմոնիկների առաջացմանը: Այնպես որ *ոչ գծայնությունը հանգեցնում է տատանումներում բարձր կարգի հարմոնիկների առաջացմանը*: Ղա, թերևս, ոչ գծայնության առավել էական բնութագիրն է:

1. **Գծային տատանումներ:** Իներցիայի կենտրոնով չանցնող հորիզոնական առանցքից կախված պինդ մարմինը կոչվում է ֆիզիկական ճոճանակ (նկ.11.3): Հորիզոնական առանցքի հետ ճոճանակի իներցիայի կենտրոնով անցնող ուղղաձիգի հատման կետը կոչվում է ճոճանակի կախման կետ (4): ճոճանակի դիրքը ժամանակի ցանկացած պահին կարելի է բնութագրել հավասարակշռության դիրքից ճոճանակի AC առանցքի շեղման φ անկյունով (նկ. 11.3): A կետով անցնող, նկարի հարթության ուղղահայաց հորիզոնական առանցքի նկատմամբ մոմենտների հավասարումը ֆիզիկական ճոճանակի համար ունի հետևյալ տեսքը

$$I_A \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgb \sin \varphi, \quad (78.1)$$

որտեղ I_A -ն ճոճանակի իներցիայի մոմենտն է A կետով անցնող առանցքի նկատմամբ, b -ն իներցիայի C կենտրոնի հեռավորությունն է կախման կետից: Մինուս նշանը ցույց է տալիս, որ ժանրության ուժի մոմենտն առաջացնում է շեղման φ անկյան աճի ուղղությանը հակառակ պտույտ:

Կերտծելով $\sin \varphi$ ֆունկցիան թեքորի շարքի և սահմանափակվելով գծային անդամով, (78.1)-ը կներկայացնենք (76.3) տեսքով.

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (78.2)$$

որտեղ

$$\omega_0^2 = mgb / I_A \quad (78.3)$$

Որեմն, ֆիզիկական ճոճանակի շխտորված շարժումը ներկայացնում է ներդաշնակ տատանում

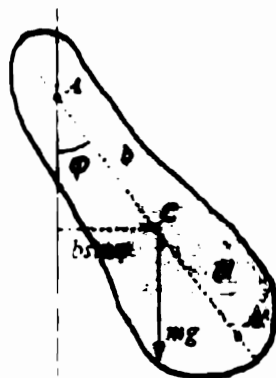
$$T_0 = 2\pi \sqrt{I_A / mgb} \quad (78.4)$$

պարբերությամբ:

Օգտվելով Շտեյնեթի թեորեմից

$$I_A = I_C + mb^2,$$

ֆիզիկական ճոճանակի տատանումների պարբերության համար կստա-



Նկ. 11.3

$$T_c = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb} + \frac{b}{g}} \quad (78.5)$$

Կատարված բոլոր դաստոգությունները ճիշտ են նաև այն դեպքում, երբ A կետից I երկարությամբ թելից կախված է m զանգվածով մասնիկ: Դա մաթեմատիկական ճոճանակն է, որի համար $I_A = mL^2$, և նրա պարբերության համար (78.4) բանաձևից ստանում ենք

$$T_A = 2\pi \sqrt{L/g} \quad (78.6)$$

Ֆիզիկական և մաթեմատիկական ճոճանակների պարբերության բանաձևերի համեմատությունը ցույց է տալիս, որ մաթեմատիկական ճոճանակը, որի երկարությունը հավասար է ֆիզիկական ճոճանակի b երկարությանը, ունի ավելի փոքր պարբերություն: *Մաթեմատիկական ճոճանակի այն երկարությունը, որի դեպքում նրա պարբերությունը հավասար է ֆիզիկական ճոճանակի պարբերությանը, կոչվում է ֆիզիկական ճոճանակի բերված երկարություն:* Հավասարեցնելով (78.5) և (78.6) պարբերությունները, կստանանք՝

$$l = b' + I_c / mb \quad (78.7)$$

Ճոճանակի առանցքի վրա A' կետը, որը հեռացված է կախման կետից ճոճանակի բերված երկարության չափով, կոչվում է *տատանումների կենտրոն*: Եթե ճոճանակի զանգվածը կենտրոնացնենք նրա տատանումների կենտրոնում, ապա տատանումների պարբերությունը չի փոխվի ճոճանակի կախման կետը և տատանումների կենտրոնը *համալուծ* կետեր են: Դա նշանակում է, որ եթե ճոճանակը կախենք A' տատանումների կենտրոնով անցնող հորիզոնական առանցքից, ապա դրանից նրա պարբերությունը չի փոխվի, ընդ որում այդ դեպքում A կետը կհանդիսանա տատանումների կենտրոն: Ապացուցենք այդ: Նշանակենք նոր դիրքում կախման A' կետից C կետի հեռավորությունը l' : Նրա բերված երկարության համար կգրենք՝

$$l' = b + I_c / mb' \quad (78.8)$$

Բայց $b' = l - b$, որը համաձայն (78.7)–ի $b' = l - mb$: Տեղադրելով այն (78.8)–ում, կստանանք՝

$$l' = b + I_c / mb,$$

այսինքն ($\dot{\varphi} = \dot{\varphi}$)։ Ուրեմն, նոր դիրքում ճոճանակն ունի նույն բերված երկարությունը և հետևաբար, նույն պարբերությունը։ Այս իմաստով ասում են, որ ֆիզիկական ճոճանակը *շրջելի է* (*Հյուգենսի թեորեմ*)։ Ֆիզիկական ճոճանակի այս հատկությունը հնարավորություն է տալիս փորձնականորեն մեծ ճշտությամբ որոշել ազատ անկման արագացումը։

2. Ոչ գծային տատանումներ։ Եթե ֆիզիկական և մաթեմատիկական ճոճանակների հավասարակշռության դիրքից շեղումները շատ փոքր չեն, ապա անհրաժեշտ է հաշվի առնել (78.2) հավասարման մեջ $\sin \varphi$ ֆունկցիայի շարքի մյուս անդամները։ Տվյալ դեպքում հարմար է խնդրի լուծումը սկսել ճշգրիտ

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \sin \varphi \quad (78.9)$$

հավասարումն ինտեգրելուց՝ օգտվելով (76.5) ձևափոխությունից.

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega_0^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \quad (78.10)$$

որտեղ հաշվի են առնված հետևյալ սկզբնական պայմանները՝

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0: \quad (78.11)$$

Ինտեգրելով (78.10)-ը կստանանք

$$\sqrt{2}\omega_0 t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi/2) - \sin^2(\varphi_0/2)}},$$

որտեղ օգտվեցինք $\cos \varphi = 1 - \sin^2(\varphi/2)$ բանաձևից։ Անցնելով նոր փոփոխականի.

$$\sin \theta = \sin(\varphi/2) \sin(\varphi_0/2), \quad (\varphi \leq \varphi_0), \quad (78.12)$$

վերջին ինտեգրալը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\omega_0 t = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_0/2) \sin^2 \theta}}.$$

Ստացվածը կոչվում է *էլիպսական ինտեգրալ*, որը հաշվված է շեղման ցանկացած α անկյան դեպքում։ Սակայն շեղման ոչ շատ մեծ անկյունների դեպքում երբ $\sin^2(\varphi_0/2) \ll 1$, կարելի է (78.13)-ում արմատը շարքի վերածել և սահմանափակվել առաջին երկու անդամներով.

$$\begin{aligned} \omega_0 t &= \int_0^\varphi (1 + \frac{1}{2} \sin^2(\varphi_0/2) \sin^2 \theta + \dots) d\theta = \\ &= \alpha + \frac{1}{4} \sin^2(\varphi_0/2) (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) + \dots, \end{aligned} \quad (78.13)$$

որտեղ $\sin \alpha$ -ն տրվում է (78.12)-ով: Այդտեղից հետևում է, որ երբ ϕ -ն փոփոխվում է 0 -ից ϕ_0 այսինքն անցնում է տատանման T պարբերության 1.4 մասը, α անկյունը փոփոխվում է 0-ից $\pi/2$: Այդ դեպքում (78.14)-ից ստանում ենք

$$\omega_0 \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \dots \right), \quad (78.14)$$

որտեղից՝

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 (\phi_0 / 2) + \dots \right); \quad (78.15)$$

Այստեղ T_0 -ն փոքր տատանումների պարբերությունն է $T_0 = 2\pi/\omega_0$: Ճոճանակի ոչ գծային տատանումների պարբերության համար ստացված բանաձևից հետևում է, որ այս դեպքում խախտվում է տատանումների իզոքրոնայությունը (T -ն կախված է ճոճանակի շեղման լայնությանից ϕ_0 , անկյունից):

Օգտվելով (78.15) բանաձևից՝ կարելի է պարզել, թե ինչ սխալ ենք կատարում ճոճանակի տատանումների պարբերությունը (78.4) բանաձևով որոշելիս: Օրինակ, $\phi_0 = 60^\circ$ դեպքում ստանում ենք

$$(T - T_0)/T_0 = 1/16 = 0.0625 \quad (78.16)$$

Այսինքն՝ նույնիսկ նման մեծ անկյուններով շեղման դեպքում ներդաշնակ տատանումների (78.4) պարբերությունից օգտվելիս հարաբերական սխալը կազմում է մոտ 6%: Ուրեմն ֆիզիկական և մաթեմատիկական ճոճանակների ներդաշնակ տատանումների բանաձևերը բավականաչափ ճիշտ արդյունքներ են տալիս ոչ միայն փոքր, այլ նաև չափավոր անկյուններով շեղումների դեպքում:

§79. ՄԱՐՈՂ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐ

Սեփական տատանումների ուսումնասիրության ժամանակ ենթադրվում է, որ արտաքին միջավայրը բացակայում է: Վերջինիս առկայությունը բերում է դիսիպատիվ ուժի առաջացմանը, որն աստիճանաբար փոքրացնում է համակարգին սկզբնապես հաղորդված էներգիան: Ղա արտահայտվում է տատանումների սեփական ω_0 հաճախության փոքրացմամբ, ինչպես նաև լայնության աստիճանական նվազմամբ:

Դիցուք, տատանվող մարմնի վրա ազդում է թաց շփման $-k \cdot v$ ուժը Մասնիկի շարժման հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (79.1)$$

որտեղ

$$\gamma = k_1/2m, \quad \omega_0^2 = k_2/m:$$

Փնտրենք (79.1) հավասարման լուծումը հետևյալ տեսքով.

$$x(t) = A_0 e^{-\alpha t} \quad (79.2)$$

Տեղադրելով վերջինիս (79.1)-ում, կստանանք

$$(\omega_0^2 - 2i\gamma\alpha - \alpha^2) A_0 e^{-\alpha t} = 0. \quad (79.3)$$

Քանի որ ստացվածը ճիշտ է ժամանակի ցանկացած պահին, ապա զրո է փակագծի արտահայտությունը. վերջինս α անհայտ մեծության համար տալիս է.

$$\alpha = i\gamma \pm \omega, \quad (79.4)$$

որտեղ

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (79.5)$$

Հաշվի առնելով (79.4)-ը, (79.2) լուծումը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}): \quad (79.6)$$

Ստացված շարժման օրենքը ներկայացնում է *մարող տատանում* որտեղ A_1 և A_2 -ը սկզբնական պայմաններից որոշվող հաստատուններ են:

Կախված γ գործակցի և սեփական ω_0 հաճախության հարաբերակցությունից, մարումը լինում է *պարբերական* կամ *ոչ պարբերական*.

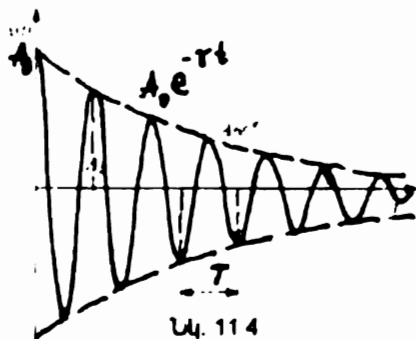
Պարբերական մարում: Սա տեղի ունի ոչ մեծ մարումների դեպքում

$$\gamma < \omega_0, \quad (79.7)$$

եղբ (79.5) մեծությունը իրական է. Այս դեպքում (79.6) լուծումը կարտահայտվի (իրական տեսքով)՝

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (79.8)$$

Քանաձևով: Գրաֆիկորեն այս տատանումը ներկայացված է նկ.11.4-ում, որը հաստատուն ω հաճախությամբ, բայց ժամանակի ընթացքում նվազող լայնությամբ տատանում է: Այս իմաստով այն ոչ միայն ներդաշնակ չէ, այլ նույնիսկ պարբերական տատանում էլ չէ, քանի որ տատանումները նույնությամբ չեն կրկնվում: Այնուամենայնիվ, այս տատանման պարբերություն է համարվում



$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (79.9)$$

ժամանակը:

Մարող տատանման լայնույթ ասելով հասկանում են

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \quad (79.10)$$

մեծությունը, որը

$$\gamma = 1/\tau \quad (79.11)$$

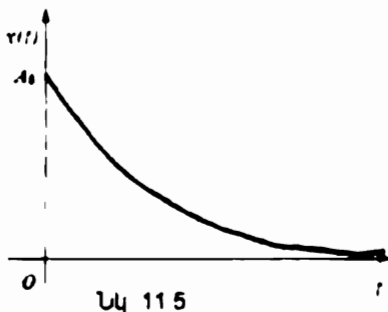
ժամանակում նվազում է e անգամ Վերջինս կոչվում է մարման ժամանակ իսկա մարման դեկրեմենտ:

Մարման առավել ընդունակ բնութագիր է մարման լոգարիթմական դեկրեմենտը, որը տատանումների (79.9) պարբերության հարաբերությունն է մարման (79.11) ժամանակին.

$$\theta = \frac{T}{\tau} = \gamma T \quad (79.12)$$

Չեչտ է նկատել, որ մարման լոգարիթմական դեկրեմենտը՝ երկու հաջորդական տատանումների լայնույթների հարաբերության բնական լոգարիթմն է (նկ. 11.4).

$$\theta = \ln \frac{A}{A_0} = \ln \frac{A_0 e^{-\gamma t}}{A_0 e^{-\gamma(t-T)}} = \ln e^{-\gamma T} = -\gamma T \quad (79.13)$$



Որոշենք տատանումների N թիվը, որի ընթացքում մարող տատանումների լայնույթը նվազում է $e \approx 2.7$ անգամ

$$\frac{A_{N+1}}{A_1} = e^{-\gamma(N+1)} = e^{-N\theta} = e^{-1}.$$

որտեղից հետևում է.

$$N\theta = 1 \quad (79.14)$$

Փորձնականորեն մարման լոգարիթմական դեկրեմենտը որոշվում է հաշվելով համապատասխան N տատանումների թիվը:

Ոչ պարբերական մարում: Մեծ մարումների դեպքում

$$\gamma > \omega_0 \quad (79.15)$$

(79.5) մեծությունը դառնում է կեղծ: Այդ դեպքում հարմար է (79.4)-ը ներկայացնել այսպես

$$\alpha = i\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\delta_1, \quad (79.16)$$

որտեղ

$$\delta_1 = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} :$$

Դիտարկվող դեպքում (79.2) լուծումը կընդունի

$$x(t) = A_1 e^{-\delta_1 t} + A_2 e^{-\delta_2 t}$$

տեսքը, որը չի նկարագրում տատանում, այլ ներկայացնում է հավասարակշռության դիրքից շեղման էքսպոնենտալին նվազում (նկ.11.5): Ճոճանակի ոչ պարբերական մարումը կարելի է դիտել, ընկղմելով այն խիստ մածուցիկ հեղուկի մեջ (գլիցերին, մեղր):

Ոչ պարբերական մարման հատուկ դեպք է $\gamma = \omega_0$ -ն: Այս դեպքում (79.1) հավասարման լուծումը տրվում է հետևյալ տեսքով.

$$x(t) = (A + At)e^{-\omega_0 t} :$$

§80. ՀԱՐԿԱԴՐԱԿԱՆ ՏՄՏԱՆՈՒՄՆԵՐ

Արտաքին հարկադրող ուժի ազդեցությամբ մասնիկի տատանումները կոչվում են *հարկադրական տատանումներ*: Առավել կարևոր գործնական և տեսական նշանակություն ունեն արտաքին ներդաշնակ ուժով առաջացող հարկադրական տատանումները:

Ներկայացնենք հարկադրող ուժը

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad (80.1)$$

տեսքով, որտեղ F_0 -ն հարկադրող ուժի լայնույթն է, ω -ն՝ հաճախությունը: Շարժման հավասարումը (79.1)-ի փոխարեն այս դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}, \quad (80.2)$$

որտեղ հարկադրող ուժը ներկայացված է կոմպլեքս տեսքով: Սա *գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում* է, որի ընդհանուր լուծումը ներկայացնում է նրա մասնակի և համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր (79.8) լուծումների գումարը.

Ներկայացնենք (80.2) հավասարման մասնակի լուծումը

$$x(t) = Ae^{i\omega t} \quad (80.3)$$

տեսքով, որտեղ A հաստատունը կարող է լինել կոմպլեքս մեծություն:

Տեղադրելով (80.3)-ը (80.2) հավասարման մեջ, կստանանք

$$(\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2) Ae^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (80.4)$$

Ժամանակի ցանկացած պահին այս հավասարությունը բավարարելու համար անհրաժեշտ է տեղադրել $\omega = \omega_0$: Այդ դեպքում

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (80.5)$$

որը ներկայացնելով կոմպլեքս տեսքով, կստանանք

$$A = A_0 e^{i\varphi} \quad (80.6)$$

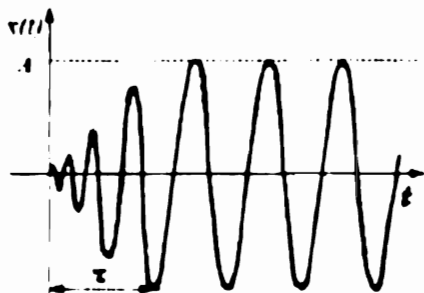
որտեղ

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= F_0 / m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\ \varphi &= \arctg 2\gamma\omega / \omega_0^2 - \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (80.7)$$

Հաշվի առնելով (80.6), (80.3), (80.8) և (79.3) արտահայտությունները հարկադրական տատանումներ կատարող մասնիկի շարժման օրենքը կներկայացնենք այսպես.

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) + A_1 e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t + \varphi_1) \quad (80.8)$$

Նկ.11.6-ում պատկերված է (80.8) կախվածությունն արտահայտող գրաֆիկը:



Նկ.11.6

Այն կարելի է բաժանել երկու էապես տարբեր մասերի: Առաջինը նկարագրում է հարկադրական տատանումների կայունացման փուլը և կոչվում է ափսոսանքի ռեժիմ (տե՛ս նկ. 11.6-ում): Այս ընթացքում (80.8) ում մարդ տատանումներ նկարագրող երկրորդ անդամի դեր էական է և մասնիկի շարժման

ընթացքը կախված է հարկադրող ուժի կիրառման պահին շարժման սկզբնական պայմաններից: Սակայն ժամանակի ընթացքում մասնիկ

շարժման վրա սկզբնական պայմանների ազդեցությունը վերանում է (մա-
րող տատանումների անդամը արագ նվազելով դառնում է զրո) և շարժու-
մը կայունանալով նկարագրվում է

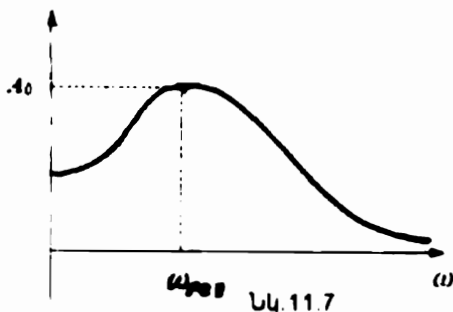
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (80.9)$$

օրենքով: Անցումային ռեժիմի տևողությունը մարման ժամանակի՝ $\tau = 1/\gamma$,
կարգի մեծություն է: Սովորաբար *հարկադրական տատանումներ առելով*
նկատի ունեն հենց (80.9) ներդաշնակ տատանումները, որոնք կատար-
վում են *հարկադրող ուժի հաճախությամբ*:

Ռեզոնանս: Ուսումնասի-
րենք հարկադրական տատա-
նումների լայնության և սկզբնա-
կան փուլի կախվածությունը
հարկադրող ուժի ω հաճախու-
թյունից: Դրանցից առաջինը
պատկերված է նկ. 11.7-ում:

Հաճախության

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$



արժեքի դեպքում, որն ստացվում է $dA/d\omega = 0$ պայմանից, տատանում-
ների լայնությունն ցնդում է իր առավելագույն արժեքը: Գործնական կա-
ռուկություն ներկայացնող համակարգերի համար դիսիպացիան փոքր է,
 $\omega_0 \gg \gamma$: Այդ դեպքում

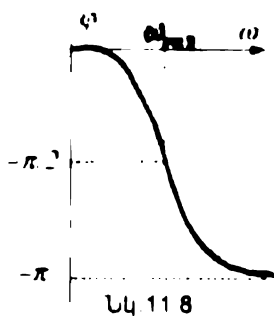
$$\omega_{\text{res}} \approx \omega_0; A_0^{\text{res}} \approx F_0/2\gamma m \omega_0: \quad (80.10)$$

Հարկադրական տատանումների լայնության կտրուկ աճը ω_0 հաճա-
խության դեպքում կոչվում է *ռեզոնանս*: Համապատասխան (80.10) մեծու-
թյունները կոչվում են *ռեզոնանսային*:

Ռեզոնանսի ժամանակ մասնիկի արագացումը պայմանավորված է
(փոքր դիսիպացիայի դեպքում) առաձգականության ուժով. $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$: Այդ
դեպքում (80.2)-ից ստացվում է ռեզոնանսային լայնության (80.10) արժեքը:
Զույլ մարման ($\omega_0 \gg \gamma$) և փոքր հաճախությամբ ($\omega \ll \omega_0$) հարկադրական
տատանումների համար ստանում ենք

$$A_0 \approx F_0/m\omega_0^2, \quad (80.11)$$

քանի որ այս դեպքում (80.2) հավասարման մեջ հիմնական անդամներն են
առաձգականության և հարկադրող ուժերը: (80.11)-ը փաստորեն հաստա-



տուն ուժի ազդեցությամբ տատանումների լայնությամբ է:

Մեծ հաճախությամբ ($\omega \gg \omega_0$) հարկադրող ուժի դեպքում տատանումների լայնությունը խիստ նվազում է: Դա հասկանալի է. Իներտության շնորհիվ մասնիկը «չի հասցնում հետևել» արտաքին ուժի արագ փոփոխությանը: Այս դեպքում տատանումների լայնությունը՝

$$A_0^0 \approx F_0 / m\omega^2. \quad (80.12)$$

նվազում է հարկադրող ուժի հաճախության քառակուսուն հակադարձ համեմատական օրենքով

Հարկադրական տատանումներ կատարող համակարգի կարևոր ֆիզիկական բնութագիր է *բարորակություն* կոչվող մեծությունը: Այն ռեզոնանսային լայնության հարաբերությունն է հաստատուն ուժի ազդեցությամբ տատանումների լայնության:

$$Q = \frac{A_0^{\max}}{A_0^0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{\theta}. \quad (80.13)$$

որտեղ θ -ն մարման լոգարիթմական դեկրեմենտն է:

Քննարկենք հարկադրական տատանումների φ սկզբնական փուլի կախումը ω հաճախությունից: Զանի որ արտաքին ուժի տատանումները մասնիկի հարկադրական (80.9) տատանումներից տարբերվում են $\varphi < 0$ -ով, ապա մասնիկի տատանումները հետ են ընկած հարկադրող ուժի տատանումներից: Նկ.11.8-ում ներկայացված է $\varphi(\omega)$ կախվածությունը (տե՛ս 80.7 բանաձևը): Բավականաչափ փոքր ω -ով տատանումների դեպքում φ -ն փոքր է: Այսինքն, մասնիկի տատանումները շատ քիչ են հետ ընկնում հարկադրող ուժի տատանումներից:

Ռեզոնանսի դեպքում, $\varphi = -\pi/2$. Զանի որ մասնիկի արագության և շեղման տատանումները նույնպես տարբերվում են $\pi/2$ փուլով, ապա ռեզոնանսի ժամանակ հարկադրող ուժը և մասնիկի արագությունը տատանվում են միևնույն փուլում. Հետևաբար արտաքին ուժի աշխատանքը ռեզոնանսի ժամանակ առավելագույնն է: Այդ է պատճառը, որ համակարգը ռեզոնանսի ժամանակ արտաքին աղբյուրից կարող է ընդունել էներգիայի ցանկացած քանակ: Մեծ հաճախությունների ($\omega \gg \omega_0$) դեպքում մասնիկի տատանումները արտաքին հարկադրող ուժի տատանումներից ետ են ընկնում $\varphi = -\pi$ փուլով, փաստորեն տատանվում են հակափուլում: Այդ պատճառով տատանումները վերանում են:

ԶԱՐԿԵՐ

1. Փոխադրականաց տատանումների գումարումը: Դիտարկենք Այ 11.9-ում պատկերված զսպանակներով ամրացված զնդիկի տատանումները հորիզոնական XY հարթության մեջ: Այն կարող է կատարել երկու անկախ շեղումներ x և y առանցքներով, հետևաբար օժտված է երկու ազատության աստիճանով: Շեղումները կհամարենք այնքան փոքր, որ զնդիկի որևէ առանցքով շեղման դեպքում անտեսենք ուղղահայաց առանցքով ամրացված զսպանակի դեֆորմացիան վերադարձնող ուժի արտահայտության մեջ: Այսինքն՝ եթե զնդիկը շեղված է X առանցքով x չափով, ապա վերադարձնող ուժը կընդունենք հավասար $F_x = -2k_1x$: Նման ձևով $F_y = -2k_2y$: Այս դեպքում տատանումներն ուղղահայաց ուղղություններով կլինեն իրարից անկախ՝

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y(t) = y_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (81.1)$$

որտեղ տատանումների սեփական հաճախությունները հավասար են.

$$\omega_1 = \sqrt{2k_1 / m}, \quad \omega_2 = \sqrt{2k_2 / m}. \quad (81.2)$$

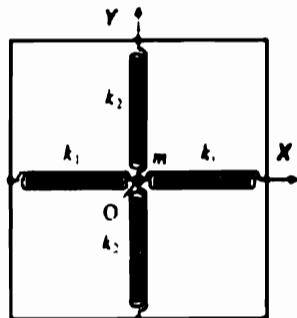
Իսկ լայնությունն ու սկզբնական փուլերը կորոշվեն սկզբնական պայմաններից:

Սեփական հաճախությունների կամայական հարաբերակցության դեպքում զնդիկի տատանումները կարող են ունենալ բարդ և խճճված տեսք: Այն կարելի է ուսումնասիրել, հաշվի առնելով, որ զնդիկի արդյունարար շարժումը երկու փոխուղղահայաց տատանումների վերադրումն է: Դիտարկենք նախ պարզագույն դեպքը, երբ զսպանակների կոշտություններն իրար հավասար են, հետևաբար, նույնը կլինեն նաև սեփական հաճախությունները.

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Արտաքսելով (81.1) -ից ժամանակը, խտանանք զնդիկի շարժման հետագծի հավասարումը: Այդ նպատակով (81.1) -ը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

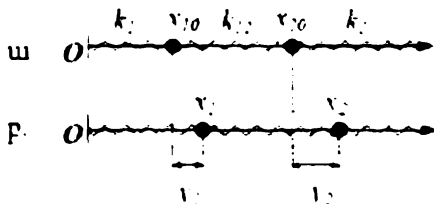
$$\omega_1 t + \varphi_1 = \arcsin(x' / x_0), \quad \omega_2 t + \varphi_2 = \arcsin(y' / y_0):$$



Այ 11.9

Եթե $\omega, \varepsilon \omega, \varepsilon^2 \omega$, բայց նրանց հարաբերությունն ամբողջ թվերի հարաբերություն է $m\omega, -n\omega$, ապա հետագիծը փակ կորեր են, որոնք կոչվում են *կիսաժուի պատկերներ* (Նկ.11.11): Հաճախությունների հարաբերությունն այդ դեպքում տալիս է արտագծված ուղղանկյան կողմերի հետ հետագծի շրջափման քանակների հարաբերությանը:

2. Կապված համակարգերի տատանումները: Երկու և ավելի ազատության աստիճան ունեցող համախումբը, որում առկա են մարմինների միջև էներգիայի փոխանակում ապահովող կապեր, կոչվում է *կապված համակարգ*: Նկ.11.12 և 11.13-ում ներկայացված են կապված համակարգերի պարզագույն օրինակներ. Նկ.11.12-ում համախումբն օժտված է երկու ազատության աստիճանով, իսկ Նկ.11.13-ում պատկերվածը՝ չորս ազատության աստիճանով, քանի որ գնդիկներից յուրաքանչյուրը կարող է տատանվել ինչպես նկարի հարթության մեջ, այնպես էլ նրան ուղղահայաց ուղղությամբ:



Նկ.11.12



Նկ.11.13

Ընդհանուր դեպքում կապված համակարգերի շարժումն ունի բավական բարդ տեսք: Օրինակ, շեղելով Նկ.11.13-ում գնդիկներից որևէ մեկը կամայական ուղղությամբ, կառաքացնենք նաև մյուս գնդիկի շեղումը: Արդյունքում կստանանք շարժման բարդ պատկեր, որի ընթացքում տեղի կունենա էներգիայի հոսք մի գնդիկից մյուսը և հակառակը: Չնայած կապված ճոճանակների շարժման ներկայացված բարդությանը, այն միշտ կարելի է ներկայացնել համախմբի ազատության աստիճանների թվին հավասար (տվյալ դեպքում չորս) ներդաշնակ տատանումների վերադրման միջոցով: Այս ներդաշնակ տատանումները կոչվում են *համակարգի նորմալ տատանումներ*: *Նորմալ տատանումների թիվը հավասար է համակարգի ազատության աստիճանների թվին*:

Նկ.11.13-ում կապված ճոճանակների նորմալ տատանումները հետևյալն են.

ա) նկարի հարթության մեջ ճոճանակները շեղված են նույն ուղղությամբ նույն անկյունով;

բ) նույնը՝ նկարի հարթությանն ուղղահայաց հարթության մեջ:

Երկու դեպքում էլ ճոճանակները կտատանվեն սեփական հաճախություներով, քանի որ զսպանակն այս շարժումներում որևէ դեր չունի:

Մյուս երկու նորմալ տատանումներն առաջանում են երբ՝

գ) գնդիկները նկարի հարթության մեջ շեղում ենք հավասարակշռության դիրքերից հակառակ ուղղություներով՝ հավասար անկյուններով:

դ) նույնը նկարի հարթությանն ուղղահայաց հարթության մեջ:

Կապված ճոճանակների կամայական շարժում այս նորմալ տատանումների վերադրում է: Պրանում կհամոզվեք ստորև քննարկվող օրինակով:

3. Երկու ազատության աստիճանով կապված համախմբի շարժումը: Նկ.11.12ա-ում պատկերված է համախումբը $t=0$ պահին, իսկ Նկ.11. 12բ-ում՝ կամայական t պահին:

Կատարենք նշանակումներ.

$$y_1 = x_1 - x_{10}; \quad y_2 = x_2 - x_{20}, \quad (81.4)$$

որոնք գնդիկների շեղումներն են իրենց հավասարակշռության դիրքերից: Գնդիկների շարժման հավասարումներից յուրաքանչյուրը՝

$$m\ddot{y}_1 = -ky_1 + k_{12}(y_2 - y_1), \quad (81.5)$$

$$m\ddot{y}_2 = -ky_2 - k_{12}(y_2 - y_1), \quad (81.6)$$

շնորհիվ գնդիկները կապող զսպանակի (k_{12} կոշտությամբ) առկայության պարունակում է երկու գնդիկների կոորդինատները: Գումարելով և հանելով իրարից այս հավասարումները, կստանանք

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_2 + y_1) = -\frac{k}{m}(y_2 + y_1), \quad (81.7)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_2 - y_1) = -\left(\frac{k}{m} + 2\frac{k_{12}}{m}\right)(y_2 - y_1): \quad (81.8)$$

Հավասարակշռության դիրքերից գնդիկների շեղումների գումարի և տարբերության համար ստացվեց ներդաշնակ տատանումների հավասարում, համապատասխանաբար

$$\omega_+ = \sqrt{k/m}, \quad \omega_- = \sqrt{(k + 2k_{12})/m} \quad (81.9)$$

հաճախություններով.

$$y_2 + y_1 = A_0 \sin(\omega_+ t + \varphi_+); \quad y_2 - y_1 = B_0 \sin(\omega_- t + \varphi_-); \quad (81.10)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{A_0}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{B_0}{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \\ y_2 &= \frac{A_0}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B_0}{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (81.11)$$

Նկատենք, որ (81.9) ը նորմալ տատանումների հաճախություններն են, իսկ (81.11) արդյունքը ապացուցում է մեր պնդումը այն մասին, որ կապված համակարգի ցանկացած տատանում ներկայացնում է նրա (81.10) նորմալ տատանումների վերադրում:

4. Ձարկեր: Զննարկենք (81.11) բանաձևերի հիման վրա մի կարևոր մասնավոր դեպք, երբ $A_0 = B_0$ և գնդիկների միջև կապը թույլ է ($k_{12} \ll k$).

$$|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega. \quad (81.12)$$

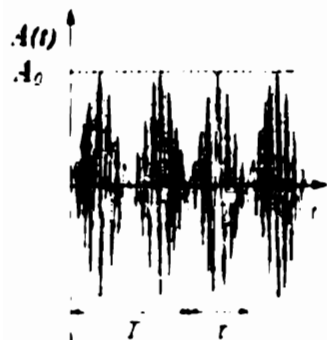
Այդ դեպքում, օգտվելով սինուսների գումարման և հանման եռանկյունաչափական առնչություններից, (81.11)-ից կստանանք

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -A_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right), \\ y_2 &= -A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \end{aligned} \right\} \quad (81.13)$$

դրտել գրության կարծության համար անտեսեցինք սկզբնական փուլերը: Ստացված շարժման օրենքները ներկայացնում են

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \omega,$$

մեծ հաճախությամբ (արագ փոփոխվող) տատանումներ, որոնց լայնությունը դանդաղ



Նկ 11.14

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \ll \omega_1.$$

հաճախությամբ փոփոխվում են ներդաշնակության օրենքով. Այս իմաստով (81.13) -ում (81.14) հաճախությամբ փոփոխվող ֆունկցիաները կարելի է համարել արագ փոփոխվող (վերջին արտադրիչներով պայմանավորված) տատանումների լայնություններ (Նկ.11.14): Նման վարք ցուցաբերող տատանումները կոչվում են **զարկեր** (բաբախումներ): Նկատենք, որ զար-

կերը նույնությամբ կրկնվում են լայնության փոփոխման պարբերության
կեսին հավասար ժամանակների հետո

$$T = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} ; \quad (81.15)$$

Ձարկեր առաջանում են միջոց, երբ վերադրվում են իրար մոտ հաճախությամբ տատանումներ: Ընդ որում այդ տատանումները կարող են լինել ինչպես իրար զուգահեռ, այնպես էլ ուղղահայաց:

ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

§ 82. ԱԼԻՔԱՅԻՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ

Մեխանիկական տատանումների ուսումնասիրության ժամանակ միջավայրի առկայությունը հաշվի առանք տատանվող մարմնի վրա դիսիպատիվ ուժ ավելացնելով. Կերջինս հանգեցրեց տատանումների մարմանը տատանվող մարմնի մեխանիկական էներգիայի փոխարկմանը ջերմության: Սակայն տատանվող մարմնի և միջավայրի փոխազդեցության նման մեկնաբանությունը միայն մասամբ է արտացոլում միջավայրում ընթացող պրոցեսները: Իրականում տատանվող մարմնի կողմից միջավայրին հաղորդված էներգիան մեծացնելով միջավայրը կազմող մասնիկների քառասյին շարժման կինետիկ էներգիան, միաժամանակ նրանց *հաղորդում է ուղղորդված շարժում* մասնիկներն սկսում են կատարել հարկադրական տատանումներ: Միջավայրի տվյալ մասը պարբերաբար դեֆորմացվում է առաջ բերելով առածգական լարումներ, որոնք ազդում են ինչպես տատանվող մարմնի, այնպես էլ հարակից ծավալների վրա, ստիպելով պարբերաբար դեֆորմացվել վերջիններիս Այսպիսով, *առածգական միջավայրում տատանումները չեն մնում տեղայնացված, այլ հաղորդվում են տատանումների աղբյուրից ավելի ու ավելի մեծ հեռավորության վրա գտնվող ծավալներին. ներառելով դրանք տատանողական շարժման մեջ:*

Տատանումների տարածման պրոցեսը կոչվում է *ալիքային շարժում*: Տարածվող տատանումը կոչվում է *ալիք*:

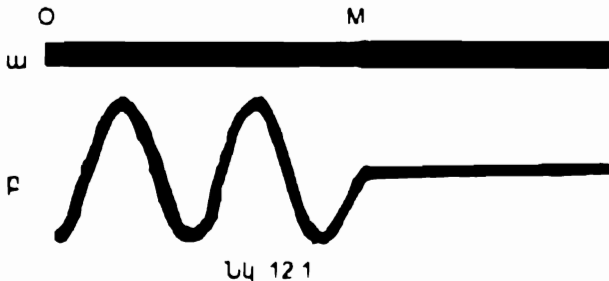
Ալիքային շարժման ընթացքում բացակայում է նյութի տեղափոխությունը: Միջավայրում, որում տարածվում է ալիք, մասնիկները կատարում են իրենց հավասարակշռության դիրքերի շուրջ հարկադրական տատանումներ տարբեր սկզբնական փուլերով

Նշանակենք առածգական միջավայրում տարածվող ալիքում միջավայրի մասնիկների հավասարակշռության դիրքերից շեղման չափը ξ : Այն

տարբեր է միջավայրի տարբեր կետերում և փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում.

$$\xi = \xi(r, t): \quad (82)$$

Տարածաժամանակային կոորդինատներից այս կախվածությունը կոչվում է *ալիքային շարժման օրենք*։ Կախված միջավայրի հատկություններից և ալիքի գրգռման ձևից՝ այն կարող է տրվել տարբեր մաթեմատիկական բանաձևերով։



Դիտարկենք պարզագույն *միաչափ ալիքի* դեպքը. երբ ալիքը տարածվում է *X* առանցքով։ Միաչափ առածգական ալիք կառաջանա կիսանվերջ բարակ լարում, եթե նրա ծայրում առաջացնենք տատանումներ (Նկ.12.1)։ Կախված ալիքում միջավայրի մասնիկների տատանման ուղղությունից, ալիքները լինում են *երկայնական* և *լայնական*։

Երկայնական ալիքում մասնիկները տատանվում են ալիքի տարածման երկայնքով (Նկ. 12.1ա)՝ ժամանակի ցանկացած պահին երկայնական ալիքը ներկայացնում է միջավայրի խտացումների և նոսրացումների հաջորդականություն։ Երկայնական առածգական ալիքի օրինակ է ձայնը։

ձկուն լարին հաղորդված ուղղահայաց տատանումներն առաջացնում են ալիքի տարածում լարի երկայնքով (Նկ.12.1բ)։ Նման ալիքները կոչվում են *լայնական*։ Լայնական առածգական ալիքում խտացումներ և նոսրացումներ չկան, այսինքն՝ բացակայում են ձգման և սեղմման դեֆորմացիաները. Այստեղ գործ ունենք *սահքի դեֆորմացիայի* հետ։

Փոփոխություն ունեն ալիքային շարժումներ, որոնք պարունակում են միջավայրի մասնիկների թե՛ լայնական և թե՛ երկայնական տատանման բաղադրիչներ, այսինքն ո՛չ զուտ երկայնական են, ո՛չ լայնական։ Օրինակ՝ ջրի մակերևույթին առաջացող, այսպես կոչված, գրավիտացիոն ալիքներում մասնիկները ուղղաձիգ հարթության մեջ կատարում են ըստ խորության նվազող շառավիղով շրջանագծային շարժումներ։

Ինչպես տատանումների դեպքում, ցանկացած բարդ ալիք կարելի է ներկայացնել *ներդաշնակ* (սինուսի կամ կոսինուսի օրենքով փոփոխվող) ալիքների վերադրման միջոցով: Այդ պատճառով կսահմանափակվենք պարզագույն ներդաշնակ ալիքների ուսումնասիրությամբ:

Դիցուք O կետում ծողին հաղորդված են

$$\xi(0, t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (82.2')$$

տատանումներ, որոնք տարածվում են ծողի երկայնքով u արագությամբ: Գրգռումների տարածման u արագությունը, որը կոչվում է *ալիքի արագություն*, չի կարելի չփոքել ալիքում մասնիկի տատանողական շարժման $v = \partial \xi / \partial t$ արագության հետ:

Որոշակի $t_1 = x/u$ ժամանակ անց O կետում գրգռված տատանումները կհասնեն ծողի M կետը (նկ 12.1): Եթե բացակայում են տարածման ընթացքում էներգիայի կորուստները, ապա M կետում տատանումները կունենան նույն ω հաճախությունն ու A լայնությունը, բայց O կետում տատանումներից «ետ ընկած» կլինեն t_1 ժամանակով:

$$\xi(x, t) = A \sin[\omega(t - t_1) + \varphi] = A \sin\left[\omega t - \frac{\omega x}{u} + \varphi\right]: \quad (82.2)$$

Վերջինս ներկայացնում է դիտարկվող *ալիքային շարժման օրենքը*: Ալիքային շարժումն օժտված է ինչպես ժամանակային այնպես էլ տարածական պարբերականությամբ: Ալիքի T պարբերությունը միջավայրի կամայական x կետում մասնիկի տատանման պարբերությունն է.

$$\xi(x, t + T) = \xi(x, t),$$

որտեղից

$$T = 2\pi/\omega = 1/\nu: \quad (82.3)$$

Ալիքում մասնիկի տատանման շրջանային ω և գծային ν հաճախությունները կոչվում են ալիքի համապատասխան հաճախություններ:

Ժամանակի տվյալ պահին *միևնույն փուլում տատանվող երկու հառանգ կետերի միջև հեռավորությունը* կոչվում է *ալիքի երկարություն*, որն է ներկայացնում է ալիքի տարածական պարբերության չափը.

$$\xi(x + \lambda, t) = \xi(x, t),$$

որտեղից՝

$$\lambda = u/\nu = uT \text{ կամ } \lambda\omega/u = 2\pi: \quad (82.4)$$

Ուրեմն, ալիքի երկարությունն այն հեռավորությունն է, որը ալիքն ան-

ցնում է իր պարբերությանը հավասար ժամանակում

Հաշվի առնելով ստացված առնչությունները, *ալիքային շարժման* (82.2) *օրենքը* կներկայացնենք

$$\xi(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right], \quad (82.5)$$

կամ

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi), \quad (82.5a)$$

տեսքով, որտեղ

$$k = 2\pi / \lambda \quad (82.6)$$

մեծությունը կոչվում է *ալիքային թիվ* (2π սմ-ում տեղավորվող ալիքների քանակն է)։ Ալիքային շարժման (82.5a) օրենքում

$$\Phi(x, t) = \omega t - kx + \varphi \quad (82.7)$$

մեծությունը կոչվում է *ալիքի փուլ*, իսկ $\Phi(t=0)$ -ն տվյալ x կետում տատանումների *սկզբնական փուլն* է։ Ուրեմն ալիքի x_1 և x_2 կետերում տատանումները տարբերվում են միայն սկզբնական փուլերով, որոնց տարբերությունը հավասար է

$$\Delta\Phi = k(x_1 - x_2):$$

Եթե այն հավասար է $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, այսինքն՝ այդ կետերն իրարից հեռացված են ամբողջ թիվ անգամ λ հեռավորությամբ, ապա կտատանվեն նույն փուլում։

Կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցում մասնիկները ժամանակի տվյալ պահին տատանվում են միևնույն փուլում, կոչվում է ալիքային մակերևույթ կամ ալիքի ճակատ։ Ըստ ճակատի ալիքները լինում են հարթ, գլանային, գնդային և այլն։ Օրինակ, միաչափ (մեկ տարածական կոորդինատից կախված) ներդաշնակ ալիքը *հարթ ալիք* է, քանի որ $\Phi = \text{const}$ պայմանը տվյալ t պահին ներկայացնում է ալիքի ճակատի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$x = \frac{\omega t + \varphi - \Phi}{k} = \text{const},$$

որը x կետով անցնող YZ հարթությանը զուգահեռ հարթություն է։

Գնդային ալիք կարելի է ստանալ անսահման միջավայրի որևէ կետում ներդաշնակ տատանումներ գրգռելով։ Գնդային ալիքի հավասարումն է՝

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr + \varphi), \quad r > 0.$$

որտեղ r -ը դիտարկվող կետի հեռավորությունն է ալիքի աղբյուրից. նկատենք, որ զնդային ալիքի լայնությունը, նույնիսկ կլանման բացակայության դեպքում, նվազում է: Ղա հետևում է էներգիայի պահպանման օրենքից:

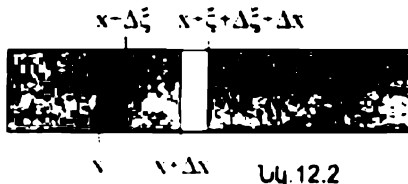
Դիֆերենցելով ալիքի (82.7) փուլը, համարելով այն հաստատուն, կստանանք ալիքի ճակատի տարածման արագությունը.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = u \quad (82.8)$$

Ուրեմն, u -ն ալիքի ճակատի տարածման արագությունն է, որը կոչվում է ալիքի փուլային արագություն:

§ 83. ԱԼԻՔԱՑԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ

Քննարկենք նախորդ պարագրաֆում դիտարկված ծողում ալիքների դինամիկան: Դիցուք, նրանով տարածվում է երկայնական ալիք: Ստույի առանձնացնենք ծողի ծախ ծայրից x հեռավորության վրա Δx երկարությամբ գլանային տարր (նկ.12.2): Եթե t պահին գլանի x կողողինատով հիմքի շեղումը նշանակենք $\xi(x, t)$ ապա $x + \Delta x$ հիմքի շեղումը կլինի $\xi(x + \Delta x, t)$: Կախված շեղման այս չափերի տարբերությունից, դիտարկվող գլանային տարրը կենթարկվի սեղմման կամ ձգման դեֆորմացիայի: Որոշենք գլանային տարրի հարաբերական երկարացումը, համարելով Δx -ը շատ փոքր:



$$\epsilon = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{\xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)}{\Delta x} \approx \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}. \quad (83.1)$$

Հուլի օրենքի համաձայն, ծողում կառաջանա

$$\sigma = E \epsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (83.2)$$

Նորմալ լարում, որտեղ E -ն ծողի Յունգի մոդուլն է:

Սովորաբար $\epsilon \ll 1$, այնպես որ (83.1)-ից $|\Delta \xi| \ll |\Delta x|$ և կարելի է տարաական գլանի արագացումը վերցնել հավասար $\partial^2 \xi / \partial t^2$, իսկ զանգվածը

$\Delta m = \rho \Sigma \Delta x$, որտեղ ρ -ն ծողի զանգվածի խտությունն է, Σ -ն լայնական հատվածքի մակերեսը: Պիտարկվող տարրական զանի համար Նյուտոնի երկրորդ օրենքը կիրառելու համար տվյալ պահին որոշենք նրա վրա ազդող նորմալ ուժերի համագործը:

$$\Delta F = \Sigma \left[\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x) \right]_n = \Sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x = \Sigma E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x, \quad (83.3)$$

որտեղ վերջին արտահայտությունն ստանալիս օգտվեցինք Հուկի (83.2) օրենքից:

Նյուտոնի երկրորդ օրենքը տալիս է

$$\rho \Sigma \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \Sigma E \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

որտեղից՝

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = 0: \quad (83.4)$$

Ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է *ալիքային հավասարում*: Նրա ընդհանուր լուծումն ունի

$$\xi(x, t) = f_1(x - ut) + f_2(x + ut) \quad (83.5)$$

տեսքը, որտեղ f_1 և f_2 -ը կամայական ֆունկցիաներ են, իսկ

$$u = \sqrt{E/\rho} \quad (83.6)$$

երկայնական առաձգական ալիքի արագությունն է:

Ալիքային հավասարման ընդհանուր լուծման առաջին անդամը նկարագրում է X առանցքի դրական ուղղությամբ, իսկ երկրորդը՝ հակառակ ուղղությամբ տարածվող ալիք: Տալով սկզբնական և եզրային պայմանները, մենք կկոնկրետացնենք (83.5) լուծման տեսքը: Կիսանվերջ ծողի օրինակում (82.2) սկզբնական պայմանից ստանում ենք $f_2 = 0$, իսկ

$$f_1(x - vt) = A \sin(\omega t - kx + \varphi):$$

Այն, որ առաձգական միջավայրերում երկայնական ալիքների արագությունը կախված է Ֆունգի մոդուլից, լիովին հասկանալի է, քանի որ երկայնական ալիքների տարածումն ուղեկցվում է միջավայրի սեղմման և ծգման դեֆորմացիաներով: Համանման ծեղկ կարելի է ցույց տալ, որ *լայնական առաձգական ալիքի արագությունը* տրվում է

$$u = \sqrt{G/\rho} \quad (83.7)$$

բանաձևով, որտեղ G -ն միջավայրի սահիքի մոդուլն է, քանի որ լայնական առաձգական ալիքների տարածումը կապված է սահիքի դեֆորմացիայի հետ: Հեղուկներն ու գազերը զուրկ են սահիքի նկատմամբ առաձգական հատկություններից: Այդ պատճառով *հեղուկներում և գազերում լայնական առաձգական ալիքներ չեն կարող տարածվել*:

§ 84. ԱՆԻՔԻ ԷՆԵՐԳԻԱՆ ՓՈՅԹԻՆԳԻ ՎԵԿՏՈՐԸ

Ալիքների աղբյուրը դեֆորմացնելով իրեն հարակից ծավալները նրանց անընդհատ *էներգիա է* հաղորդում, որն ալիքը *տեղափոխում է* միջավայրով: Որոշենք առաձգական ծողի dV ծավալի էներգիայի փոփոխությունը, որը պայմանավորված է նրանում

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi) \quad (84.1)$$

երկայնական հարթ ալիքի տարածմամբ:

Որպես dV ծավալ կընտրենք նախորդ պարագրաֆում առանձնացված տարրական գլանը: Ալիքային դաշտում նրա ծեռք բերած կոնտրոլ էներգիան կլինի հավասար

$$dK = \rho \frac{v^2}{2} dV = \frac{\xi^2}{2} dm = \rho \frac{A^2 \omega^2}{2} \Sigma dx \cos^2(\omega t - kx + \varphi): \quad (84.2)$$

Պոտենցիալ էներգիայի dU փոփոխությունը հավասար է դիտարկվող տարրական գլանի ε հարաբերական դեֆորմացիայով պայմանավորված առաձգականության էներգիային (§73).

$$dU = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Sigma dx: \quad (84.3)$$

Մյուս կողմից, օգտվելով (83.1), (84.1) և $v = \partial \xi / \partial t$ բանաձևից, կստանանք

$$\varepsilon^2 = A^2 k^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{k^2 v^2}{\omega^2} = \frac{v^2}{u^2} = \rho \frac{v^2}{E}, \quad (84.4)$$

որտեղ վերջին երկու արտահայտություններն ստանալիս օգտվեցինք (82.8) և (83.6) բանաձևերից: Տեղադրելով (84.4)-ը (84.3)-ում՝ կունենանք

$$dU = dT = \frac{1}{2} \rho v^2 dV: \quad (84.5)$$

Սա հատուկ է բոլոր միաչափ վազող ալիքներին: Դիտարկվող տարրական ծավալի լրիվ մեխանիկական էներգիայի փոփոխությունը կլինի

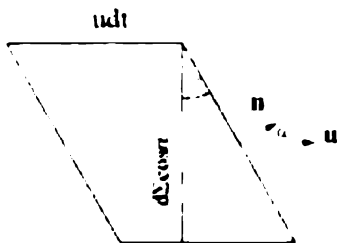
$$dE = dT + dU = \rho v^2 = \rho A^2 \omega^2 dV \cos^2(\omega t - kx + \varphi):$$

Այստեղից հարթ սինուսոիդային ալիքի էներգիայի խտության համար կստանանք

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho v^2 = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi): \quad (84.6)$$

Ուրեմն, առաձգական միջավայրի ալիքային շարժման կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաները միևնույն փուլում տատանվող x, t -ից կախված պարբերական ֆունկցիաներ են: $\rho A^2 \omega^2 / 2$ լայնությունով, Այս օրինաչափությունները ճիշտ են ցանկացած առաձգական ալիքի համար, անկախ ալիքի ճակատից և դեֆորմացիայի ձևից, քանի որ այն պայմանավորված է առաձգական ալիքի տարածման մեխանիզմով: Շատ կարևոր է, որ ալիքային շարժման լրիվ էներգիան ցանկացած dt ծավալում ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվում է: Այս է տատանողական և ալիքային շարժումների հիմնական տարբերությունը էներգիայի տեսանկյունից: Հիշենք, որ ներդաշնակ տատանման լրիվ էներգիան հաստատուն է (կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաների փոփոխությունները կատարվում են հակառակ փուլերում, տես §76):

Ալիքը տեղափոխում է էներգիա: Ալիքում էներգիայի տարածման արագությունը հավասար է այն մակերևույթի արագությանը, որի վրա էներգիայի խտությունն առավելագույնն է: (84.6) բանաձևից հետևում է, որ $w = w_{\max}$ մակերևույթին համապատասխանում է փուլի $\omega t - kx + \varphi = 0$ արժեքը, որի տարածման արագությունը համընկնում է ալիքի $u = \omega/k$ փուլային արագության հետ: Սակայն այս համընկումը տեղի ունի հարթ սինուսոիդային ալիքի համար: Ընդհանուր դեպքում ալիքում էներգիայի տեղափոխման



Նկ 12.3

արագությունը, որը կոչվում է *ալիքի խմբային արագություն*, չի համընկնում նրա փուլային արագության հետ: որը կարող է, նույնիսկ, մեծ լինել լուսի արագությունից

Միջավայրում ալիքի էներգիա տեղափոխելու արոցքնը բնութագրում են *էներգիայի հոսքի խտության* կամ, այսպես կոչված, *Փոթյունի վեկ*

$$\Pi = - \frac{dE_{\text{մ}}}{dtd\Sigma \cos \alpha}; \quad (84.7) \quad (84.8)$$

որտեղ dE -ն d ժամանակում $d\Sigma$ մակերեսով անցած էներգիան է։ Սա միավոր ժամանակում ալիքի տարածմանն ուղղահայաց միավոր մակերեսով տեղափոխվող էներգիան է։ Պարզ է, որ այն նկ.12.3 -ում նշված ծավալում պարփակված էներգիան է։

$$dE = w v dtd\Sigma \cos \alpha; \quad (84.8)$$

Հաշվի առնելով վերջինս Փոթինգի վեկտորի (84.7) տախանման մեջ, կստանանք

$$\Pi = wu; \quad (84.9)$$

Ուրեմն Փոթինգի վեկտորը ալիքի էներգիայի խտության և նրա տարածման արագության արտադրյալն է։

§ 85. ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՎԵՐԱԴՐՈՒՄ

Դիտարկենք համասեռ և իզոտրոպ միջավայրում միևնույն ալիքի երկարությունն ունեցող երկու ներդաշնակ ալիքների վերադրումը։ Ենթադրենք՝ այդ ալիքները զրգռվում են միաժամանակ միջավայրի երկու տարբեր O_1 և O_2 կետերում կետային աղբյուրների կողմից (նկ. 12.4)։ Միջավայրի կամայական M կետում կունենանք

$$\xi_1 = \frac{A_1}{r_1} \sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi_1) = \frac{A_1}{r_1} \sin \Phi_1$$

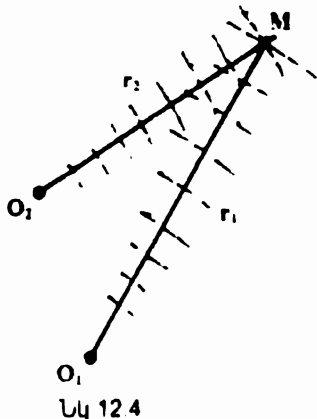
$$\xi_2 = \frac{A_2}{r_2} \sin(\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_2) = \frac{A_2}{r_2} \sin \Phi_2$$

Համաձայն տատանումների վերադրման սկզբունքի, M կետում կստանանք մի նոր ներդաշնակ տատանում։

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \sin \Phi, \quad (85.1)$$

որտեղ

$$\text{ig}\Phi = \left(\frac{A_1}{r_1} \sin \Phi_1 + \frac{A_2}{r_2} \sin \Phi_2 \right) / \left(\frac{A_1}{r_1} \cos \Phi + \frac{A_2}{r_2} \cos \Phi_2 \right), \quad (85.2)$$



Նկ 12.4

$$A^2 = \left(\frac{A_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2} \right)^2 + 2 \frac{A_1 A_2}{r_1 r_2} \cos(\Phi - \Phi_2) \quad (85.3)$$

Ալիքների վերադրման արդյունքը կախված է արդյունադար (85.1) ալիքի լայնության քառակուսու (85.3) արտահայտության մեջ վերջին անդամի ըստ ժամանակի միջին արժեքից: Այդ անդամը կոչվում է *ինտերֆերենցի* անդամ, որի արժեքը կախված է վերադրվող ալիքների փուլերի տարբերությունից:

$$\Phi - \Phi_2 = (\omega_2 - \omega_1)t - k(r_2 - r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (85.4)$$

Այստեղից հետևում է, որ փուլերի տարբերության բացահայտ ժամանակային կախվածությունը կբացակայի, եթե վերադրվող ալիքներն ունենան նույն հաճախությունը, $\omega_1 = \omega_2$: Ժամանակից անկախ փուլերի տարբերություն ունեցող ալիքները կոչվում են *կոհերենտ*: Կոհերենտ ալիքների վերադրումից առաջանում է ինտերֆերենցի երևույթ՝ տարածության մեջ ալիքների էներգիայի պարբերական բաշխում: Իսկապես, կոհերենտ ալիքների համար (85.3) -ը ունի հետևյալ տեսքը:

$$A^2 = \left(\frac{A_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2} \right)^2 + 2 \frac{A_1 A_2}{r_1 r_2} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) - (\varphi_2 - \varphi_1) \right], \quad (85.5)$$

որտեղից հետևում է M կետում արդյունադար տատանման լայնության մաքսիմումի պայմանը:

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) - (\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi n; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (85.6)$$

$\varphi_2 = \varphi_1$ դեպքում $r_2 - r_1$ մեծության համար, որը կոչվում է վերադրվող ալիքների *ընթացքների տարբերություն*, ստանում ենք՝

$$r_2 - r_1 = n\lambda \quad (85.7)$$

Ուրեմն, *եթե ընթացքների տարբերությունը հավասար է ամբողջ քվով ալիքի երկարության, ապա ալիքներն իրար ուժեղացնում են ունենում ենք մաքսիմում ինտենսիվություն եթե*

$$r_2 - r_1 = (2n + 1) \lambda / 2, \quad (85.7)$$

ապա կունենանք *մինիմում ինտենսիվություն*:

Ոչ կոհերենտ ալիքների վերադրման ժամանակ ինտերֆերենցի երևույթ չի առաջանում, քանի որ բոլոր կետերում արդյունադար լայնության քառակուսու միջինը հավասար է վերադրվող ալիքների լայնությունների քառակուսիների միջինների գումարին:

§ 86. ԿԱՆԳՈՆ ԱՆՓՆԵՐ

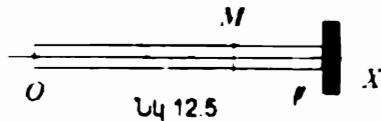
Ալիքների ինտերֆերենցի հետևանք է *կանգուն ալիքի* առաջացումը: Պարզագույն միաչափ կանգուն ալիք կարելի է ստանալ վերջավոր l երկարություն ունեցող ծողի (ձկուն լարի) մի ծայրում ներդաշնակ տատանումներ առաջացնելով: Զորում կառաջանա և կտարածվի վազող ալիք, որը կարող է լինել ինչպես երկայնական, այնպես էլ լայնական:

$$\xi_1(x, t) = A_1 \sin(\omega t - kx). \quad (86.1)$$

Անդրադառնալով ծողի (լարի) մյուս ծայրից, միևնույն M կետում ալիքը կառաջացնի

$$\xi_2(x, t) = A_2 \sin(\omega t - k(x - 2l) - \varphi) \quad (86.2)$$

օրենքով տատանումներ (ալիքի կշանումն անտեսված է), որտեղ φ -ն ալիքի փուլի հնարավոր փոփոխությունն է՝ պայմանավորված նրա անդրադարձմամբ (նկ. 12.5): Համաձայն ալիքների վերադրման սկզբունքի M կետում արդյունարար տատանումը կլինի՝



$$\xi(x, t) = 2A_0 \cos[k(l - x) + \varphi/2] \sin(\omega t - kl - \varphi/2): \quad (86.3)$$

Ստացվածը միաչափ կանգուն ալիքի հավասարումն է, որտեղ

$$A(x) = 2A_0 \cos[k(l - x) + \varphi/2] \quad (86.4)$$

կորոդինատից կախված պարբերական ֆունկցիա է և ներկայացնում է *կանգուն ալիքի լայնությունը*: Նկատենք, որ

$$k(l - x) + \varphi/2 = \pi n; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (86.5)$$

կետերում տատանումների լայնությունը առավելագույնն է և հավասար է $2A_0$: Այդ կետերը կոչվում են *կանգուն ալիքի փնջվածքներ*: Իսկ

$$k(l - x) + \varphi/2 = (2n + 1)\pi/2; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (86.6)$$

պայմանով որոշվող կետերը բնութագրվում են լայնության գրոյական արժեքով և կոչվում են *կանգուն ալիքի հանգույցներ*:

Երկու միջավայրերի բաժանման սահմանից առաձգական ալիքների անդրադարձման ժամանակ երկայնական ալիքի փուլի φ փոփոխությունը կախված է միջավայրերի *ալիքային դիմադրության* արժեքներից: Առաձգական միջավայրի *ալիքային դիմադրություն* ասելով հասկանում են ρu արտադրյալը, որտեղ ρ -ն միջավայրի զանգվածի խտությունն է, իսկ u -ն ալիքի տարածման փուլային արագությունը: Եթե ալիքը $\rho_1 u_1$ ալիքային դի-

Միջավայր	Ալիքային դի- մադրությունը կգ.մ ² /վ
Օդ (1 մթն. 0° C)	429
Թթվածին (1 մթն. 0° C)	450
Ջուր (20° C)	14.10 ⁵
Ապակի	15.10 ⁵
Պղինձ	33.10 ⁵
Պողպատ	46.10 ⁵

մադրությանը միջավայրից ըն-
նում է $\rho_2 u_2$: ալիքային դիմադրու-
թյամբ միջավայրի սահմանին նոր-
մալի ուղղությամբ, ապա

$$\varphi = 0, \text{ եթե } \rho_2 u_2 < \rho_1 u_1,$$

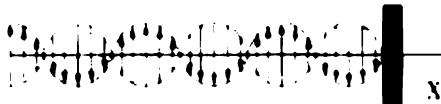
$$\varphi = \pi, \text{ եթե } \rho_2 u_2 > \rho_1 u_1:$$

Երկու հարևան փնջված-
քների (հանգույցների) միջև հեռավորությունը կոչվում է *կանգուն ալիք*:
երկարություն

$$\lambda, = x_2 - x_1 = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}:$$

Ուրեմն, *կանգուն ալիքի երկարությունը հավասար է համապատաս-
խան վազող ալիքի երկարության կեսին* (նկ. 12.6):

Նկատենք կանգուն ալիքի կարևոր մի առանձնահատկություն: Կան-
գուն ալիքի հանգույցների միջև ընկած տիրույթի (բջիջի) բոլոր կետերը



Նկ. 12.6

տատանվում են միևնույն փու-
լում, բայց տարբեր լայնությե-
րով (նկ. 12.6): Իսկապես, կան-
գուն ալիքի (86.3) հավասարման
մեջ ժամանակից կախված փու-

լային անդամն անկախ է կոորդինատից: Կանգուն ալիքի մի բջիջից հա-
րևան բջիջ անցնելիս ալիքի (86.4) լայնությանը անդամը փոխում է նշանը
Նշանակում է՝ *հարևան բջիջներում տատանումները կատարվում են հա-
կասակ փուլերում*:

Ի տարբերություն վազող ալիքի, *կանգուն ալիքում բացակայում է
էներգիայի տեղափոխությունը*: Կանգուն ալիքի յուրաքանչյուր բջջում լրիվ
էներգիան ժամանակի ընթացքում չի փոխվում, այլ պարբերաբար փո-
խարկվում է կինետիկից պոտենցիալի և հակառակը: Սա հետևանք է այն
բանի, որ կանգուն ալիքը ներկայացնում է հակառակ ուղղություններով
հավասար էներգիաներ տեղափոխող վազող ալիքների վերադրում: Այդ է
պատճառը, որ դիտարկվող ալիքները ստացել են կանգուն անվանումը:

Մի ծայրից ամրացված առածգական լարի ազատ տատանումների
ժամանակ լարում հաստատվում են կանգուն ալիքներ, ընդ որում ամրաց-
ված կետում ունենք հանգույց, իսկ բաց ծայրում փնջվածք (նկ.12.5բ):

Հետևաբար այդպիսի լարում պետք է տեղավորվի կենտ թվով կես ալիքի երկարություն:

$$l = (2m-1)\lambda/2, \quad m = 1; 2; \dots \quad (86.8)$$

Եթե ամրացված են լարի երկու ծայրերը (օրինակ, լարային երաժշտական գործիքներում), ապա լարի երկու ծայրերում էլ կունենանք հանգույց: Պա նշանակում է, որ լարում պետք է տեղավորվի ամբողջ թվով ալիքի երկարություն: $l = m\lambda$, Բայց $\lambda = l/2 = u/2v$ Այնպես որ

$$v = \frac{u}{2l} m, \quad m = 1; 2; \dots \quad (86.9)$$

որը ներկայացնում է *լարի տատանման սեփական հաճախությունների սպեկտրը*: Ղեկար չէ ցույց տալ, որ լարի սեփական հաճախությունը կախված է նրա ձգման σ լարումից: Այն արտահայտվում է ձգված լարի երկայնքով լայնական ալիքների տարածման արագության

$$u = \sqrt{\sigma/\rho} \quad (86.10)$$

կախվածությամբ: Սրանով է պայմանավորված լարային գործիքների «լարումը»: Նրանցում լարերի ձգման ուժի մեծացման կամ փոքրացման միջոցով:

§ 87. ԱԿՈՆՍՏԻԿԱ

Ակուստիկական ուսմունք է ձայնի մասին Մարդկանց և կենդանիների կողմից ձայնի ընկալման պատճառը նրանց լսողական օրգանների վրա առածգական ձայնային ալիքների ազդեցությունն է: Նորմալ լսողությամբ մարդը որպես ձայն ընկալում է այն առածգական ալիքները, որոնց հաճախություններն ընկած են 16 Հց –ից 20 կՀց տիրույթում: 16 Հց-ից ցածր հաճախության ձայնային ալիքները կոչվում են *ինֆրաձայն*, իսկ 20 կՀց-ից բարձրերը՝ *ուլտրաձայն*: Մարդկային ականջն առավել զգայուն է 1,5-3 կՀց հաճախության ձայնային ալիքների նկատմամբ:

Ցանկացած ձայնային երևույթ քննարկելիս հարկ է հաշվի առնել, որ ձայնը մի կողմից ֆիզիկական պրոցես է՝ միջավայրում առածգական ալիքների տարածում, մյուս կողմից, հոգեբանաֆիզիոլոգիական պրոցես ձայնային ալիքի ընկալում լսողական օրգանի կողմից: Առաջին դասի հարցերը հանդիսանում են *ֆիզիկական ակուստիկայի* ուսումնասիրության

առարկան, իսկ երկրորդը՝ *ֆիզիկոլոգիական ակուստիկայի*։

1. *Չայնի ֆիզիկական բնութագրերը*

Ակուստիկայում ծայնը բնութագրվում է *ծայնային հաճախությամբ* (հաճախությունների սպեկտրով, եթե ծայնը բարդ է), *ծայնի ճնշմամբ* և *ինտենսիվությամբ*։

Չայնի ինտենսիվությունը կամ ուժը *ծայնի էներգետիկ բնութագիր է* և կն թվապես հավասար է *ծայնային ալիքի էներգիայի հոսքի խտության* (*Փոթենցի վեկտորի*) միջին արժեքին

$$I = \bar{w} \cdot u, \quad (87.1)$$

որտեղ u -ն ծայնային ալիքի խմբային արագությունն է, որը սինուսոիդային ալիքի համար համընկնում է ալիքի փուլային արագության հետ, իսկ

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2, \quad (87.2)$$

A -ն ալիքի լայնություն է, ρ -ն՝ միջավայրի խտությունը։

Ուրեմն, *սինուսոիդային ծայնային ալիքի ինտենսիվությունը* որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$I = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \rho u : \quad (87.3)$$

ՄՄՀ -ում ինտենսիվությունը չափվում է Վտ.մ² միավորով։

Չայնային ալիքի տարածման ընթացքում միջավայրի ճնշումը յուրաքանչյուր կետում կրում է անընդհատ տատանումներ։ *Ճնշման այս Δp տատանումներն* էլ հենց առաջացնում են *ծայնի ճնշումը*։ Վերջինս ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է և հավասար է միջավայրի ալիքային ρu դիմադրության և ալիքում մասնիկների v արագության արտադրյալին.

$$\Delta p = \rho u v :$$

Որպես ծայնային ճնշման բնութագիր ընդունվում է այս մեծության միջին քառակուսային արժեքը, որը կապված է ծայնի ինտենսիվության հետ հետևյալ առնչությամբ.

$$p_i = \sqrt{(\Delta p)^2} = \sqrt{\rho u I} : \quad (87.4)$$

p_i -ը կոչվում է *ծայնի միջին քառակուսային ճնշում*։

Օդում, նորմալ ճնշման և 20°C ջերմաստիճանի ($\rho = 418$ կգ.մ³.վ) պայմաններում, տարբեր ծայներին համապատասխանող ինտենսիվության և միջին քառակուսային ճնշման արժեքները ներկայացված են աղյուսակում։

Չայն	Հեռավորությունը աղբյուրից (մ)	I (վտ/մ ²)	p , (Ն/մ ²)
Ցածր խոսակցություն	1	10^{-6}	$2 \cdot 10^{-1}$
Բարձր խոսակցություն	1	$10^{-1} - 10^{-4}$	0.06 - 0.2
Նվազախմբի ֆորտիսիմո	10	10^{-2}	2
Ինքնաթիռի աղմուկ	5	1	20

2. Չայնի կլանումն ու անդրադարձումը: *Ռեֆլեքտացիա:* Չայնի կլանումը ծայնային էներգիայի ոչ դարձելի փոխակերպումն է էներգիայի այլ տեսակների, մասնավորապես, ջերմության: Այն բնութագրվում է α *կլանման գործակցով*՝ այն հեռավորության հավադարձ մեծությամբ, որն անցնելիս ծայնային ալիքի լայնույթը նվազում է $e = 2.7$ անգամ: Չայնի կլանման ալ բնութագիր է *կորուստների գործակիցը* $\epsilon = \alpha\lambda/\pi$, (λ ՝ ալիքի երկարություն է) կամ *բարորակությունը*՝ $Q = 1/\epsilon$, որտեղ $\alpha\lambda$ -ն մարման լոգարիթմական դեկրեմենտն է:

Չայնի անդրադարձումը: Երկու միջավայրերի սահմանին (օդ - պատ, օդ - ջրային մակերևույթ և այլն) ընկնելիս հարթ ծայնային ալիքը կարող է մասամբ անդրադառնալ և մասամբ բեկվելով, թափանցել երկրորդ միջավայր: Անդրադարձող ալիքի ինտենսիվությունը բնութագրվում է *անդրադարձման գործակցով*. $R = I_r / I_0$, որտեղ I_0 -ն անդրադարձած ալիքի ինտենսիվությունն է, I_0 -ն՝ ընկնող ալիքի ինտենսիվությունը: Անդրադարձման գործակիցը որոշելիս հարկ է հաշվի առնել հետևյալ եզրային պայմանները. *միջավայրերի սահմանին պետք է հավասար լինեն ճնշումները և միջավայրերի մասնիկների արագությունների նորմալ բաղադրիչները*: Այդ դեպքում ստացվում է.

$$R = \left| \frac{(\rho_2 / \rho_1) \cos \alpha - \sqrt{(u_1 / u_2)^2 - \sin^2 \alpha}}{(\rho_2 / \rho_1) \cos \alpha + \sqrt{(u_1 / u_2)^2 - \sin^2 \alpha}} \right|^2, \quad (87.5)$$

որտեղ α -ն անկման անկյունն է, ρ_2/ρ_1 -ը՝ միջավայրերի խտությունների, իսկ u_2/u_1 -ը՝ ալիքների տարածման արագությունների հարաբերությունը: $u_1 < u_2$ դեպքում, երբ անկման անկյունը գերազանցում է

$$\alpha' = \arcsin(u_1 / u_2)$$

կրիտիկական արժեքը, առաջանում է ալիքի լրիվ անդրադարձում

Երկու միջավայրերի տաիմանին նորմալ անկման դեպքում, անդրադարձած ձայնային ալիքի φ փուլը փոխվում է համաձայն (86.7) օրենքի իսկ լայնույթը կապված է ընկնող ալիքի լայնույթի հետ հետևյալ բանաձևով.

$$A_0 = \left| \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right| A_1 \quad (87.6)$$

Երբ $\gamma = 1$ անդրադարձող ալիքը բացակայում է. իսկ $\gamma \rightarrow \infty$ դեպքում բացակայում է անցնող (բեկվող) ալիքը: Վերջին պայմանը տեղի ունի հեղուկի ու պինդ մարմինների մակերևույթներից օդում տարածվող ձայնի անդրադարձման դեպքում:

Որևէ արգելիքից անդրադարձած ձայնային ալիքի ընկալումը կոչվում է *արձագանք*: Այն ընկալելի է, եթե առաքված և ընդունված ձայնային իմպուլսները բաժանված են ժամանակի $\tau > 50 - 60$ մկ ինտերվալով: Արձագանքը դառնում է բազմակի, եթե անդրադարձնող մակերևույթները մի քանիսն են: Փակ տարածքներում բազմակի անդրադարձած ձայնային ալիքները միախառնվելով առաջացնում են հոծ խուլ հնչյուն, որն առաջ է բերում *ռեվերբերացիա*:

Ռեվերբերացիան փակ շինություններում ձայնի աստիճանական մարման երևույթն է՝ աղբյուրի անջատումից հետո: Շինության օդային ծավալը ներկայացնում է մեծ թվով սեփական հաճախություններ և տարբեր մարման գործակիցներ ունեցող տատանողական համակարգ: Այդ պատճառով տարբեր հաճախության ձայները մարում են ոչ միաժամանակ: Ձայնի աղբյուրն անջատելուց հետո այն ժամանակը, երբ ձայնի ինտենսիվությունը նվազում է միլիոն անգամ, կոչվում է *ռեվերբերացիայի ժամանակ*: Վերջինս կարևոր գործոն է շենքերի ակուստիկ հատկությունները նախագծելիս, որով զբաղվում է ճարտարապետական ակուստիկա կոչվող բնագավառը:

3. Դոպլերի էֆեկտը: Ձայնի ընկալվող v հաճախությունը համընկնում է աղբյուրի արձակած ձայնի v_0 հաճախության հետ միայն այն դեպքում, երբ աղբյուրն ու ընդունիչը անշարժ են իրար նկատմամբ: Մնացած բոլոր դեպքերում $v \neq v_0$: Օրինակ, երբ աղբյուրը մոտենում է անշարժ ընդունիչին, ապա ընկալվում է ավելի բարձր հաճախության ձայն, իսկ հեռանալիս, ընդհակառակը՝ ընկալվող ձայնն ունենում է ավելի փոքր հաճախություն:

Սա *Դուպլերի էֆեկտն է ակուստիկայում*՝ Պարզաբանենք այս երևույթի ֆիզիկան։ Առաձգական միջավայրում ծայնի տարածումն առաջացնում է միջավայրի յուրաքանչյուր կետում ճնշման տատանումներ։ Տվյալ պահին միջավայրի ճնշման (հետևաբար, նաև խտության) առավելագույն արժեքին համապատասխանող կետերն անվանում են ծայնային *ալիքի խտացումներ*, իսկ նվազագույնինը՝ նոսրացումներ։ Երկու հարևան խտացումների միջև հեռավորությունը ծայնային ալիքի λ երկարությունն է։ Միջավայրում խտացումներն ու նոսրացումները տարածվում են ալիքի փուլային u արագությամբ։ Տատանման $T_0 = 1/\nu_0$ պարբերության ընթացքում ծայնի անշարժ աղբյուրն արձակում է $\lambda_0 = uT_0$ երկարության ալիք։ Եթե ծայնի աղբյուրը մոտենում է միջավայրում անշարժ ընդունիչին v_1 արագությամբ, ապա T_1 ժամանակում այն ընդունիչին կմոտենա v_1T_0 չափով, այդ պատճառով զրանցվող ծայնում հարևան խտացումների միջև հեռավորությունը, այսինքն՝ ընկալվող ծայնի ալիքի երկարությունը կլինի՝

$$\lambda_1 = uT_0 - v_1T_0 = (u - v_1) / \nu_0,$$

իսկ հաճախությունը՝

$$\nu_1 = \frac{u}{\lambda_1} = \nu_0 \frac{u}{u - v_1} :$$

Եթե ընդունիչը միջավայրի նկատմամբ շարժվի v_2 արագությամբ՝ աղբյուրին ընդառաջ, ապա մեկ վրկում գրանցվող խտացումների քանակը, այսինքն, ընդունիչի գրանցած ծայնային ալիքի ν հաճախությունը կլինի հավասար

$$\nu = \nu_1 + \Delta\nu = \nu_1 + \frac{v_2}{\lambda_1} = \nu_1 \left(1 + \frac{v_2}{u} \right),$$

Որտեղ $\Delta\nu$ -ն ընդունիչի շարժման հետևանքով առաջացած լրացուցիչ խտացումների քանակն է, որն ընկալում է ընդունիչը 1 վրկում։

Այսպիսով, վերջին դեպքում գրանցվող ծայնի հաճախությունը կլինի

$$\nu = \nu_0 \frac{u + v_2}{u - v_1} : \quad (87.7)$$

Սա հենց ակուստիկայում *Դուպլերի էֆեկտն* արտահայտող բանաձևն է, որտեղ v_1 և v_2 արագությունները համարվում են դրական, եթե աղբյուրն ու ընդունիչը մոտենում են իրար։ Ակնհայտ է, որ այդ դեպքում ընկալվում է ավելի բարձր հաճախության ծայն։ Եթե ծայնի աղբյուրն ու ընդունիչը հեռանում են իրարից, ապա կգրանցվի հակառակ էֆեկտը։

4. *Ֆիզիալոգիական ակտիվիտե* Այստեղ ծայնային ընկալումը բնութագրվում է *ծայնի բարձրությամբ, տեմբրով և ուժգնությամբ*:

Բարձրությունը ծայնի հաճախությամբ որոշվող և մարդու լսողությամբ գնահատվող որակ է Հաճախության փոքրացմամբ նվազում է ընկալվող ծայնի բարձրությունը:

Ի տարբերություն ծայնի ինտենսիվության և միջին քառակուսային ճնշման, որոնք ծայնի օբյեկտիվ բնութագրեր են, *ծայնի բարձրությունը ծայնային ընկալման սուբյեկտիվ գնահատական է*: Այն կախված է ոչ միայն ծայնի միջին քառակուսային ճնշումից, այլև ականքի զգայնությունից, որը միևնույնը չէ տարբեր ինտենսիվության և հաճախության ծայներով նկատմամբ: Այսպես օրինակ, եթե ծայնային ճնշումը փոքր է *լսողության չեմ* կոչվող մեծությունից, ապա այդպիսի ալիքը ականջում չի առաջացնում ծայնի ընկալում: Լսողության սահմանը կախված է ծայնային ալիքի հաճախությունից, ընդունելով նվազագույն արժեք 1.5-3կՀց հաճախությունների տիրույթում: Մյուս կողմից, շատ մեծ ինտենսիվության ալիքներն էլ ականջը չի ընկալում որպես ծայն, դրանք առաջացնում են ցավի զգացում (տե՛ս նկ.12.7): Ծայնի միջին քառակուսային ճնշման նվազագույն արժեքը, որից սկսվում է այդ զգացումը, կոչվում է *ցավային չեմ*: Այն առավելագույնն է հաճախությունների 0.5-1կՀց տիրույթում և կազմում է մոտավորապես 20Ն/մ²: Նկ. 12.7-ում պատկերված է լսելի ծայնի տիրույթը (v.p.) հարթության վրա: Այն սահմանափակված է երկու շեմային կորերով:

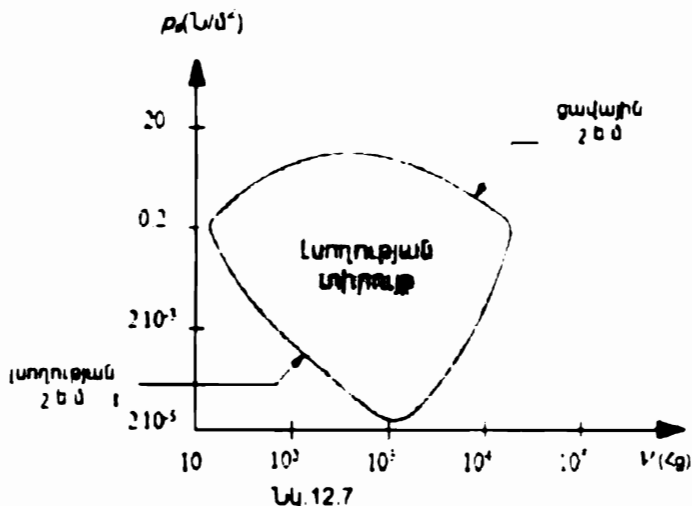
Ակուստիկայում սինուսոիդային ալիքներին համապատասխանող ծայները կոչվում են պարզ կամ *մաքուր տոներ*։ Սակայն իրական աղբյուրներն արձակում են առաձգական ալիքներ, որոնք հանդիսանում են տարբեր հաճախության և լայնության սինուսոիդային ալիքների խառնուրդ: Կախված ալիքում հաճախությունների սպեկտրից և նրանց համապատասխանող ինտենսիվությունների բաշխումից, ծայները բաժանում են երկու խմբի.

ա) *տոնային* կամ *երաժշտական ծայներ*, որոնք նկարագրվում են գծային սպեկտրով, ինչպիսիք են տարբեր երաժշտական գերծիքների արձակած ծայները:

բ) *աղմուկներ*, որոնք նկարագրվում են անընդհատ սպեկտրով, օրինակ՝ տեղանների խշշումը, փողոցի աղմուկը և այլն:

Գծային սպեկտրով ծայնի լսողական ընկալման ժամանակ առաջանում է քիչ թե շատ որոշակի ծայնային տոնի զգացում, որը կոչվում է *հիմնական տոն և բնութագրվում է գծային սպեկտրի նվազագույն* v, հաճա-

խոթյամբ: Սպեկտրի մյուս հաճախություններին համապատասխանող տոները կոչվում են *օբերտոններ* Պարբերական ծայնի դեպքում օբերտոնների հաճախությունները v_n -ի պատկերներն են, իսկ *օբերտոնները* կոչվում են *հարմոնիկներ*



5. Ուլտրաձայն Ուլտրաձայնը առածգական ալիք է, որի հաճախությունն ընկած է $2 \cdot 10^4 - 10^9$ Հց միջակայքում: $10^9 - 10^{13}$ Հց տիրույթում առածգական ալիքները կոչվում են *հիպերձայն*

Ուլտրաձայնի ստացման, գրանցման և ուսումնասիրման համար հիմնականում օգտագործում են *այեզոէլեկտրական և մագնիսատրիկցիոն* առաքիչներ և սովիչներ (փոխարկիչներ):

Պյեզոէլեկտրական առաքիչների աշխատանքը հիմնված է հակադարձ պյեզոէլեկտրական էֆեկտի վրա: Պրանց կիրառվում են $50 - 10^6$ Հց հաճախության ուլտրաձայնային ալիքների ստացման և ուսումնասիրման համար:

Մագնիսատրիկցիոն առաքիչները կիրառվում են ցածրհաճախային ուլտրաձայնի (մինչև $2 \cdot 10^5$ Հց) ստացման համար: Նրանց աշխատանքի հիմքում ընկած է մագնիսատրիկցիայի երևույթը՝ մագնիսական դաշտում ֆեռամագնիս նյութերի գծային չափսերի փոփոխությունը:

Ուլտրաձայնի ալիքներն օժտված են մի շարք առանձնահատկություններով: Նախ, լույսի պես, նրանք կարող են առաքվել նեղ ուղղորդված

փնջերի տեսքով, որոնք ստացել են *ուլտրաձայնային ճառագայթներ* անվանումը: Ղա հնարավոր է ուլտրաձայնի ալիքի կարճ երկարությունների շնորհիվ: Երկու միջավայրերի սահմանին ուլտրաձայնային ճառագայթների անդրադարձումն ու բեկումը կատարվում է համաձայն երկրաչափական օպտիկայի օրենքների: Ուստի ուլտրաձայնային ճառագայթների տարածման ուղղության փոփոխման, ֆոկուսացման համար օգտագործում են օպտիկականին համանման տարբեր ձևի ուլտրաձայնային հայելիներ, ոսպնյակներ, պրիզմաներ և այլ սարքեր:

Ուլտրաձայնի ուղղագիծ տարածման օրենքի վրա հիմնված են նրա տեխնիկական այնպիսի կարևոր կիրառություններ, ինչպիսիք են *ուլտրաձայնային լուկացիան և դեֆեկտոսկոպիան*: Ուլտրաձայնային լուկացիան կայանում է հետևյալում: Ուլտրաձայնի աղբյուրը արձակում է կարճատև ազդանշան, որը, հանդիպելով որևէ արգելքի, անդրադառնում է և վերադառնալով գրանցվում: Չափելով ուլտրաձայնի առաքման և արձագանք ազդանշանի գրանցման պահերի միջև Δt ժամանակը, կարելի է որոշել արգելքի է հեռավորությունը: $l = \Delta t \cdot c/2$, որտեղ c -ն ուլտրաձայնի արագությունն է միջավայրում: Չափելով նաև արձագանք ազդանշանի հաճախությունը, Ղալլերի օրենքի օգնությամբ կարելի է որոշել արգելքի տեսագծային արագությունը (արգելքի արագության պրոյեկցիան ազդանշանի տարածման ուղղությամբ): Ուլտրաձայնային հիդրոլուկատորները լայն կիրառություն ունեն ծովերում խորությունները չափելու, սուզանավեր հայտնաբերելու, ձկների խոշոր վտառները գրանցելու համար և այլն:

Օդում ուլտրաձայնային լուկացիան գործնականորեն անհնար է՝ նրանում ուլտրաձայնային ալիքների ուժեղ մարման պատճառով: Ուլտրաձայնը կիրառվում է պինդ մարմիններում արատների (խոռոչներ, ճեղքեր, կառուցվածքի անհամասեռություններ) հայտնաբերման համար: Այդ նպատակով օգտվում են տարբեր տիպի ուլտրաձայնային դեֆեկտասկոպներից: Ստվերային դեֆեկտասկոպում ուլտրաձայնային ճառագայթների աղբյուրն ու ընդունիչը տեղադրվում են դեմ դիմաց, ուսումնասիրվող մարմնի հակառակ կողմերում: Մարմնում ներքին արատները ցրելով ուլտրաձայնը, առաջացնում են «ուլտրաձայնային ստվեր»: Ճառագայթելով մարմինը տարբեր ուղղություններով, կարելի է որոշել արատների ձևը, չափսերը, նրանց բաշխումը: Սակայն փոքր արատները ստվեր չեն առաջացնում և չեն գրանցվում:

Առավել կիրառական է իմպուլսային դեֆեկտասկոպը, որի գործողության սկզբունքը նույնն է, ինչ ուլտրաձայնային լուկատորինը:

Հզոր ուլտրաձայնում առաջացող ծայնային մեծ ճնշումը հեղուկներում առաջացնում է *կավիտացիա*, անընդհատ ստեղծվում և վերանում են ներքին կարճատև խզումներ, որոնցում ճնշումը աճում է մինչև հարյուրավոր մթն արժեքները: Վերջինիս շնորհիվ ուլտրաձայնն օժտված է փշոող, մանրացնող հատկությամբ, որը լայն կիրառություն ունի տեխնիկայում, բժշկության, սննդի արտադրության մեջ և այլն:

ՀԵՂՈՒԿՆԵՐԻ ԵՎ ԳԱԶԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

§88. ՀԵՂՈՒԿՆԵՐԻ ԵՎ ԳԱԶԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Հեղուկները և գազերը իրենց առածգական հատկություններով էապես տարբերվում են պինդ մարմիններից: Եթե պինդ մարմնի դեֆորմացված վիճակը բնութագրվում է ներքին շոշափող և նորմալ լարումներով (§71), ապա հավասարակշռության վիճակում գտնվող հեղուկի կամ գազի վրա ազդող ուժերը կարող են նրանցում առաջացնել միայն *նորմալ լարումներ*: Ներքին շոշափող լարումների բացակայության հետևանքով հեղուկներն ու գազերն օժտված են *իսոտնությամբ*: Այդ պատճառով նրանք զուրկ են ծևի առածգականությունից և ընդունում են իրենց պարունակող անոթի ծնը:

Հեղուկների և գազերի համար ճիշտ է *Պասկալի օրենքը*. *հավասարակշռության վիճակում նորմալ լարումը (ճնշումը) հեղուկի ցանկացած կետում միատեսակ է բոլոր ուղղություններով*: Ռեժվար չէ համոզվել, որ Պասկալի օրենքը ներքին շոշափող լարումների բացակայության հետևանք է:

Հեղուկներում և գազերում *ներքին լարումներն ունեն ճնշման բնույթ* նրանք ճնշում են գործադրում իրենց պարունակող անոթի պատերի վրա Որոշ բացառիկ դեպքերում, օրինակ՝ հեղուկով լցված խողովակի երկու բաց ծայրերից հեղուկը փոքր արտաքին ճնշմամբ խողովակից դուրս բերելու փորձ կատարելիս, հեղուկում կարող է առաջանալ ձգման լարում (բացասական ճնշում): Սակայն շնորհիվ հեղուկներում լուծված գազերի առկայության, հեղուկի սյունը իսկույն տրոհվում է մասերի, այսինքն՝ խախտվում է միջավայրի անընդհատությունը (§71):

Գազերում ձգման լարումների բացակայության հետևանք է նրանց *անսահման ընդարձակվելու հատկությունը*. Գազը միշտ գրավում է անոթի լրիվ ծավալը, որքան էլ այն մեծ լինի: Ի տարբերություն գազերի, հեղուկները բնութագրվում են *սեփական ծավալով*, որը քիչ է փոփոխվում արտաքին ուժի ազդեցությունից:

Ընորիիվ մոլեկուլների փոխազդեցության, հեղուկն առաջացնում է ազատ մակերևույթ, կաթիլներ, որոնք պահվում են, այսպես կոչված, *մակերևութային լարվածության ուժերով* (կաթիլային հեղուկ)։ Սա հեղուկների և գազերի հատկությունների ամենատական տարբերությունն է։

Այսուհետև «հեղուկ» ասելով՝ կհասկանանք ինչպես հեղուկ, այնպես էլ գազ։ Մեխանիկայի այն բաժինը, որը զբաղվում է հեղուկների հավասարակշռության և շարժման հարցերով, կոչվում է *հիդրոդինամիկա*։

Փոքր դեֆորմացիաների նկատմամբ հեղուկի առածական հատկությունները բնութագրվում են *իզոթերմ սեղմելիության գործակից* կոչվող առածական հաստատունով։

$$\gamma_t = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_t = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t, \quad (88.1)$$

որտեղ ρ -ն հեղուկի խտությունն է, իսկ T -ն՝ ջերմաստիճանը։

Կաթիլային հեղուկները բնութագրվում են սեղմելիության գործակից շատ փոքր արժեքներով։ Այսինքն՝ բավականաչափ մեծ ճնշումները շատ քիչ են փոխում նրա սեփական ծավալը կամ խտությունը։ Շատ խնդիրներում կաթիլային հեղուկի սեղմելիությունը անտեսվում է, և հեղուկը համարվում *անսեղմելի*՝ որի կիրառելիության պայմանը կտրվի §101-ում։

Հավասարակշռության վիճակում հեղուկի ճնշումը ֆունկցիա է նրա խտությունից և ջերմաստիճանից։

$$P = P(\rho, T): \quad (88.2)$$

Այն կոչվում է *վիճակի հավասարում*, որի օգնությամբ կարելի է որոշել հեղուկի իզոթերմ սեղմելիության գործակիցը։

Շարժվող հեղուկում կարող են լրացուցիչ առաջանալ *ներքին շոշափող լարումներ*։ Սակայն դրանք պայմանավորված են ոչ թե սահից դեֆորմացիայով, որի նկատմամբ հեղուկն ընդհանրապես չի օւղաբերում առածական հատկություններ, այլ՝ հեղուկ մասնիկների *հարաբերական շարժմամբ*։ Շոշափող այդ լարումներն ունեն *ներքին շփման բնույթ* և կոչվում են *մածուցիկ լարումներ* (§28)։

Հիդրոդինամիկայում օգտվում են *իդեալական հեղուկ* վերացարկումից։ Ղա այն հեղուկն է՝ որի կամայական շարժումը *մածուցիկ լարումներ չի առաջացնում* այսինքն՝ նրանում էներգիայի դիսիպացիան բացակայում է։ Հակառակ դեպքում հեղուկը կանվանենք *մածուցիկ*՝ Նկատենք, որ իդեալական և մածուցիկ հեղուկներն իրարից տարբերվում են միայն շարժման վիճակում։ Հավասարակշռության վիճակում նրանք բնութագրվում են միայն ներքին նորմալ լարումներով։

**§89. ՀԱՄԱՆՔԻ ԲՈՒՅՈՒՄՆԵՐԸ: ՆՈՒՅՈՒՄԱՆ
ԱՄԱՆՑՑԱԼ**

Հեղուկի շարժումը (հոսանքը) մաթեմատիկորեն նկարագրվում է նրանում ճնշման (P), խտության (ρ) և արագության տարածաժամանակային կախվածությամբ:

$$P = P(r, t); \rho = \rho(r, t); v = v(r, t): \quad (89.1)$$

Ժամանակի և պահին (89.1) ֆունկցիաները տալիս են հեղուկում ճնշման, խտության և արագության դաշտերը: Հեղուկի տվյալ r կետում (89.1) – ն արտահայտում է հոսանքի բնութագրերի ժամանակային փոփոխությունը: Զանի որ տարբեր պահերին տվյալ կետով անցնում են տարբեր հեղուկ մասնիկներ, ապա ֆիքսված կետում (89.1)–ը չի ներկայացնում կոնկրետ հեղուկ մասնիկի ճնշման, խտության և արագության ըստ ժամանակի փոփոխությունը: Այդ պատճառով $\partial P / \partial t$, $\partial \rho / \partial t$, $\partial v / \partial t$ ածանցյալները տվյալ r կետում չեն վերաբերում որևէ կոնկրետ հեղուկ մասնիկի, այլ արտահայտում են այդ կետում հեղուկի համապատասխան բնութագրերի լոկալ փոփոխությունները:

Հեղուկի ճնշման, խտության և արագության ըստ ժամանակի լրիվ փոփոխությունները որոշելու համար անհրաժեշտ է հաշվի առնել հեղուկ մասնիկի $r = r(t)$ շարժման օրենքը: Այդ դեպքում, օրինակ, dt ժամանակում մասնիկի արագության կրած փոփոխությանը կլինի՝

$$dv = dt \frac{\partial v}{\partial t} + dx \frac{\partial v}{\partial x} + dy \frac{\partial v}{\partial y} + dz \frac{\partial v}{\partial z}:$$

Բաժանելով ստացված արտահայտության երկու մասերը dt -ի և հաշվի առնելով, որ $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$, հեղուկ մասնիկի արագացման համար կստանանք՝

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v: \quad (89.2)$$

Նման ձևով հեղուկի խտության, ճնշման և ընդհանրապես, ցանկացած ֆիզիկական բնութագրի ժամանակային ածանցյալի համար կունենանք՝

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \nabla \rho: \quad (89.3)$$

Ստացված (89.2) և (89.3) առնչություններում

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \quad (89.4)$$

գործողությունը կոչվում է *Սթրոքի օպերատոր* կամ *նյութական ածանցյալ*։

Ֆիզիկական մեծության նյութական ածանցյալը կազմված է երկու մասից. ըստ ժամանակի՝ *յուրաքանչյուր*, և ըստ կոորդինատի, այսպես կոչված, *կոնվեկտիվ փոփոխություններից*։ Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում Սթրոքի օպերատորն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} :$$

Հեղուկի վարքը բնութագրվում է հինգ մեծություններով՝ ρ, p, ν ։ Հետևաբար, հեղուկի շարժումը նկարագրելու համար անհրաժեշտ է ունենալ հինգ հավասարում։ Դրանցից մեկը վիճակի (88.2) հավասարումն է։ Քանի որ *իդեալական հեղուկում բացակայում է էներգիայի դիսիպացիան*, ապա *նրանում պրոցեսներն ադիաբատ են*։ Այդ դեպքում վիճակի հավասարումը պարզեցվում է.

$$P = P(\rho) : \quad (89.5)$$

Այուս հավասարումներն արտահայտում են *զանգվածի պահպանման օրենքը* (հոսանքի անընդհատության հավասարումը §90) և *հեղուկի շարժման էջերի հավասարումը* (§91), որը Նյուտոնի երկրորդ օրենքի արտահայտությունն է իդեալական հեղուկի համար։

§90. ՀՈՍԱՆՔԻ ԱՆՔԵՆԻՈՒՄՑԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

Հեղուկի հոսանքում մտուկի առանձնացնենք տարածության կամայական V ծավալ։ Ժամանակի ցանկացած փոքր հատվածում դիտարկվող ծավալ ներհոսում է ինչ-որ քանակությամբ հեղուկ և արտահոսում, ընդհանրապես ասած, այլ քանակությամբ հեղուկ։ Դրա շնորհիվ դիտարկվող ծավալում պարփակված հեղուկի

$$m = \int_V \rho dV$$

զանգվածը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է։ Ծավալը պարփակող մակերևույթի $d\Sigma$ տարրով հեղուկի հոսքը հետևյալ սկալար արտադրյալն է.

$$dQ = \rho \mathbf{v} d\Sigma, \quad (90.1')$$

որը միավոր ժամանակում $d\Sigma$ -ով հոսող հեղուկի քանակն է (նկ. 13.1): Դիտարկվող ծավալը պարփակող մակերևույթով հեղուկի լրիվ հոսքն ստանալու համար գումարենք մակերևույթի բոլոր տարրերով հեղուկի հոսքերը



Նկ. 13.1

$$Q = \oint \rho v d\Sigma: \quad (90.1)$$

Եթե $Q > 0$, ապա դիտարկվող ծավալից տեղի ունի հեղուկի *արտահոսք*, հակառակ դեպքում՝ *ներհոսք*:

Այստեղ ինտեգրալի նշանի օղակը ցույց է տալիս, որ ինտեգրումը կատարվում է փակ մակերևույթով:

Դիտարկվող ծավալում պարփակված հեղուկի զանգվածի նվազումը միավոր ժամանակում հավասար է

$$-\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV: \quad (90.2)$$

Չանցվածի պահպանման օրենքը պահանջում է, որ միավոր ժամանակում դիտարկվող ծավալում զանգվածի (90.2) նվազումը հավասար լինի այդ ընթացքում ծավալը պարփակող մակերևույթով հեղուկի (90.1) հոսքին, որտեղից

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \oint \rho v d\Sigma = 0: \quad (90.3)$$

Գրված առնչությունը *հոսանքի անխզելիության (անընդհատության) հավասարումն է ինտեգրալ տեսքով*։ Ստանանք այդ հավասարումը *դիֆերենցիալ տեսքով*: Դրա համար օգտվենք հետևյալ առնչությունից.

$$\oint_{\Sigma} A d\Sigma = \int_V \nabla A dV, \quad (90.4)$$

որը կապ է հաստատում որևէ ծավալով, և այդ ծավալը պարփակող մակերևույթով ինտեգրալների միջև: Այն կոչվում է *Գաուս-Օստրոպոդոսկու բանաձև*, որը ճիշտ է թե՛ սկալար, թե՛ վեկտորական և թե՛ թենզորական ֆունկցիաների համար:

Օգտվելով (90.4)-ից, անընդհատության (90.3) հավասարումը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$\oint \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) \right] dV = 0:$$

Զանի որ այս ինտեգրալը զրո է կամայական ծավալով ինտեգրելիս, ապա զրոյի պետք է հավասար լինի ենթաինտեգրալ արտահայտությունը.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = 0 : \quad (90.5)$$

Սա անընդհատության հավասարումն է դիֆերենցիալ տեսքով. Այստեղ ρv մեծությունը *հոսանքի խտությունն* է, որը հոսանքին ուղղահայաց միավոր մակերեսով միավոր ժամանակում հոսող հեղուկի քանակն է.

§91. ԷՅԼԵՐԻ ՆԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

Տարբերվում են հեղուկում գործող *ծավալային* և *մակերևութային* ուժեր: *Ծավալային ուժերը պայմանավորված են արտաքին ուժադաշտերի ազդեցությամբ և կիրառված են միջավայրի բոլոր մասնիկների վրա* օրինակ, ծանրության և էլեկտրամագնիսական ուժերը: Եթե միջավայրի միավոր ծավալի վրա ազդող ծավալային ուժը նշանակենք f , ապա V ծավալի վրա ազդող *ծավալային ուժը* կլինի՝

$$F_v = \int_V f dV. \quad (91.1)$$

Ծանրության ուժի դաշտում ρ խտությամբ հեղուկի միավոր ծավալի վրա ազդող ծավալային ուժը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով.

$$f = \rho g. \quad (91.2)$$

Մակերևութային ուժերը կիրառված են դիտարկվող ծավալի արտաքին մակերևույթը կազմող մասնիկների վրա հարևան ծավալների կամ պատերի կողմից: Օրինակ, անոթում լցված հեղուկի ազատ մակերևույթի վրա ազդում է մթնոլորտային ճնշման ուժը, իսկ պատերի կողմից հեղուկը ենթարկվում է ռեակցիայի մակերևութային ուժերի ազդեցությանը:

Ստոկի առանձնացնենք իդեալական հեղուկում V ծավալ և որոշենք նրա վրա հարևան ծավալների կողմից ազդող մակերևութային ուժը (նկ. 13.2): Մակերևութի dS տարրի վրա ազդում է $-PdS$ ճնշման ուժը, որտեղ P միևնույն նշանը ցույց է տալիս, որ ուժը հակառակ է ուղղված մակերևութի արտաքին n նորմալին (հիշենք, որ $dS = nd\Sigma$) *Լրիվ մակերևութային ուժը* հավասար է տարրական ճնշման ուժերի վեկտորական գումարին.



Նկ 13.2

$$F_z = - \oint_{\Sigma} P d\Sigma : \quad (91.3)$$

Փակ մակերևույթով ազդող մակերևութային ուժերը հաղորդվում են ծավալի բոլոր հեղուկ մասնիկներին, առաջացնելով *ծավալային ուժ* $\vec{F}$ ։ Մաթեմատիկորեն դա արտահայտվում է Գաուս-Օստրոպրադսկու (90.4) բանաձևով.

$$\oint_{\Sigma} P d\Sigma = \int_V P dV : \quad (91.4)$$

Համեմատելով ստացված արդյունքը (91.1) արտահայտության հետ տեսնում ենք, որ փակ մակերևութի վրա ազդող ճնշումը հեղուկի միավոր ծավալի վրա առաջացնում է

$$\nabla P = \text{grad } P \quad (91.5)$$

ծավալային ուժ, որը կոչվում է *ճնշման գրադիենտային ուժ*։ Հետևաբար, հեղուկի միավոր ծավալը ենթարկվում $\vec{f} = \nabla P$ համագոր ուժի ազդեցությանը, որը համաձայն Նյուտոնի երկրորդ օրենքի, հեղուկի ρ զանգվածին հաղորդում է արագացում.

$$\rho \frac{dv}{dt} = \vec{f} = \nabla P : \quad (91.6)$$

Սա *իդեալական հեղուկի շարժման էլիերի հավասարումն է*, որի ծախմասում d/dt -ն նյութական (89.4) ածանցյալն է։ Մասնավոր դեպքում երկրի ծանրության ուժի դաշտում շարժվող հեղուկի համար կունենանք՝

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla P. \quad (91.7)$$

որտեղ հաշվի է առնված (91.2) բանաձևը։

Էլիերի հավասարումը արագության նկատմամբ առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումը ներկայացնում է ֆունկցիաների ընտանիք։ Յուրաքանչյուր կոնկրետ հոսանք բնութագրվում է *սկզբնական և եզրային պայմաններով*։ *Սկզբնական պայմանը արագությունների դաշտն է սկզբնական պահին*.

$$\vec{v}(\vec{r}, t)|_{t=0} = \vec{v}_0(\vec{r}) : \quad (91.8)$$

Գործնականում հեղուկի շարժումներն ընթանում են որոշակի մարմիններով սահմանափակված տիրույթներում (խողովակներում, ջրամբարներում, ջրանցքներում և այլն)։ *Իդեալական հեղուկի շարժման եզրա-*

ին պայմանը արտահայտում է պատերի անթափանցելիությունը, այսինքն՝ անշարժ պատի (հեղուկին սահմանակցող պինդ մարմինների) վրա հեղուկի արագության նորմալ (պատի մակերևույթին ուղղահայաց) բաղադրիչը պետք է հավասար լինի զրո:

$$v(r, t)|_{\Sigma} = 0: \quad (91.9a)$$

Եթե պատը (պինդ մարմինը) շարժվում է ինչ-որ u արագությամբ, ապա եզրային (91.9ա) պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$v(r, t)|_{\Sigma} = u_n|_{\Sigma}, \quad (91.9b)$$

որտեղ u_n -ը պատի արագության բաղադրիչն է մակերևույթի նորմալի ուղղությամբ:

Ելելի (91.8) հավասարումը նկարագրում է հեղուկի շարժումը հաշվարկի ինտեգրալ համակարգում: Հաշվարկի *կամայական ոչ ինտեգրալ համակարգում հեղուկի շարժման հավասարումն* ստանալու համար (91.6) -ի աջ մասում անհրաժեշտ է ավելացնել հեղուկի միավոր ծավալի վրա ազդող ինտեգրալի ուժերը (§54).

$$\rho \frac{dv}{dt} = f - \nabla P - \rho[r\dot{\Omega}] + \rho\Omega^2 r_{\perp} - 2\rho[v\Omega], \quad (91.10)$$

որտեղ r -ը հեղուկ մասնիկի շառավիղ-վեկտորն է:

Հեղուկի հարաբերական շարժումը նկարագրող (91.10) հավասարման լուծումները նույնպես պետք է բավարարեն (91.8) և (91.9) սկզբնական ու եզրային պայմաններին:

Երկու յիստոնվող հեղուկների շարժման դեպքում նրանց բաժանման սահմանի վրա պետք է անընդհատ լինեն ինչպես արագության նորմալ բաղադրիչը, այնպես էլ ճնշումը:

$$v_{1n}|_{\Sigma} = v_{2n}|_{\Sigma}, \quad P_1|_{\Sigma} = P_2|_{\Sigma}: \quad (91.11)$$

Վերջինը Նյուտոնի երրորդ օրենքի անմիջական հետևանքն է:

1. Հեղուկի հավասարակշռության պայմանները Հիդրոստատիկան ուսումնասիրում է հեղուկների ինչպես նաև նրանցում գտնվող մարմինների հավասարակշռության պայմանները: Հիդրոստատիկայի հիմնական հավասարումներն ստանալու համար անհրաժեշտ է (89.5), (90.5) և (91.6) հավասարումներում տեղադրել $v = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad f' = \frac{1}{\rho} \nabla P; \quad P = P(\rho), \quad (92.1)$$

որտեղ $f' = f/\rho$ -ն հեղուկի միավոր զանգվածի վրա ազդող ուժն է

Անընդհատության հավասարումից ստացված առաջին պայմանը ցույց է տալիս, որ հավասարակշռության վիճակում հեղուկի խտությունը կարող է կախված լինել միայն կոորդինատից $\rho = \rho(r)$: Երկրորդը հեղուկում գործող ուժերի համակշռման պայմանն է: Կամայական $\langle \nabla \rangle$ -ում հեղուկի հարաբերական հավասարակշռությունը նկարագրվում է հետևյալ հավասարումով.

$$f' - \frac{1}{\rho} \nabla P - a_0 - [\Omega \times r + \Omega^2 r] = 0: \quad (92.2)$$

Հաշվարկի իներցիալ համակարգում ուժերի համակշռման պայմանից բխում է կարևոր հետևություն: Ընդդիմ իդեալական հեղուկի՝ $P = P(\rho)$ առնչության $(1/\rho)\nabla P$ անդամը կարելի է ներկայացնել կոորդինատից կախված սկալար ֆունկցիայի գրադիենտի տեսքով. $(1/\rho)\nabla P = \nabla \omega$, որտեղ ω -ն կոչվում է *էնթալպիա*: Հետևաբար, ուժերի համակշռման պայմանի ապահովման համար անհրաժեշտ է, որ հեղուկի վրա ազդող ծավալային ուժը նույնպես լինի կոորդինատից կախված սկալար ֆունկցիայի գրադիենտ: Դա հնարավոր է, եթե հեղուկը գտնվում է արտաքին պոտենցիալային ուժադաշտում: Ուրեմն, *հեղուկի հավասարակշռությունը հնարավոր է եթե արտաքին ուժադաշտը պոտենցիալային է*: Գրավիտացիոն դաշտում հեղուկի հավասարակշռությունը նկարագրվում է

$$-\nabla \varphi(x, y, z) = \frac{1}{\rho(x, y, z)} \nabla P(x, y, z); \quad P = P(\rho) \quad (92.3)$$

հավասարումներով, որտեղ $\varphi(x, y, z)$ -ը դաշտի պոտենցիալն է:

Հեղուկի հավասարակշռության վիճակը նկարագրվում է որոշակի մակերևույթներով. Դրանք հաստատուն խտության, հաստատուն ճնշման և գրավիտացիոն դաշտի համապոտենցիալ մակերևույթներն են: Հեղու-

կում հաստատուն ճնշման մակերևույթները հաճախ անվանում են *մակարդակային մակերևույթներ* կամ պարզապես *մակարդակներ*: Ընդհանուր դեպքում հեղուկում $\rho = \text{const}$, $P = \text{const}$ մակերևույթները չեն համընկնում համապատասխան մակերևույթների հետ:

2. Համասեռ հեղուկի հավասարակշռությունը ջրամբարում: Տվյալ դեպքում $\rho = \text{const}$, այնպես որ հավասարակշռությունը նկարագրվում է

$$\nabla P = \rho \mathbf{g} \quad (92.4)$$

հավասարումով:

Ընտրենք ջրամբարի ազատ մակերևույթը որպես ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի XY հարթություն, իսկ Z առանցքն ուղղենք $\mathbf{g}$ ուղղությամբ՝ $\mathbf{g}(0,0,g)$: Այդ դեպքում (92.4) հավասարումը կներկայացվի հետևյալ կերպ.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho g: \quad (9)$$

Առաջին երկուսից ստանում ենք, որ համասեռ ծանրության ուժադաշտում հաստատուն ճնշման մակերևույթները հորիզոնական հարթություններ են: Ծանրության ուժադաշտում հեղուկի սեփական կշռով պայմանավորված ճնշումը

կոչվում է *հիդրոստատիկ ճնշում*: Այնպես որ, հիդրոստատիկ ճնշումը կախված է միայն ուղղաձիգ z կոորդինատից: Ինտեգրելով երրորդ հավասարումը, ստանում ենք

$$P(z) = \rho g z + C,$$

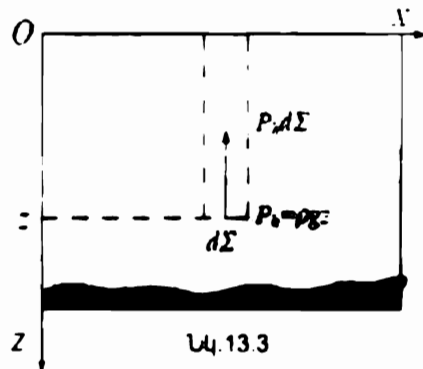
որտեղ C -ն ինտեգրման հաստատունն է: Այն որոշվում է հեղուկի որևէ կետում ճնշման արժեքով: Ջրամբարի ազատ մակերևույթը գտնվում է մթնոլորտային P_0 ճնշման տակ. $P(0) = P_0 = C$, հետևաբար՝

$$P(z) = \rho g z + P_0, \quad (92.6)$$

որտեղ հեղուկի *սեփական կշռով պայմանավորված ճնշումը* որոշվում է

$$P(z) = \rho g z \quad (92.7)$$

բանաձևով (*հիդրոստատիկ ճնշում*): Ուրեմն, անկախ ջրամբարի (անոթի)



ձևից, չափսերից, հեղուկի հիդրոստատիկ ճնշումը կախված է դիտարկվող կետի խորությունից և հեղուկի խտությունից: Պրանով է պայմանավորված հայտնի *հիդրոստատիկ պարադոքսը*, երբ հավասար հիմքի Σ մակերես և հեղուկի սյան նույն h բարձրությունն ունեցող անոթների հատակին հեղուկը ճնշում է միևնույն $\rho g h \Sigma$ ուժով, որը նկ.13.4 -ի առաջին անոթում հեղուկի կշիռն է (բացատրեք):



Նկ 13.4

3. *Պտտվող հեղուկի հարաբերական հավասարակշռությունը:* Ղիցուք գլանաձև անոթում հեղուկը հաստատուն Ω անկյունային արագությամբ պտտվում է Z առանցքի շուրջը (նկ.13.5): Հեղուկի հարաբերական հավասարակշռությունը երկրի ծանրության ուժի դաշտում նկարագրվում է

$$\rho \mathbf{g} - \nabla P + \rho \Omega^2 \mathbf{r}_\perp = 0 \quad (92.8)$$

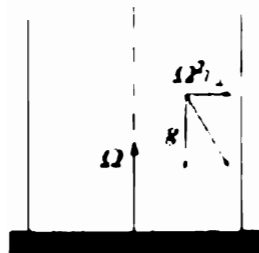
հավասարումով, որը X, Y, Z առանցքներով կտա.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \Omega^2 x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \Omega^2 y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (92.9)$$

Ինտեգրելով այս հավասարումները, կունենանք՝

$$P(x, y, z) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z + C, \quad (92.10)$$

որտեղ C -ն ինտեգրման հաստատունն է, իսկ $r^2 = x^2 + y^2$: Ուրեմն, պտտվող հեղուկում $P = \text{const}$ մակարդակային մակերևույթները պտտման պարաբոլիդներ են



$$z = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 + C' \quad (92.11)$$

Ջանի որ հեղուկի ազատ մակերևույթը նույնպես մակարդակային մակերևույթ է, ապա *պտտվող հեղուկի ազատ մակերևույթը պետք է ընդունի պտտման պարաբոլիդի տեսք*: Պրա հետևանքով հիդրոստատիկ ճնշման բաշխումը անոթի

հատակին դառնում է անհամասեռ: Այն ամենափոքրն է անոթի հատակի կենտրոնական մասում և աճում է պտտման առանցքից հեռանալիս: Սակայն դժվար չէ ուղղակի հաշվարկով համոզվել, որ անոթի հատակին հեղուկի գործադրած ճնշման լրիվ ուժը հավասար է հեղուկի կշռին:

§93. ԲԱՐՈՄԵՏՐԱԿԱՆ ԲԱՆԱԶԵՎԵՐ

Ուսումնասիրենք մթնոլորտի մեխանիկական հավասարակշռությունը Երկրի ծանրության ուժի դաշտում: Երկրի մակերևույթին մոտ տիրույթներում օդի հավասարակշռության դիտարկման ժամանակ կարելի է անտեսել ծանրության ուժի արագացման կախումը կոորդինատից: Սակայն օդի խտության կախվածությունը կոորդինատից չի կարելի անտեսել: Ուղղելով ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի Z առանցքը ուղղածից վեր, իսկ XY հարթությունը՝ Երկրի մակերևույթով, կգրենք.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g: \quad (93.1)$$

Ուրեմն, հավասարակշռության վիճակում հորիզոնական ուղղությամբ մթնոլորտի ճնշումը չի փոփոխվում: Ուղղածից ուղղությամբ ճնշման և խտության փոփոխման օրենքներն ստանալու համար անհրաժեշտ է գրել նաև *վիճակի հավասարումը*: Ընդհանուր դեպքում մթնոլորտային օդի վիճակի հավասարումը ներկայացնում է ճնշման, խտության, ջերմաստիճանի, օդի տարրեր բաղադրիչների ֆիզիկական բնութագրերի, մասնավորապես խոնավության միջև բարդ ֆունկցիոնալ կախվածություն: Սակայն կոպիտ մոտավորությամբ կարելի է մթնոլորտի ոչ մեծ տիրույթների ջերմադինամիկական վարքը նկարագրել իդեալական գազի վիճակի

$$P = \rho RT : \mu \quad (93.2)$$

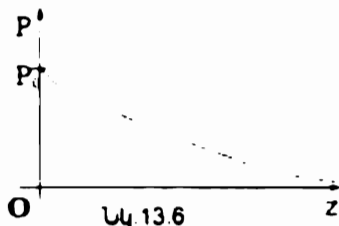
հավասարումով, որտեղ μ -ն մոլային զանգվածն է, R -ը գազային հաստատունը.

$$R = 8.315 \text{ Գ.մոլ} \quad (93.3)$$

Մթնոլորտի T ջերմաստիճանը ըստ բարձրության կրում է բարդ փոփոխություններ. նախ նվազում է, այնուհետև աճում, նորից նվազում, նորից աճում: Ուսշանակում է, որ մթնոլորտը չի գտնվում ջերմային հավասարակշռության վիճակում. հակառակ դեպքում այն պետք է բնութագրվեր $T = \text{const}$ արժեքով:

Հաստատուն ջերմաստիճանի ենթադրությամբ մթնոլորտի մոդելը

կոչվում է *իզոթերմ մթնոլորտ*: Սա մոտավորություն է, որը մթնոլորտի ոչ հաստ շերտերի համար տալիս է փոքրերի հետ համընկնող արդյունքներ Հավասարակշռության (93.1) և վիճակի (93.2) հավասարումներից հետևում է, որ $P=P(z)$ դեպքում խտությունը նույնպես կախված է միայն z -ից: Նշված հավասարումներից ստանում ենք.



$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dz,$$

որի ինտեգրումը *իզոթերմ մթնոլորտի* համար տալիս է բարձրությունից ճնշման հետևյալ կախումը.

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} z}. \quad (92.4)$$

Այստեղ ինտեգրելիս ենթադրվել է, որ Երկրի մակերևույթին $P(0)=P_0$. Օգտվելով (92.2)-ից, խտության բաշխման համար կստանանք

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} z}, \quad (93.5)$$

որտեղ

$$\rho_0 = \rho(0) = \frac{\mu P_0}{RT}, \quad (93.6)$$

կապ է հաստատում Երկրի մակերևույթի վրա ճնշման և խտության միջև. Ուրեմն, *իզոթերմ մթնոլորտում* ճնշումն ու խտությունը բարձրության հետ նվազում են էքսպոնենտալին օրենքով (նկ.13.6): (93.4) և (93.5) օրենքները կոչվում են *բարոմետրական բանաձևեր*:

Նկատենք, որ

$$h = RT/\mu g \quad (93.7)$$

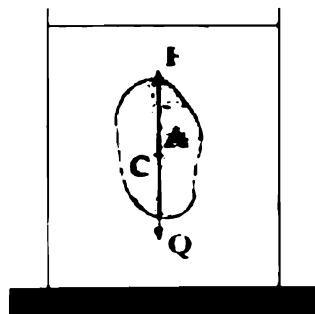
բարձրության վրա օդի ճնշումն ու խտությունը նվազում են e անգամ: (93.6) և (93.7) առնչություններից ստացվում է $P_0 = \rho_0 g h$, որը ρ_0 հաստատուն խտությամբ հեղուկի հիդրոստատիկ ճնշումն է h խտրության վրա. Ուրեմն Երկրի մակերևույթի վրա մթնոլորտի ճնշումը նույնն է, ինչ h բարձրություն, ρ_0 խտություն ունեցող համասեռ օդի սյան ճնշումը: Այդ պատճառով (93.7)-ը կոչվում է *համասեռ մթնոլորտի բարձրություն*: Շնորհիվ միջինում $\mu = 0.029$ կգ/մոլ, իսկ $T = 273$ Կ, կստանանք $h \approx 8.4$ կմ:

Մթնոլորտում ճնշման և խտության բաշխումը կարելի է առանց դժվար

որության որոշել նաև այն դեպքում, եթե հայտնի է $T = T(z)$ կախվածությունը. Սակայն օդի ջերմաստիճանի ոչ բոլոր բաշխումներն են, որ կարող են հավասարակշռված լինել մթնոլորտում, քանի որ անհամասեռ տաքացվածության հետևանքով օդում անընդհատ ընթանում են ջերմության տեղափոխման պրոցեսներ: Ջերմաստիճանի ոչ մեծ գրադիենտների դեպքում օդում ջերմության տեղափոխումը կատարվում է մոլեկուլային մեխանիզմով *ջերմհաղորդականությամբ*, որը չի խախտում մթնոլորտի մեխանիկական հավասարակշռությունը: Ջերմաստիճանի մեծ փոփոխությունների դեպքում ջերմահաղորդումը կրում է *կոնվեկցիայի* բնույթ, առաջացնելով օդային զանգվածների մակրոսկոպիկ շարժումներ: Այնպես որ մթնոլորտի մեխանիկական հավասարակշռությունը կայուն է ջերմաստիճանի այնպիսի գրադիենտների դեպքում, որոնք չեն առաջացնում կոնվեկցիա. Պարզվում է, որ դրա համար բարձրության հետ ջերմաստիճանի նվազման արագությունը պետք է ավելի փոքր լինի ρ/c_p մեծությունից, որտեղ c_p -ն օդի միավոր զանգվածի ջերմունակությունն է հաստատուն ճնշման դեպքում: Այս պնդումը ճիշտ է, երբ մթնոլորտի թերմոդինամիկական վիճակը նկարագրվում է իդեալական գազի վիճակի հավասարումով:

§94. ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿԵՌՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ

Հավասարակշռության վիճակում գտնվող հեղուկում մտովի առանձնացնենք կամայական փակ մակերևույթ (նկ.13.7): Նրանով պարփակված հեղուկը նույնպես գտնվում է հավասարակշռության մեջ: Հետևաբար, դիտարկվող ծավալում հեղուկի ծանրության ուժը համակշռված է այդ ծավալը պարփակող մակերևույթի վրա հեղուկի կողմից ազդող ճնշման ուժերի համագործով $F = -Q$: Դիտարկվող ծավալով հեղուկի հավասարակշռությունը պահանջում է, որ գրո լինի նաև այդ ուժերի գումարմունքը: Այստեղից հետևում է, որ *համագործող կիրառված է հեղուկի ընտրված մասի իներցիայի C կենտրոնում* Համասեռ հեղուկի իներցիայի կենտրոնը համընկնում է նրա երկրաչափական A կենտրոնի հետ



Նկ 13.7

(նկ 13.7): Եթե այժմ առանձնացված ծավալով հեղուկը փոխարինենք նույն երկրաչափական ձևի պինդ մարմնով, ապա չրջապատող հեղուկը պինդ մարմնի մակերևույթի վրա կառաջացնի ճնշման ուժերի նույն բաշխումը: Հետևաբար, *համասեռ հեղուկում ընկղմված մարմնի վրա ազդում է ուղղաձիգ վեր ուղղված, մարմնի երկրաչափական կենտրոնում կիրառված ուժ, որը մեծությամբ հավասար է մարմնի արտանդած հեղուկի կշռին* (Արքիմեդի օրենք): Այդ դուրս մղող ուժը կոչվում է *Արքիմեդյան ուժ*:

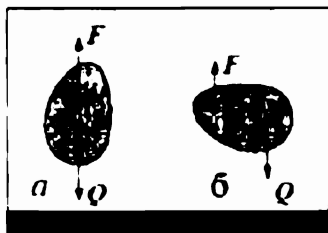
Եթե մարմնում զանգվածն անհամասեռ է բաշխված, ապա նրա իներցիայի C կենտրոնը չի համընկնի իր երկրաչափական A կենտրոնի հետ: Հեղուկում նման մարմնի հավասարակշռության համար (լրիվ կամ մասամբ ընկղմված վիճակում) անհրաժեշտ է, որ.

- *մարմնի կշիռը մեծությամբ հավասար լինի նրա ընկղմված մասի ծավալով հեղուկի կշռին*.

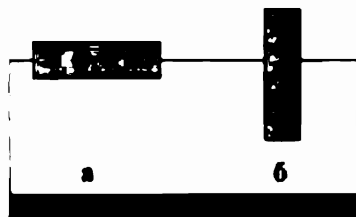
- *մարմնի իներցիայի C կենտրոնը և ընկղմված մասի երկրաչափական A կենտրոնը գտնվեն նույն ուղղաձիգի վրա*:

Սակայն, որպեսզի լողացող մարմնի հավասարակշռությունը կայուն լինի, անհրաժեշտ է լրացուցիչ պայմանի իրականացում:

Նախ դիտարկենք հեղուկում լրիվ ընկղմված մարմնի հավասարակշռության կայունությունը: Նկ 13.8-ում պատկերված մարմինը հեղուկում ցանկացած դիրքով ընկղմելիս, ի վերջո ընդունում է a դիրքը, երբ *իներցիայի C կենտրոնը գտնվում է երկրաչափական A կենտրոնից ներքև*: Այս դիրքից կամայական շեղում առաջ է բերում ուժագույձ (b դիրքը), որի մոմենտը ստիպում է մարմնին ընդունել a դիրքը: Ուրեմն *լիովին ընկղմված մարմնի հավասարակշռությունը կայուն է, եթե նրա իներցիայի կենտրոնն ընկած է երկրաչափական կենտրոնից ցած*:



Նկ 13.8



Նկ 13.9

Հեղուկում *մասամբ* ընկղմված վիճակում լողացող մարմնի հավասարակշռությունը որոշ դեպքերում կայուն է, երբ C կետը A կետից վեր է դասավորված: Դա սովորաբար առկա է նավերում: Նկ. 13.9-ում պատկերված

են $p \approx 0,5 \text{ գ/սմ}^3$ խտություն ունեցող փայտյա չորսուի հավասարակշռության երկու տարբեր դիրքեր: Ակնհայտ է, որ երկու դիրքում էլ ինեքցիայի կենտրոնը ընկղմված մասի երկրաչափական A կենտրոնից վեր է տեղավորված: Սակայն փորձը ցույց է տալիս, որ հավասարակշռությունը կայուն է միայն α դեպքում (նկ.13.9):

§95. ՄՏԱՑԻՈՆԱՐ շՈՄԱՆՔՆԵՐ: ԲԵՌՆՈՒԼԻԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

1. Հոսանքի գիծ: Եթե հեղուկի խտության և ճնշման սկալար դաշտերը ժամանակի ցանկացած պահին բնութագրվում են հաստատուն խտության և ճնշման մակերեւոյթներով, ապա արագությունների դաշտը բնութագրում են *հոսանքի գծերով*: *Դրանք այն գծերն են որոնց ցանկացած կետում տարված շոշափողը ունի այդ կետում հեղուկ մասնիկի արագության ուղղությունը* (նկ.13.10): Եթե հեղուկում արագությունների դաշտը անկախ է ժամանակից, այսինքն նրանում հոսանքի գծերը չեն փոփոխվում ժամանակի ընթացքում, ապա հեղուկի շարժումը կոչվում է *ստացիոնար*: Ստացիոնար հոսանքի ցանկացած կետում հեղուկի ֆիզիկական բնութագրերը անկախ են ժամանակից, այսինքն նրանց լոկալ ածանցյալները ըստ ժամանակի զրո են: Ուրեմն, ստացիոնար հոսանքներում հեղուկ մասնիկի ֆիզիկական բնութագրերը կախված են հեղուկում նրա գրաված դիրքից:

Ստացիոնար շարժվող հեղուկում հոսանքի գծերը հեղուկ մասնիկների հետագծերն են: Դա հետևում է հենց հոսանքի գծի սահմանումից: Արագությունների դաշտի միարժեքությունից հետևում է, որ *հոսանքի գծերը չեն կարող միմյանց հետ հատվել*:

2. Բեռնային հավասարումը: Հեղուկի շարժման էլլերի հավասարումը ստացիոնար հոսանքների դեպքում հեշտ ինտեգրվում է, եթե հայտնի է հոսանքի գիծը: Այդ դեպքում կարող ենք օգտվել նյութական կետի շարժման նկարագրության բնական եղանակից (§5): Ներմուծելով հոսանքի գծին շոշափող r միավոր վեկտորը, պրոյեկտենք էլլերի հավասարումը նրա վրա, այսինքն սկալարորեն բազմապատկենք այն r -ով (նկ. 13.10)։

$$\rho \tau \frac{dv}{dt} = -r \nabla P + r g \rho : \quad (95.1)$$

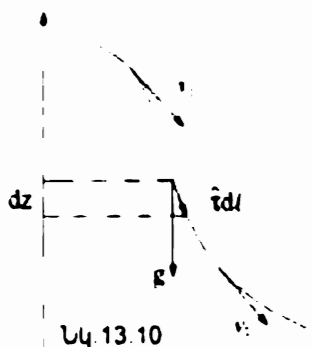
Հոսանքի գծով շարժվող հեղուկ մասնիկի արագությունը կախված է ժամանակից միայն աղեղային կոորդինատի միջոցով. $v = v(r(t))$: Այնպես

որ օգտվելով (5.9) արտահայտությունից և հաշվի առնելով, որ $r\tau = l$, $r\pi = 0$, կստանանք:

$$r \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} + \pi r \frac{v^2}{R} = v \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \quad (95.2)$$

Օգտվելով նաև

$$r \cdot \nabla p = \frac{dp}{dl}, \quad r \cdot g = g \cos \alpha = -g \frac{dz}{dl} \quad (95.3)$$



ամենչություններից, որտեղ $-dz$ -ը հեղուկ մասնիկի տեղափոխության պրոյեկցիան է ուղղածից Z առանցքի վրա (Նկ.13.10), և ենթադրելով $\rho = \text{const.}$ (95.1) հավասարումը կներկայացնենք հետևյալ կերպ.

$$\frac{d}{dt} \left(P + \rho g z - \rho \frac{v^2}{2} \right) = 0 \quad (95.4)$$

Ստացված հավասարումից հետևում է, որ հոսանքի գծի երկայնքով փակագծի արտահայտությունը մնում է անփոփոխ.

$$P + \rho g z + \rho v^2 / 2 = B, \quad (95.5)$$

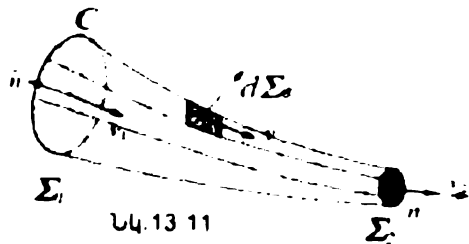
որտեղ B , հաստատունը տարբեր է հոսանքի տարբեր գծերի համար: (95.5)-ը համաառ ինտեգրումը ստացվում է շարժման *Բեռնուլիի հավասարումն* է. Ուրեմն, թեև ρ, z, v մեծությունները հոսանքի գծի երկայնքով կարող են փոփոխվել, բայց (95.5) մեծությունը մնում է հաստատուն:

Բեռնուլիի հավասարման մեջ բոլոր գումարելիներն ունեն ճնշման չափողականություն: Շնորհիվ P -ն կոչվում է *ստատիկ ճնշում*, $\rho v^2 / 2$ -ը *դինամիկ ճնշում*, իսկ $\rho g z$ -ը *կշռային կամ հիդրոստատիկ ճնշում*:

Բեռնուլիի հավասարումն արտահայտում է հոսանքում *էներգիայի պահպանման օրենքը*: Այն կարելի է ստանալ հոսանքի խողովակով հեղուկի տեղափոխման վրա ճնշման ուժերի աշխատանքը հավասարեցնելով հեղուկի կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաների աճին:

3. Հոսանքի խողովակ: Ստացվում է հետևյալ պարզ տեսք է ընդունում հոսանքի *անխզելիության հավասարումը*: Այն ստանալու համար ներմուծենք «*հոսանքի խողովակ*» հասկացությունը: Առանձնացնենք հեղուկում կամայական C փակ կոնտուր և տանենք տվյալ պահին նրանով անցնող հոսանքի գծերը (Նկ.13.11): Արդյունքում կստանանք հոսանքի խո-

դրվակ. Զանի որ հոսանքի գծերի միմյանց հետ հատումը բացառվում է, ապա հոսանքի խողովակում գտնվող հեղուկ մասնիկները չեն կարող դուրս գալ նրանից: Նույն ձևով հոսանքի խողովակից դուրս գտնվող մասնիկները չեն կարող թափանցել խողովակ: Ընդունելով հոսանքի խողովակը բավականաչափ բարակ, կարելի է համարել, որ նրա լայնական հատույթի բոլոր կետերում հեղուկ մասնիկներն ունեն միևնույն արագություն ու զանգվածի խտությունը: Այդ դեպքում նկ.13.11-ում պատկերված հոսանքում խողովակի առանձնացված փակ մակերևույթով հեղուկի լրիվ հոսքը կլինի հավասար



$$Q = \oint \rho v d\Sigma = \int \rho v d\Sigma_1 + \int \rho v d\Sigma_2 + \int \rho v d\Sigma = \quad (95.6)$$

$$= \rho_1 v_1 \Sigma_1 \cos \alpha_1 + \rho_2 v_2 \Sigma_2 \cos \alpha_2 = -\rho_1 v_1 \Sigma_1 + \rho_2 v_2 \Sigma_2 = \Delta(\rho v \Sigma):$$

Այստեղ հաշվի է առնված, որ $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$ և որ հոսանքի խողովակի կողմնային Σ մակերևույթով հեղուկի հոսքը բացակայում է (նկ.13.11):

Համաձայն անխզելիության (90.3) հավասարման, ստացվող հոսանքում $Q = 0$, որտեղից

$$\rho v \Sigma = \text{const}, \text{ կամ } \rho_1 v_1 \Sigma_1 = \rho_2 v_2 \Sigma_2: \quad (95.7)$$

Անսեղմելի հեղուկի համար $\rho = \text{const}$ և ստացված արդյունքն ընդունում է հետևյալ տեսքը:

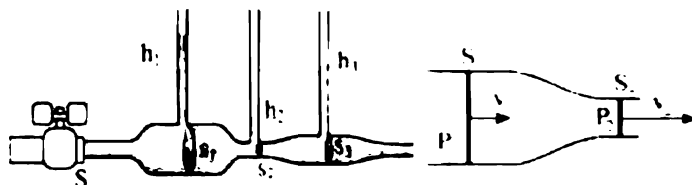
$$v \cdot \Sigma = \text{const}. \quad (95.8)$$

անսեղմելի հեղուկի ստացիոնար հոսանքի արագությունը հակադարձ համեմատական է հոսանքի խողովակի լայնական հատույթի մակերեսին:

Անսեղմելի հեղուկի ստացիոնար շարժման դինամիկան լիովին նկարագրվում է Բեռնուլիի (94.5) և անխզելիության (94.8) հավասարումներով:

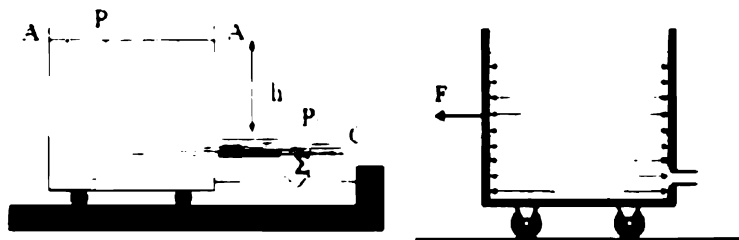
Դիտարկենք փոփոխական լայնական հատվածքի մակերես ունեցող խողովակով անսեղմելի հեղուկի ստացիոնար հոսանքը: Եթե խողովակն ունի հորիզոնական դիրք, ապա S_1 և S_2 հատվածքների համար (95.8) և (95.5) հավասարումները կտան (նկ.13.12).

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}, \quad (95.9)$$



Նկ 13.12

որտեղից հետևում է, որ *խողովակի լայն մասերում ճնշումը մեծ է, իսկ նեղ մասերում փոքր*։ Սրանում կարելի է համոզվել պարզագույն փորձերով։ Օրինակ, ուղղաձիգ կախված երկու գուգահեռ թղթերի միջև օդ փչելիս թղթերը մոտենում են իրար, կամ եթե թղթի վրա ուղղաձիգ դրված կոճը անցքից փչելով բարձրացնենք վեր, այն իր հետ բարձրացնում է նաև թուղթը։



Նկ 13.13

4. Տորիչելլի բանաձևը։ Ուսումնասիրենք այսպես կոչված *Տորիչելլի հոսանքը* (Նկ.13.13), օգտվելով ստացված *հոսանքների* (95.5) բանաձևերից։

Թեև ընդհանուր դեպքում Բեռնուլլիի հավասարման աջ մասը տարբեր է տարբեր հոսանքի գծերի համար, սակայն որոշ հոսանքներում այն ունի միևնույն արժեքը հոսանքի բոլոր գծերի համար։ Այդպիսի հոսանքի օրինակ է սկզբնապես անշարժ հեղուկի շարժումը։ Իրոք, հեղուկի ազատ AA մակերևույթի վրա հոսանքի բոլոր գծերը գտնվում են միևնույն պայմաններում, հետևաբար այդ մասում

$$\rho v_c^2 / 2 + P_c + \rho gh = B \quad (95.10)$$

մեծությունը նույնն է բոլոր հոսանքի գծերի և խողովակների համար, որտեղ P_c -ն արտաքին մթնոլորտային ճնշումն է, h -ը C անցքից հեղուկի ազատ մակերևույթի բարձրությունը խողովակի C ելքում Բեռնուլլիի ինտե-

գրավն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\rho v^2 / 2 + P_1 = B, \quad (95.11)$$

որտեղ v -ն հեղուկի արագությունն է C խողովակի ելքում:

Օգտվելով (95.10) և (95.11) առնչություններից, կունենանք

$$v^2 = v_0^2 + 2gh: \quad (95.12)$$

Հոսանքի անխզելիության պայմանից ստանում ենք

$$v_0 = \Sigma v / \Sigma S, \quad (95.13)$$

խողովակի լայնական հատույթի Σ մակերեսը անհամեմատ փոքր է Σ_0 ից, այնպես որ $v_0 \ll v$ և (95.12) բանաձևում կարելի է անտեսել v_0^2 անդամը: Ուրեմն, հեղուկի հոսանքի արագությունը նեղ խողովակում հավասար է

$$v = \sqrt{2gh}: \quad (95.14)$$

Վերջինս կոչվում է *Տորիչելլիի բանաձև*. Նկատենք, որ ստացվածը համընկնում է հրաբորությունից ազատ ընկնող մարմնի արագության հետ:

Եթե դիտարկվող սարքը դրված է սալակի վրա, ապա այն կշարժվի հեղուկի շթի հակառակ ուղղությամբ: Դա, փաստորեն, փոփոխական զանգվածով մարմնի շարժման օրինակ է, որում թեակտիվ ուժը հավասար է

$$F_p = u \frac{dm}{dt} = v \frac{\rho v \Sigma dt}{dt} = \rho v^2 \Sigma = 2\rho gh \Sigma:$$

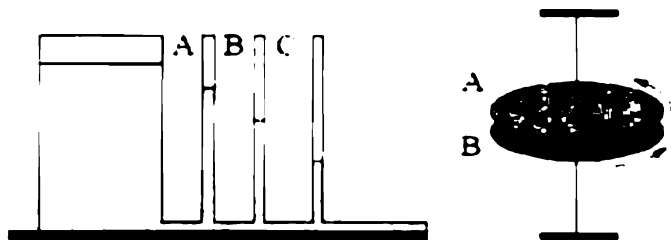
Փորձնական ճանապարհով՝ սալակը ուժաչափով սեղանին ամրացնելով (նկ.13.13), կարելի է ստուգել թեակտիվ ուժի համար ստացված այս արտահայտությունը:

§96. ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԵՂՈՒԿ: ՆԱՎՅԵՆՍՔՈՔՄԻ

ՀԱՎԱՄԱՐՈՒՄԸ

1. Իրական հեղուկի շարժումը տարբերվում է իդեալական հեղուկի (89.5), (90.5) և (91.6) հավասարումներով նկարագրվող շարժումներից, որոնք բավարարում են (91.9) եզրային պայմանին. Պինդ, մարմնի մակերևույթի (պատի) շոշափող ուղղությամբ իդեալական հեղուկի արագությունը կամայական է: Փաստորեն, խողովակը, որով հոսում է իդեալական հեղուկը, խաղում է հոսանքի խողովակի դեր և որևէ շոշափող լարումով չի արգելակում հեղուկի հոսանքին: Դրանից հետևում է, որ հորիզոնական խողովակի ծայրերում ճնշումների ցանկացած փոքր տարբերություն կա-

ռաջացնի հեղուկի արագացող (ոչ ստացիոնար) հոսանք: Իրականում փորձերը տալիս են այլ արդյունք՝ հորիզոնական խողովակում ստացիոնար հոսանքը հնարավոր է միայն խողովակի երկայնքով հեղուկի ճնշման անկման դեպքում: Դրանում կարելի է համոզվել նկ.13.14-ում պատկեր



Նկ. 13.14

ված պարզագույն փորձով, որում A,B,C մանոմետրական խողովակներում հեղուկի սյան բարձրությունները ներկայացնում են հորիզոնական խողովակի համապատասխան մասերում հեղուկի ճնշման արժեքները:

Այս երևույթը կարելի է բացատրել պատերից հեղուկի «կառչման», ինչպես նաև հեղուկում ներքին չփման դիսիպատիվ փոխազդեցության առկայության ենթադրությամբ: Պատերից հեղուկի «կառչման» ենթադրությունը նշանակում է, որ պատի (պինդ մարմնի մակերևույթի) վրա *հեղուկի* և *պատի հարաբերական շարժումը բացակայում է*: Եթե պատն անշարժ է, ապա

$$v_z' = 0: \quad (96.1)$$

Այսինքն՝ զրո է պատին հարող հեղուկ շերտի արագության ոչ միայն նորմալ, այլև շոշափող բաղադրիչը (լրիվ արագությունը): Հեղուկում դիսիպատիվ փոխազդեցության առկայությունը նշանակում է, որ երկու հարևան շերտերի միջև գործում են նրանց հարաբերական արագությունից կախված թաց չփման ուժեր (§28): Դրանք *ներքին չփման* կամ *մածուցիկության ուժերն են*, որոնք ծագում են վերացնել հեղուկում հարաբերական շարժումները: Այն, որ շարադրվածը համապատասխանում է իրականությանը, կարելի է համոզվել նաև նկ. 13.14բ -ում պատկերված փորձով: Պտտման մեջ դնելով B սկավառակը, քիչ անց նույն ուղղությամբ կսկսի պտտվել նաև ձկուն թելից կախված A սկավառակը: Փորձն այս արդյունքը տալիս է ինչպես հեղուկներում, այնպես էլ գազերում:

Քանի որ էլեքի հավասարումը առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարում է, ապա նրա լուծումները չեն կարող բավարարել (96.1) «կառչ-

ման» պայմանին: Դրա համար անհրաժեշտ է, որ հեղուկի շարժման հավասարումը արագության նկատմամբ լինի զոնե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում: Այսինքն՝ մածուցիկ հեղուկի շարժման հավասարումը էյլերի հավասարումից պետք է տարբերվի ըստ կոորդինատների արագության երկրորդ կարգի ածանցյալներ պարունակող անդամներով:

2. Հարաբերական արագությունից մածուցիկության ուժերի կախվածությունը փորձով բացահայտել է դեռևս *Նյուտոնը*: Դիցուք անվերջ երկար երկու զուգահեռ հարթությունների միջև լցված է հեղուկ: Փորձը ցույց է տալիս, որ հարթությունները իրար զուգահեռ հաստատուն ս. < ս. արագություններով տեղափոխելու համար անհրաժեշտ է նրանց վրա կիրառել հաստատուն $F_1 = F$ ուժեր (նկ. 13.15): Ընդ որում մակերևույթի միավոր մակերեսի վրա ազդող շոշափող f , ուժը ուղիղ համեմատական է թիթեղների հարաբերական արագությանը և հակադարձ համեմատական նրանց միջև z - z_1 - հեռավորությանը:

$$f_1 = \eta \frac{u_2 - u_1}{h} : \quad (96.2)$$

Այստեղ η -ն բնութագրում է հեղուկի մածուցիկ հատկությունները և կոչվում է հեղուկի *դինամիկ մածուցիկության գործակից*: ՄՄՀ-ում այն ունի կգ/մ.վ չափողականություն: Հաճախ օգտվում են նաև *կինեմատիկ մածուցիկության գործակիցից*

$$\nu = \eta / \rho, \quad (96.3)$$

որն ունի մ²/վ չափողականություն:

Տվյալ ջերմաստիճանում դինամիկ մածուցիկությունը անկախ է հեղուկի ճնշումից, իսկ կինեմատիկ մածուցիկությունը հակադարձ համեմատական է ճնշմանը:

Նորմալ պայմաններում օդի մածուցիկության համար փորձերը տալիս են հետևյալ արժեքները՝ $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3}$ կգ/մ.վ, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ մ²/վ, իսկ գլիցերինի համար՝ $\eta = 1,5 \cdot 10^{-3}$ կգ/մ.վ, $\nu = 1,2 \cdot 10^{-3}$ մ²/վ:

Շարունակենք նկ.13.15-ում պատկերված փորձի քննարկումը:

Քանի որ թիթեղների վրա հաստատուն ուժեր կիրառելիս նրանք շարժվում են *հավասարաչափ* ապա հեղուկը թիթեղների վրա ազդում է այդ ուժերը համակշռող - F , F ուժերով: Համաձայն Նյուտոնի երրորդ օրենքի թիթեղներն իրենց հերթին հեղուկի մակերևութային շերտի վրա ազդում են $F_1 = -F$ ուժերով, ապահովելով հեղուկի «կառչման» պայմանը

$$v_1(z) = u ; v_2(z) = u_1, \quad (96.4)$$

որտեղ X և Z առանցքներն ընտրված են նկ. 13.15-ում պատկերված ձևով:

Մտոլի տրոհելով հեղուկը թիթեղներին զուգահեռ անվերջ բարակ շերտերի և դիտարկելով նրանցից յուրաքանչյուրի ստացիոնար շարժումը, կարող ենք պնդել, որ ցանկացած dz հաստության շերտի միավոր մակերեսը հարևան շերտերի կողմից ենթարկվում է մեծությամբ հավասար ու հակառակ ուղղված

$$\tau_{\pm} = \eta dv_z / dz \quad (96.5)$$

շոշափող լարումների: Ընդ որում թիթեղի մակերևույթի միավոր մակերեսի վրա հեղուկի կողմից ազդող չփման ուժը հենց (96.5) շոշափող լարումն է թիթեղի վրա՝ վերցված հակառակ նշանով. - $\tau_{\pm} = \tau_{\pm} \cdot \frac{d\mathbf{e}_z}{dz}$:

Ինչպես մակերևութային նորմալ լարումը, շոշափող լարումը նույնպես համարժեք է ծավալային ուժի: Միայն թե այս դեպքում ծավալային ուժն ունի դիսիպատիվ բնույթ: Մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի կամայական շարժման դեպքում նրա միավոր ծավալը ենթարկվում է մածուցիկության ծավալային ($\eta = \text{const}$ դեպքում)

$$f_{\eta} = \eta \Delta v \quad (96.6)$$

ուժի ազդեցությանը, որտեղ Δ -ն կոչվում է *Լապլասի օպերատոր*, որը կապված է ∇ օպերատորի հետ $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ կերպ: Այն Ուղղանկյան կոորդինատային համակարգում ունի հետևյալ տեսքը

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} : \quad (96.7)$$

Ավելացնելով (96.6) արտահայտությունը էլլերի հավասարման աջ մասում, կստանանք *մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի շարժման Նավյե-Սթոքսի հավասարումը*

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v \nabla)v = -\nabla P - \eta \Delta v + f. \quad (96.8)$$

որը Երկրի ծանրության ուժի դաշտում ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla)v = g - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta v : \quad (96.9)$$

Այս հավասարման լուծումներն արդեն կարող են բավարարել «կառչման» (96.1) եզրային պայմանին:

3. Հոսանքի *անխզելիության հավասարումն* անկախ է հեղուկի իդեալական կամ մածուցիկ լինելուց և ունի նույն (90.5) տեսքը:

Մածուցիկ հեղուկի հոսանքն աղիաբատ լինել չի կարող: Ունենալով

դիսփպատիվ բնույթ, մածուցիկության ներքին ուժերն իրենց բացասական աշխատանքով հեղուկի մեխանիկական էներգիան անընդհատ փոխարկում են ջերմության: Պա կարող է հանգեցնել հեղուկի անհամասեռ տաքացմանը, իսկ վերջինս էլ ջերմահաղորդման լրացուցիչ երևույթի առաջացմանը: Նշված երևույթները հաշվի են առնվում հեղուկում էներգիայի հաշվեկշռի հավասարումով, որը փոխարինում է նրա վիճակի հավասարմանը: Այս հավասարման ստացումը դուրս է մեր ծրագրից: Պարզագույն դեպքում անսեղմելի հեղուկի համար այն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \chi (\nabla) T - \Delta T = \varepsilon, \quad (96.10)$$

որտեղ χ -ն կոչվում է հեղուկի *ջերմաստիճանահաղորդականության գործակից*, իսկ ε -ը մածուցիկությամբ պայմանավորված էներգիայի դիսփպացիան է: հեղուկի միավոր ծավալում միավոր ժամանակում ջերմության փոխարկված էներգիան: Անշարժ հեղուկում (96.10)-ը տալիս է *ջերմահաղորդականության հավասարումը*.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (96.11)$$

որը, սակայն, հեղուկներում ունի սահմանափակ կիրառություն, քանի որ հեղուկներում ջերմության տեղափոխությունը հիմնականում ուղեկցվում է կոնվեկցիայով: (96.11)-ը նկարագրում է *ջերմահաղորդականությունը պինդ մարմիններում* (Ֆուրիեի հավասարում):

§97. ԿՈՒԷՏԻ ԵՎ ՊՈՒԱՋԵՑԼԻ ՀՈՄԱՆՔՆԵՐ

Մածուցիկ հեղուկի վարքը նկարագրող (96.5), (96.9), (96.10) հավասարումների համակարգը անալիտիկ մեթոդներով լուծելն ընդհանուր դեպքում անհնար է: Միայն որոշ պարզագույն հոսանքների դեպքում է, որ այդ հավասարումներն ունենում են անալիտիկ լուծումներ: Կիրառական նշանակության խնդիրները հիմնականում լուծվում են մոտավոր թվային մեթոդներով: Այս հավասարումների անալիտիկ լուծման հիմնական մաթեմատիկական դժվարությունը պայմանավորված է $(\nabla) \chi$ ոչ գծային անդամով: Այս պարագրաֆում կդիտարկենք մածուցիկ հեղուկի *ստացիոնար հոսանքներ*, որոնց համար $(\nabla) \chi$ անդամը նույնաբար զրո է: Ղրանք *Կուէտի* և *Պուազեյի* հոսանքներն են:

Մածուցիկ հեղուկի հոսանք կարելի է առաջացնել երկու տարբեր ե-

դանակներով

- արտաքին (ծավալային կամ ճնշման) ուժերով (օրինակ՝ հորիզոնական խողովակի ծայրերում ճնշումների տարբերություն առաջացնելով կամ խողովակը հորիզոնական դիրքից շեղելով),

- հեղուկը պարփակող պատերը տեղաշարժելով:

Ճնշման անկման միջոցով առաջացող հեղուկի ստացիոնար հոսանքը կոչվում է Պուազեյի հոսանք. պատերի շարժմամբ առաջացող հոսանքը՝ Կուլտի հոսանք: Նախորդ պարագրաֆում նկարագրված փորձերն այդ հոսանքների օրինակներ են.

1. Կուլտի հարթ-գուլպեռ հոսանքը: Ուսումնասիրենք արագությունների և ճնշման բաշխումը նկ. 13.15-ում պատկերված հոսանքում: Ամրացնելով կոորդինատների XY հարթությունը ստորին թիթեղին (նկ.13.15), խնդրի եզրային (96.4) պայմանները կնդուեն այսպիսի տեսք.

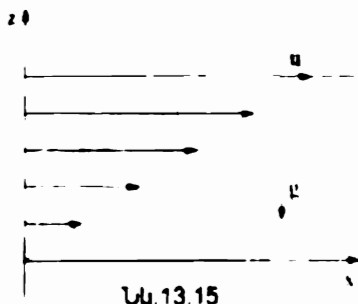
$$v_z(z=0) = (0); \quad v_z(z=h) = u: \quad (97.1)$$

Անտեղմելի հեղուկի ստացիոնար հոսանքի համար անխզելիության հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$\nabla v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (97.2)$$

Իսկ Նավյե-Սթոքսի հավասարումը՝

$$(\nu \nabla) v = -\frac{1}{\rho} \nabla P + g + \nu \Delta v: \quad (96.3)$$



Նկ.13.15

պայմաններում ակնհայտ է, որ

ելնելով հոսանքի համաչափությունից, կարելի է պնդել, որ զրոյից տարբեր է հեղուկի արագության միայն v_z բաղադրիչը. $v(x,0,0)$: Պարզ է նաև որ արագությունը (ինչպես նաև ճնշումը) չի կարող կախված լինել y կոորդինատից $v = v(x,z)$: Այդ դեպքում անընդհատության (97.2) հավասարումից հետևում է $\partial v / \partial x = 0$, այսինքն v -ն կախված չէ նաև x կոորդինատից: Ուրեմն $v = A(z)$: Այս

$$(\nu \nabla) v = 0; \quad \Delta v = \frac{d^2 v}{dz^2} = 0. \quad (97.4)$$

Պրոյեկտելով (97.3) հավասարումը X և Z առանցքների վրա, հաշվի

առնելով $g = -kg$, և որ Կուլտի հոսանքում բացակայում է հոսանքի երկայն-
քով ճնշման անկումը, այսինքն $P = P(z)$, կստանանք

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = 0; \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g; \quad (97.5)$$

Երկրորդ հավասարման ինտեգրումը տալիս է հեղուկում ճնշման բա-
շխումը. $P = P_0 - \rho g(z-h)$, որը հոսանքի դինամիկայի վրա չունի որևէ ազդեցու-
թյուն, իսկ առաջինից ստանում ենք $v(z) = A + Bz$ օրենքը: A և B ինտեգրման
հաստատունները որոշվում են (97.1) պայմաններից. $A = 0$, $B = u/h$: Հետև-
աբար, Կուլտի հարթ-գուլպաեղ հոսանքում արագությունն ունի հետևյալ
բաշխումը

$$v(z) = u \frac{z}{h}, \quad (97.6)$$

որը ներկայացված է նկ.13.15-ում (*արագության գծային պրոֆիլ*): Հեղու-
կում շփման լարումը ամենուրեք միևնույնն է և մեծությամբ հավասար

$$\tau_{xz} = \eta \frac{dv}{dz} = \eta \frac{u}{h}, \quad (97.7)$$

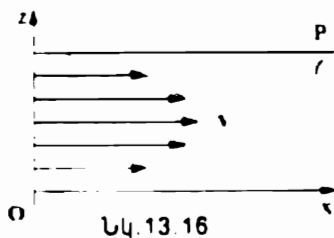
ընդ որում ստորին անշարժ թիթեղի վրա այն ունի հոսանքի ուղղությունը,
իսկ վերին թիթեղի վրա՝ հակառակ ուղղություն: Այդ պատճառով ստորին
թիթեղն անշարժ պահելու համար անհրաժեշտ է նրա վրա գործադրել $F =$
 $\eta u \Sigma / h$ ուժ, որտեղ Σ -ն թիթեղի մակերևույթի մակերեսն է:

2. Պոլազեղի հարթ-գուլպաեղ հոսանքը: Այս դեպքում թիթեղներն ան-
շարժ են, սակայն X առանցքով գործում է ճնշումների հաստատուն տար-
բերություն.

$$P(x=0) = P_1; \quad P(x=l) = P_2; \quad (97.8)$$

Համաչափության նկատառումներից
և անընդհատության հավասարումից օգտ-
վելով՝ նորից կստանանք՝ $v = h(z)$: Այնպես
որ ճիշտ են նաև (97.4) առնչությունները:
Պրոեկտելով Նավյե-Սթոքսի հավասարու-
մը X և Z առանցքներով, կստանանք

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{d^2 v}{dz^2}; \quad (97.9)$$



Առաջին հավասարումից ստացվում է $P(x,z) = P(x) - \rho g(z-h)$: Տե-
ղադրելով այն երկրորդում, կստանանք

$$\frac{dP(x)}{dx} = \eta \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = A, \quad (97.10)$$

որի ծախ մասը կախված է միայն x , իսկ աջ մասը z կոորդինատից Պա հնարավոր է, եթե հավասարման ծախ և աջ մասերը հավասար են միևնույն A հաստատուն թվին: Օգտվելով (97.8) պայմանից, կունենանք

$$A = \frac{P_1 - P_2}{l} = - \frac{\delta P}{l}, \quad (97.11)$$

որտեղ $\delta P = P_1 - P_2 > 0$: Շատ z -ի (97.10) հավասարման ինտեգրումը կտա

$$v(z) = - \frac{\delta P}{2\eta l} z^2 + Bz + C: \quad (97.12)$$

Ինտեգրման B և C հաստատունները կորոշենք, օգտվելով եզրային «կառչման» պայմանից.

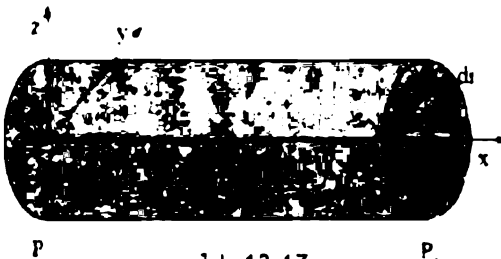
$$v(z=0) = v(z=h) = 0: \quad (97.13)$$

Որոշելով B, C հաստատունները և տեղադրելով (97.12)–ում, ներկայացնենք վերջինս հետևյալ կերպ՝

$$v(z) = - \frac{\delta P}{2\eta l} \left[\left(z - \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{h^2}{4} \right]: \quad (97.14)$$

Ուրեմն, Պուազեյի հարթ-գուգահեռ հոսանքը բնութագրվում է արագությունների դաշտի պարաբոլական պրոֆիլով (նկ.13.16): Պատերի վրա չփման լարումը ուղղված է X առանցքով և հավասար է $h\delta P/2l$:

3. Պուազեյի հոսանքը կոորդինատային խողովակում: Քանի որ հոսանքը



Նկ.13.17

ը համաչափ է գլանի առանցքի նկատմամբ, ապա համար է վերջինիս երկայնքով ուղղել X առանցքը, իսկ հիմքի ձևով կապել (r, φ) բևեռային կոորդինատական հարթությունը (նկ.13.17): Հոսանքը ստեղծվում և պահպանվում է ճնշումների հաս-

տատուն տարբերությամբ.

$$P(x=0) = P_1; \quad P(x=l) = P_2: \quad (97.15)$$

Պարզ է գլանում հոսանքն ունի միայն v , բաղադրիչ: Ընդդիմաբար առանցքային համաչափության, v, P մեծություններն անկախ են φ կոոր-

դինամիկ (ծանրության ուժի ազդեցությունն անտեսում ենք): Անընդհատության հավասարումից հետևում է, որ v_r -ը կախված չի նաև x -ից.

$$v_r = v(r) \quad (97.16)$$

Այս դեպքում

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0; \quad \Delta \mathbf{v} = l \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

Վերջիններիս հաշվառմամբ Նավյե-Սթոքսի հավասարման բաղադրիչները r և x առանցքներով կլինեն

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \equiv A: \quad (97.17)$$

Առաջին հավասարումից հետևում է $P = P(x)$, իսկ երկրորդ հավասարման աջ և ձախ մասերը կախված լինելով տարբեր անկախ փոփոխականներից, պետք է հավասար լինեն միևնույն հաստատուն A մեծությանը, որը որոշվում է (97.15) պայմանից.

$$A = -\delta P / 4\eta l, \quad \delta P = P_2 - P_1 < 0:$$

Տեղադրելով վերջինս (96.17)-ում և ինտեգրելով ըստ r -ի, կստանանք

$$v(r) = -\delta P r^2 / 4\eta l + B \ln r + C:$$

Չլանի առանցքի վրա արագության վերջավոր լինելու պայմանից հետևում է $B = 0$, իսկ C -ն որոշվում է արագության $v(r = R) = 0$ եզրային պայմանից.

$$C = \delta P R^2 / 4\eta l, \quad (97.18)$$

որտեղ R -ը գլանի շառավիղն է: Ուրեմն՝

$$v(r) = -\delta P (R^2 - r^2) / 4\eta l, \quad (97.19)$$

արագության պրոֆիլը նորից պարաբոլ է, ընդ որում արագությունն իր առավելագույն արժեքն ընդունում է գլանի առանցքի վրա.

$$v_{\max} = v(0) = -\delta P R^2 / 4\eta l:$$

Միավոր ժամանակում խողովակի լայնական հատվածքով հոսող հեղուկի զանգվածը կլինի

$$Q = \int_0^R \rho v(r) 2\pi r dr = -\frac{\pi \delta P}{8\eta l} R^4, \quad (97.20)$$

որն ուղիղ համեմատական է խողովակի շառավղի չորրորդ աստիճանի ու

միավոր երկարության վրա ճնշման անկման արտադրյալին և հակադարձ համեմատական: Ինդուկի կինեմատիկ մածուցիկությանը:

Պատի վրա ինդուկի չվման լարումն ուղղված է հոսանքի երկայնքով և հավասար է՝

$$\tau_{\omega} = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| = \frac{R}{2} \frac{\delta P}{l} :$$

Այս պարագրաֆում դիտարկված հոսանքները իդեալականացումներ են. քանի որ ինդուկը պարփակող պինդ մարմինները ենթադրվում են անսահման չափերի: Չնայած դրան, այս արդյունքները գործնականում ստացել են լայն կիրառություն, եթե, օրինակ, թիթղների երկարություններն ու լայնությունները անհամեմատ մեծ են նրանց միջև ինտեպլորությունից, կամ գլանի երկարությունը անհամեմատ մեծ է նրա տրամագծից: Ի դեպ, նման փորձերը առաջին անգամ Հազենին (1839) և Պուազեյին (1840թ) հանգեցրել են (97.20) արդյունքին, որը հետագայում տեսականորեն ստացել է Սթոքսը (1845թ): Էական է, որ Հազենը անդել է նաև, որ (97.20) արդյունքը փորձում իրականանում է հոսանքի ոչ շատ մեծ արագությունների և մածուցիկության ոչ շատ փոքր արժեքների դեպքում:

§98. ՌԵՑԻՈԼԴԵՆՏԻ ԹԻՎ: ԼԱՄԻՆԱՐ ԵՎ ՏՈՒՐԲՈՒԼԵՆՏ

ՀՈՍԱՆՔՆԵՐ

Հիդրոդինամիկայի հավասարումների նախորդ պարագրաֆում ստացված ճշգրիտ լուծումները վերաբերում են պարզագույն հոսանքներին: Ավելի բարդ դեպքերում դրանց ճշգրիտ լուծելը դառնում է անհնար:

Հոսանքի դինամիկայի վերաբերյալ կարևոր տեղեկություններ կարելի է ստանալ հավասարման մեջ մտնող տարբեր անդամների մեծության կարգը գնահատելով և միմյանց հետ համեմատելով:

Նախ դիտարկենք անսեղմելի մածուցիկ ինդուկի ստացիոնար շարժումը, երբ բացակայում են արտաքին ծավալային ուժերը: Այդ դեպքում

$$(\nu \nabla) \nu = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \nu : \quad (98.1)$$

Հոսանքի արագության բնութագրական մասշտաբը նշանակենք u (օրինակ, հոսանքի արագության միջին կամ առավելագույն արժեք, կամ պատի շարժման արագություն և այլն), իսկ երկարության բնութագրական մասշտաբը l (խողովակի շառավիղ, տրամագիծ, շրջիտսվող մարմնի

գծային չափ. մի խոսքով. հեռավորություն, որի վրա հոսանքի արագությունը կրում է ν կարգի փոփոխություն): Այդ դեպքում ոչ գծային $(\nu \nabla) \nu$ անդամը, որը նկարագրում է հոսանքում իներցիայի ուժերի դերը, կունենա մեծության հետևյալ կարգը.

$$(\nu \nabla) \nu \approx u^2 / l,$$

իսկ մածուցիկության անդամի կարգը կլինի

$$\nu \Delta \nu \approx \nu \frac{u}{l^2}.$$

Այս մեծությունների հարաբերությունը հոսանքի կարևոր բնութագիր է, որն անչափ մեծություն է և կոչվում է *Ռեյնոլդսի թիվ*.

$$\frac{u^2}{l} : \frac{\nu u}{l^2} = \frac{ul}{\nu} \equiv \text{Re} : \quad (98.2).$$

Ռեյնոլդսի թիվն արտահայտում է հոսանքի դինամիկայում իներցիայի և չվման ուժերի հարաբերական դերը: Ռեյնոլդսի թվի փոքր արժեքներով հոսանքներում գերակշռում է մածուցիկության դերը, որը հարթեցնում է հոսանքում առաջացող փոքր անհամասեռությունները *Նման հոսանքները բնութագրվում են արագության ճնշման և խտության սալիուն փոփոխվող հիդրոդինամիկական դաշտերով և կոչվում են լամինար*. Ռեյնոլդսի մեծ թվով հոսանքներում գերակշռում են իներցիայի ուժերը, որոնք զարգացնում են հոսանքում առաջացող պատահական անհամասեռությունները: *Այդ դեպքում հոսանքը բնութագրվում է ճնշման խտության ջերմաստիճանի և արագության դաշտերի կտրուկ խիստ անկանոն փոփոխություններով*. Դա հեղուկի տուրբուլենտ շարժումն է: Մինչև այժմ դիտարկած հոսանքները հեղուկների լամինար շարժման օրինակներ են, որոնք բնության մեջ հազվադեպ են հանդիպում:

Բնության մեջ, տեխնիկայում հեղուկների և գազերի իրական շարժումների ճնշող մեծամասնությունը տուրբուլենտ է: Այդպիսիք են մթնոլորտում օդի բազմատեսակ շարժումները, սկսած մակերևութային թույլ քամիներից և վերջացրած մթնոլորտի ընդհանուր ցիրկուլացիայի (ցիկլոններ, անտիցիկլոններ) շարժումներով: Տուրբուլենտ են ջրի հոսանքները գետերում, ծովերում, օվկիանոսներում, ինչպես նաև գործնական նշանակություն ունեցող շատ հոսանքներ՝ խողովակներում, հրթիռային շարժիչներում, շրջողովող մարմնի հետևում:

Տուրբուլենտ հոսանքներում հիդրոդինամիկական դաշտերի անկանոն բաբախումները հանգեցնում են *հեղուկի ինտենսիվ խառնմանը*, որն

իր հերթին արագացնում է ջերմահաղորդման, դիֆուզիայի երևույթները Այդ պատճառով կարևոր է իմանալ այն պայմանները, որոնց դեպքում հեղուկի լամինար հոսանքը անցնում է տուրբուլենտի Այս հարցը դեռևս չի ստացել իր սպառիչ պատասխանը:

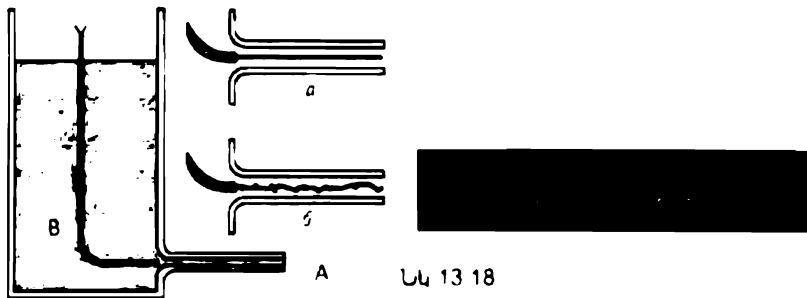
Տուրբուլենտության վերաբերյալ առաջին փորձնական արդյունքները պատկանում են Հագենին (1839թ.), որն անփոփոխ ճնշման անկման պայմաններում փոքրացնելով զանում հեղուկի մածուցիկությունը, ցույց է տվել, որ հեղուկի (97.20) հոսքը նախ անում է մինչև որոշակի առավելագույն արժեքը, որից հետո կտրուկ նվազում:

Տուրբուլենտության առաջացման ընդհանուր հայտանիշը տվել է Ռեյնոլդսը (1883թ.): Այն պնդում է, որ հոսանքը մնում է լամինար, քանի դեռ Ռեյնոլդսի (98.2) թիվը չի գերազանցում որոշակի կրիտիկական R_{cr} , արժեքը: Սակայն հետազայում պարզվեց, որ միայն Ռեյնոլդսի թվի արժեքով անհնար է միարժեքորեն նկարագրել տուրբուլենտության առաջացումը:

Փորձերը ցույց են տալիս, որ R_{cr} արժեքը խիստ կախված է խողովակի պատերի իղկվածության չափից (այսպես կոչված հոսանքի «սկզբնական զրգովածության» աստիճանից): Եթե անհարթ պատերով խողովակում տուրբուլենտ ռեժիմին անցումը կատարվում է, ասենք, $R_{cr} = 2800$ արժեքի դեպքում, ապա, վերացնելով անհարթությունները, հոսանքի լամինար ռեժիմը կարելի է ձգձգել մինչև 20000 և ավելի արժեքները: Ընդ որում հայտնի է, լամինար ռեժիմի այս ձգձգումը Ռեյնոլդսի թվի մինչև ո՞ր արժեքն է հնարավոր: Հնարավոր է, արդյոք, լամինար ռեժիմը ձգձգել մինչև $R_{cr} \rightarrow \infty$ արժեքները, այսինքն՝ ընդհանրապես չանցնել տուրբուլենտ ռեժիմի, թե գոյություն ունի R_{cr}^{∞} արժեք, որից հետո հոսանքի բնույթը հաստատ տուրբուլենտ է: Այս հարցը դեռ չի ստացել իր սպառիչ պատասխանը: Սակայն գոյություն ունի $R_{cr}^{\infty} = 2300$ արժեք, որից փոքր Ռեյնոլդսի թվով հոսանքները անկախ «սկզբնական զրգովածության» աստիճանից միշտ լամինար են:

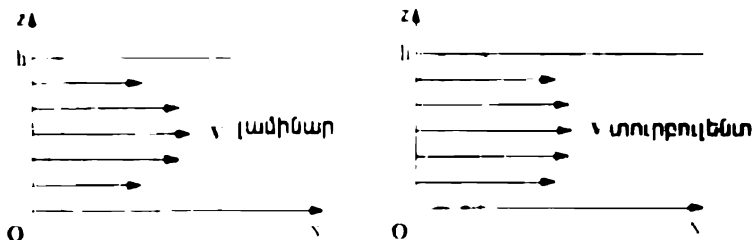
Տուրբուլենտության առաջացման երևույթը կարելի է ցուցադրել նկ 13.18-ում պատկերված փորձով: Ռեյնոլդսի փոքր թվով հոսանքներում (նկ.13.18a) B խողովակից ելնող ներկված հեղուկն ունի անընդհատ շիթի տեսք, որը ցույց է տալիս հոսանքի լամինար բնույթը: R_{cr} արժեքին համապատասխանող հոսանքում B խողովակի ելքից ոչ հեռու շիթը լայնանում է, նրա վրա առաջանում են ալիքներ, սկիզբ դնելով մեծ մասշտաբի մեկ-երկու մրրիկների, որոնք տրոհվելով բազմաթիվ փոքր մրրիկների, խողովակի վերջում ընդգրկում են նրա լրիվ լայնական հատվածը (նկ.13.18b) $R >$

Ք. հոսանքներում B խողովակից ելնող ռեզուկի շիջն առդեն ունի տուր-
բուլենտ բնույթ և A խողովակի ամբողջ ծավալը լցվում է ներկված ռեզու-
կով։ Առաջացած մրրիկները մեծացնում են հոսանքի դիմադրությունը, որի
չնորիվ փոքրանում է խողովակով միավոր ժամանակում հոսող ռեզուկի
քանակը։



Նկ 13 18

Նկ.13 19-ում պատկերված են խողովակում արագության պրոֆիլնե-
րը լամինար և տուրբուլենտ հոսանքների դեպքում։ Ճնշման անկման նույն
արժեքի համար։ Ինչպես տեսնում ենք, տուրբուլենտ հոսանքում արագու-
թյունը նույնն է խողովակի համարյա ամբողջ լայնական հատվածքով, բա-
ցառությամբ խողովակի պատերին հարող բարակ շերտի։



Նկ 13 19

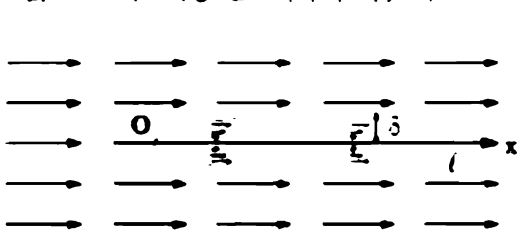
§99. ՄԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏ

Ռեյնոլդսի մեծ թվով հոսանքներում Նավյե-Սթոքսի հավասարման
մեջ ոչ գծային ($v \nabla$) անդամն անհամեմատ մեծ է մածուցիկության ($\nu \nabla$) անդամից։ Առաջին հայացքից կարող է թվալ, թե նման դեպքերում մածու-
ցիկության դերը հոսանքի դինամիկայում ընդհանրապես կարելի է անտե-
սել։ Իրականում դա այդպես չէ։ Մածուցիկության անդամի անտեսումով

նախ իջեցնում ենք դիֆերենցիալ հավասարման կարգը և ստանում րոես-
լական հեղուկի շարժման հավասարումը, որի լուծումները չեն կարող բա-
վարարել սահմանային «կառչման» պայմանին Մյուս կողմից հաստատ-
ված է, որ *նույնիսկ չնչին մածուցիկության դեպքում հեղուկի «կառչումը»*
պատերին տեղի ունի։ Այնպես որ Ռեյնոլդսի մեծ թվերի դեպքում հոսանքը
կարելի է դիտել որպես իդեալական հեղուկի շարժում միայն պինդ մարմնի
մակերևույթից մեծ *հեռավորությունների* վրա։ Իսկ պատերի մոտ առաջա-
նում է *շերտ*, որում հոսանքի արագությունը պատի վրա գրոյից կտրուկ
աճելով շերտի վերին եզրին ընդունում է հոսանքի արագության այն ա-
ծեքը, որը համապատասխանում է տվյալ մասում իդեալական հեղուկի
շարժմանը։ Ընորոիվ արագության կտրուկ փոփոխության, այդ շերտի
սահմաններում *«δ»* անդամը դառնում է *(ν∇)* -ի կարգի։ Նկարագրված
շերտը կոչվում է *սահմանային շերտ*, որում մածուցիկության ուժերի դերն
անտեսել չի կարելի։

Ուրեմն, *Ռեյնոլդսի թվի մեծ արժեքներով նկարագրվող հոսանքնե-
րում մածուցիկությունը էական է պինդ մարմնինը շրջապատող նեղ սահ-
մանային շերտում*։ Նրանից դուրս տիրույթներում հեղուկի շարժումը նկա-
րագրվում է իդեալական հեղուկի հավասարումներով։

Չնահատենք սահմանային շերտի հաստությունը պարզագույն հո-
սանքի համար։ Դիցուք է երկարությամբ անսահման բարակ ծողը շրջու-



Նկ 13.20

վում է իրեն զուգահեռ
հոսանքով։ Պարզ է, որ
իդեալական հեղուկը չի
զգա ծողի գոյությունը
Սակայն մածուցիկ հե-
ղուկում ծողի առկայու-
թյունը կրերի արագու-
թյան դաշտի փոփոխու-

թյան (չնորոիվ ծողին հեղուկի «կառչման») և սահմանային շերտի առա-
ջացման (Նկ. 13.20)։ Սահմանային շերտում *(ν∇)* անդամը *«δ»* -ի կարգի է
Չնահատենք այդ մեծությունները։

Հոսանքի ուղղությամբ արագության և երկարության բնութագրական
մասշտաբներն են՝ անվերջությունում հեղուկի *«* արագությունն ու ծողի *(*
երկարությունը։ Այնպես որ ոչ գծային անդամը *«ν∇»* կարգի մեծություն է
Նշանակենք *սահմանային շերտի հաստությունը δ*, որի վրա հոսանքին
ուղղահայաց ուղղությամբ հեղուկի արագությունը գրոյից աճում է մինչև

ասենք, $0.99 u$ (u արժեք ընդունում է խիստ ասած, մարմնից անվերջ մեծ դեռավորության վրա): Այդ շերտում մածուցիկության անդամը $u : \delta^2$ կարգի մեծություն է: Ուրեմն, սահմանային շերտում

$$u^2 / l^2 \approx u / \delta^2,$$

որտեղից

$$\delta \approx \sqrt{v l / u} = l / \sqrt{Re}, \quad Re = u l / \nu \quad (99.1)$$

Այսպիսով, *սահմանային շերտի հաստությունը* կախված է Ռեյնոլդսի թվից: Որքան մեծ է Ռեյնոլդսի թիվը, այնքան ավելի փոքր է δ -ն:

Չողի երկայնքով սահմանային շերտի հաստության փոփոխությունը որոշելու համար (99.1)-ում (l -ը պետք է փոխարինել x -ով (X առանցքի սկզբնակետն ընտրված է ժողի առջևի ծայրում).

$$\delta(x) \approx \sqrt{\nu x / u}, \quad (99.2)$$

այսինքն՝ սահմանային շերտի հաստությունը հոսանքի երկայնքով աճում է $\sqrt{x}$ օրենքով (նկ.13.20):

Հոսանքի մեծ արագությունների դեպքում տուրբուլենտ բնույթ է կրում նաև սահմանային շերտում հեղուկի շարժումը: Արագության պրոֆիլն այս դեպքում նախ գծային է (*մածուցիկ ենթաշերտ*), այնուհետև աճում է լոգա-րիթմական օրենքով (*լոգարիթմական սահմանային շերտ*):

Սահմանային շերտի մասին իմաստ ունի խոսել միայն այն դեպքում, երբ նրա δ հաստությունը անհամեմատ փոքր է հոսանքի բնութագրական l չափից: Այդ պատճառով «սահմանային շերտ» հասկացությունը կապված է Ռեյնոլդսի մեծ թվով բնութագրվող հոսանքների հետ:

Հոսանքների կարևոր մի դասի էական հատկություններ կապված են սահմանային շերտի առաջացմամբ և նրա դինամիկայով: Դա հեղուկում և գազում պինդ մարմնի շրջիսմամբ առաջացող հոսանքներն են:

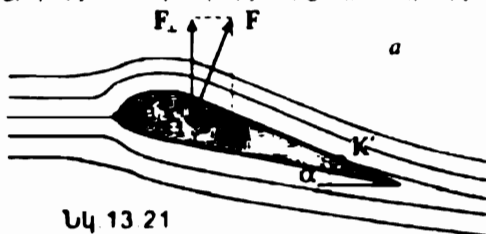
§100. ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ԵՐՋՁՈՍՈՒՄԸ շԵՐՏԻԿՈՒՄ

1. Դիմադրության և վերամբարձ ուժեք: Հեղուկներում և գազերում պինդ մարմինների շարժման ուսումնասիրությունը բարդ մաթեմատիկական խնդիր է: Այն համարժեք է անշարժ պինդ մարմնի շրջիսման խնդրին՝ հեղուկի հոսանքում: Այստեղ քննարկվում են փոխկապակցված երկու հիմնական խնդիրներ.

- հոսանքի կողմից պինդ մարմնի վրա ազդող ուժերի որոշում
- պինդ մարմնի շրջիտամաբ առաջացող հեղուկի հիդրոդինամիկական դաշտերի որոշում

Հոսանքի կողմից պինդ մարմնի վրա ազդող ուժը կախված է ինչպես մարմնի ձևից, չափսերից, այնպես էլ հեղուկի ֆիզիկական բնութագրերից, հատկապես մածուցիկությունից: Այդ ուժը սովորաբար վերածվում է հոսանքին զուգահեռ F_x և ուղղահայաց F_y բաղադրիչների (նկ.13.21), որոնցից առաջինը կոչվում է *դիմադրության ուժ* (խոչնդոտում է մարմնի շարժմանը), իսկ երկրորդը՝ *վերամբարժ ուժ*:

Դիմադրության ուժը հետևանք է երկու գործոնների՝ պինդ մարմնի հետևի և առջևի մասերում ձնշումների տարբերության և հեղուկի մածուցիկության: Արագությունից դիմադրության ուժի կախվածությունը քննարկված է §28 –ում: Ռեյնոլդսի փոքր թվերին համապատասխանող հոսանքներում դիմադրության ուժը պայմանավորված է հիմնականում մածուցիկությամբ, իսկ Ռեյնոլդսի մեծ թվերով հոսանք-



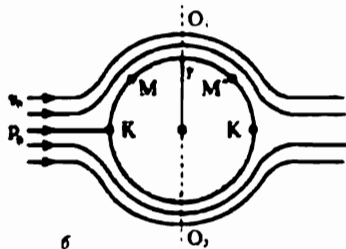
Նկ 13.21

ներում՝ ձնշումների տարբերությամբ:

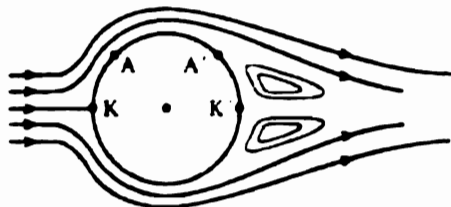
Վերամբարժ, ինչպես նաև դիմադրության ուժերի առաջացումը սերտորեն կապված է շրջիտավող մարմնի շուրջ հեղուկի (գազի) արագությունների բաշխման հետ:

2. Գնդի ստացիոնար շրջիտումը անեղմելի խդեպական հեղուկով

Նկ. 13.22–ում պատկերված են հոսանքի գծերը շրջիտավող գնդի շրջակայքում: Նկատենք, որ գնդի կենտրոնով անցնող, հոսանքին ուղղահայաց O_1O_2 հարթության նկատմամբ հեղուկի արագությունների բաշխումը ռա-



Նկ 13.22



Նկ 13.23ա

մաշակի է: Միատեսակ է նաև գնդի առջևի և հետևի մասերում ճնշման բաշխումը, քանի որ համաձայն Բեռնուլիի հավասարման, վերջինս որոշվում է արագությունների բաշխումով: Իդեալական հեղուկում բացակայում է նաև մածուցիկությամբ պայմանավորված դիսիպատիվ ուժը: Ստացվում է, որ իդեալական հեղուկում շարժվող գունդը չպետք է ենթարկվի դիմադրության ուժի ազդեցության: Այս եզրակացությունը կոչվում է *Ղայամբերի պարադոքս*: Գերիոսելի հեղուկում գնդի ռանդաղ շարժման փորձերը հաստատել են այս փաստը: Սակայն պինդ մարմինների իրական շարժումները տեղի են ունենում հեղուկներում և գազերում, որոնց օժտված են այս կամ այն չափի մածուցիկությամբ: Վերջինս բերում է մարմնի մակերևույթի վրա սահմանային շերտի առաջացման, և որ ամենակարևորն է՝ մարմնի մակերևույթից *հոսանքի պոկման* (նկ.13.23): Օրինակ, 10 սմ տրամագծով գունդը օդում 30մ վ արագությամբ շարժվելիս առաջացնում է $Re \approx 2 \cdot 10^4$ Ռեյնոլդսի թվով բնութագրվող օդի հոսանք: Հետևաբար, գնդի մակերևույթի վրա սահմանային շերտի հաստությունը կլինի $\approx 0,2$ մմ:

3. *Գնդի մակերևույթից հոսանքի պոկումը* բացատրվում է հետևյալ կերպ: Նկ. 13.23ա-ում պատկերված է հեղուկի արագության դաշտը չրջ-հոսվող գնդի շուրջը: Գնդի մակերևույթի առջևի KA մասում գործող ճնշման անկումը արագացնում է սահմանային շերտի հեղուկ մասնիկներին: Գնդի հետևի մասում ճնշման աստիճանական աճը արգելակում է հեղուկ մասնիկների շարժումը, իսկ որոշակի A' կետից սկսած նույնիսկ հաղորդում է նրանց հոսանքին հակառակ արագություն: Արդյունքում առաջանում է գնդի մակերևույթից *հոսանքի պոկում*: Այսինքն՝ որոշակի մակերևույթի վրա առաջանում է արագության շոշափող բաղադրիչի խզում (տանգենցիալ խզման մակերևույթ): Գնդի մակերևույթի A'K' մասում առաջանում է մեծ մորիկ, որը, պոկվելով մակերևույթից, տարվում է հոսանքով և տրոհվում բազմաթիվ փոքր մորիկների (նկ. 13.23ա): Արդյունքում գնդի հետևում առաջանում է տուրբուլենտ հետք, որում ընթանում է էներգիայի ինտենսիվ դիսիպացիա: Այնպես որ մարմինները, որոնց շրջիոսման ժամանակ առաջանում է սահմանային շերտի պոկում, հեղուկի հոսանքին ցուցաբերում են մեծ դիմադրություն: Ընդ որում դիմադրությունը այնքան ավելի փոքր է, որքան ավելի նեղ է տուրբուլենտ հետքը: Ռեյնոլդսի թվի այն արժեքների դեպքում, որոնցում սահմանային շերտը լամինարից փոխարկվում է տուրբուլենտի, դիտվում է



Նկ 13 23բ

զինավորված ուժի ստորոշ նվազում վրդ երեխայը կոչվում է *զուսահորության կոհգիս* և ապահանաւորված է գնդի մանկեկույթի զաւաթոց արդման Ա՛ մետրի հեռացմամբ, որի շնորհիվ հսկող Յեղանում է գնդի հեկտրոն տրոքը, Յեկ հեղոց լայնութունը (նկ. 13 23):

Գնդի իւսման զինավորության կոհգիսը զեղւում է Ռեմուզի թվի 30-տոքեթից մեկով, որը իւսնգեցնում է զինավորության ուժի մի քանի անգամյա փոքրացմանը, Յեկ մարմնը իւսնայաւ է վողմնորոշված հեղուկ կամ զաւգի հոսանքում, ապա նա զրա ազդում է միայն զինավորության ուժ, Վեռամբարձ ուժն առաջանում է եղբայր գնդային մարմնը անհամայաւ է կողմնորոշված հոսանքի միատմամբ (նկ. 13 21, 13 24, 13 25):

4. *Վերամբարձ ուժի առաջացումը* բնականը հնքնաթոյի զուշոցիւման տրինակով, Հոհգրնաւան հոսանքի թիւ նկ. 13 24, 13 25, որովքով շոցիւման ժամանաւ ստորին ետրում անցնողաւ առաջանում են մորինեկ, որոնցում հեղուկը արտվում է ժամկաթի հոսաւունս ուղղութեամբ, Բանի որ հեղուկի լոկ ունալիտ մոմենտը պետք է մնա անփոփոխ

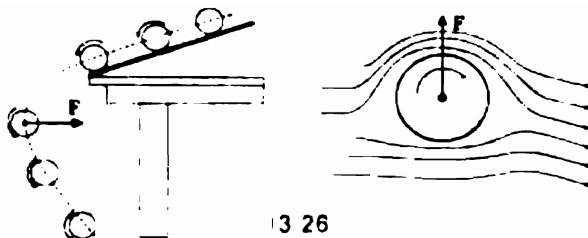


Նկ 13 24



Նկ 13 25

ապա թեկ շոցը առաջանում է հալկաւան ուղղութեամբ հոսանքը ցրուկուլացիա (նկ. 13 25). Վեղինս ւեկաղուցում է հեղուկի հիմնական հոսանքին թեկ ստորին մասում ճնշումը զգալիորեն աճում է (արագության փոքրացման շնորհիվ), հսկ վեկոն մասում նվազում, ճնշումները այս տարեթիւթիւնն էլ հեկց վեռամբարձ ուժի առաջացման աւառաւուն է, Վեռամբարձ ուժի առաջացման այս մեխանիզմը գտնելի է մտուգել անուզազուն փողով, Յեկ անշաւոձ գլանն որ առանցքին ուղղահայաց հոսանքում ենթաւկվում է միայն զինավորության ուժի ազդեցութեան ապա պտտվող գլանը ենթաւկվում է հոսանքին ուղղահայաց ուժի ազդեցութեան (նկ. 13 26). Օնդ որում գլանը շեղվում է ալն կողմը, որում օդային հոսանքների



13.26

վերադարձնում է հոսանքի արագության աճին: Սա հայտնաբերել և ուսումնասիրել է Մագնուսը (*Մագնուսի էֆեկտ*)։ Դրանով է պայմանավորված սեղանից զիջվելով ընկնող թեթև գլանի շեղումը պարաբոլական հետագծից (նկ. 13.26)

§101. ՉԱՅՆԱՑԻՆ ԱՆԻՔՆԵՐ

Դիտարկենք սեղմելի հեղուկում փոքր գրգռումների տարածումը։ Օգտվենք իդեալական հեղուկի շարժման հավասարումներից.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P; \quad P = P(\rho): \quad (101.1)$$

Յույց տանք, որ փոքր գրգռումների դեպքում էլքերի հավասարման ձախ մասի ոչ գծային անդամը անհամեմատ փոքր է $\partial \mathbf{v} / \partial t$ -ից։ Իսկապես, ալիքում տատանումների պարբերության τ ժամանակում հեղուկ մասնիկը հասցնում է կատարել տատանման ℓ լայնության կարգի տեղափոխություն։ Նշանակում է ալիքում հեղուկ մասնիկի արագությունը կլինի $v \sim \ell / \tau$ կարգի, որը նկատելի փոփոխություն է կրում ալիքի երկարության λ կարգի հեռավորության վրա. $|\nabla \mathbf{v}| \sim v / \lambda$ ։ Ուրեմն

$$|\partial \mathbf{v} / \partial t| \approx v / \tau, \quad |(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}| \approx v^2 / \lambda:$$

Ոչ գծային անդամի փոքրությունից հետևում է՝ $\lambda \sim v \tau \approx \ell$, որը և գրգռումների փոքրության պայմանն է։ Ուրեմն, փոքր են այն գրգռումները, որոնց լայնությամբ անհամեմատ փոքր է նրանց ալիքի երկարությունից։

Առաջացնենք միջավայրում փոքր գրգռումներ, որոնց հետևանքով միջավայրի խտությունն ու ճնշումը կրում են փոքր փոփոխություններ.

$$P = P_0 + P', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (101.4)$$

որտեղ $|P'| \ll P_0$, $|\rho'| \ll \rho_0$: Տեղադրելով այս մեծությունները (101.1) հավասարումներում և անտեսելով երկրորդ և ավելի բարձր կարգի անկերը փոքրերը, կստանանք՝

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla v = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P' = 0; \quad P' = \left(\frac{\partial P_0}{\partial \rho_0} \right) \rho'; \quad (101.5)$$

Վիճակի հավասարումից ստացվող վերջին առնչության մեջ ենթադրվում է, որ պրոցեսն *ադիաբատ* է: Նշանակենք

$$c_s^2 = (\partial P_0 / \partial \rho_0), \quad (101.6)$$

որն ունի արագության քառակուսու չափողականություն և հեղուկի ադիաբատ սեղմելիության իմաստ: Պարզության համար ենթադրենք, որ բոլոր գրգռված մեծությունները կախված են միայն x ժամանակից և x կոորդինատից:

Ածանցելով (101.5) –ի առաջին հավասարումն ըստ ժամանակի և արտաքսելով v և ρ' մեծությունները մյուս երկուսի օգնությամբ, կստանանք.

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 P'}{\partial x^2} = 0: \quad (101.7)$$

Նույնափսի հավասարում ստացվում է խտության և արագության գրգռումների համար: Նախորդ գլխում տեսել ենք, որ (101.7)–ը ալիքային հավասարում է, որը նկարագրում է c_s արագությամբ տարածվող հարթ ալիք Ուրեմն, հեղուկներում և գազերում (նաև պինդ մարմիններում) ճնշման խտության փոքր գրգռումները տարածվում են c_s արագությամբ, որը *ձայնի արագությունն* է: Այն կարելի է արտահայտել նյութի իզոթերմ սեղմելիությամբ հետևյալ բանաձևով.

$$c_s^2 = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial P_0}{\partial \rho_0} \right) = \gamma \left(\frac{\partial P_0}{\partial \rho_0} \right), \quad (101.8)$$

որտեղ $\gamma = c_p/c_v$ –ն կոչվում է ադիաբատի ցուցիչ:

Որոշենք *ձայնի արագությունը իդեալական գազում*: Օգտվելով Կլապեյրոն-Մենդելեևի $P = R\rho T/\mu$ բանաձևից, (101.8) –ից ստանում ենք.

$$c_s = \sqrt{\gamma RT/\mu}. \quad (101.9)$$

Նկատենք, որ գազում ձայնի արագությունը *մոլեկուլների ջերմային շարժման* արագության կարգի է. Բանի որ $\gamma-0$ թույլ է կախված ջերմաստիճանից, ապա գազում ձայնի արագությունը համեմատական է $\sqrt{T}$:

Հեղուկի անսեղմելիության պայմանը ստացվում է հետևյալից:

Տեսանք, որ ադիաբատ պրոցեսում ճնշման փոփոխությամբ պայմանավորված խտության փոփոխությունը հավասար է՝ $p' - P''$ c_1^2 : Իսկ համաձայն Բեռնուլիի հավասարման՝ հեղուկի ճնշման փոփոխությունը $P' - p''$ կարգի մեծություն է: Այնպես որ $p''/p \ll v^2/c_1^2$, որտեղից հետևում է, որ ճնշման փոփոխությամբ պայմանավորված խտության փոփոխությունները կարելի է անտեսել (այսինքն՝ հեղուկը համարել անսեղմելի, $p' \ll p_0$), եթե հոսանքի արագությունը բավականաչափ փոքր է հեղուկում ծայնի տարածման արագությունից՝ $v^2 \ll c_1^2$:

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԵՎ ԱՄՏՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ՈՐՈՇ

ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Գրավիացիոն հաստատունը	$G = 6.672 \cdot 10^{-8} \text{ սմ}^3/\text{գ} \cdot \text{վ}^2$
Լույսի արագությունը վակուումում	$c = 2.997 \cdot 10^{10} \text{ սմ/վ}$
Պլանկի հաստատունը	$h = 6.62 \cdot 10^{-27} \text{ էրգ} \cdot \text{վ}$
Բոլցմանի հաստատունը	$k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ գ} \cdot \text{սմ}^2/\text{վ}^2$
Էլեկտրոնի լիցքը	$e = -4.803 \cdot 10^{-10} \text{ գ} \cdot \text{սմ}^2/\text{վ}^2$
Էլեկտրոնի զանգվածը	$m_e = 9.1 \cdot 10^{-29} \text{ գ}$
Պրոտոնի զանգվածը	$m_p = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ գ}$
π^0 մեզոնի զանգվածը	$264.6 m_e$
μ մեզոնի զանգվածը	$207 m_e$
Պարսեկը	$\text{պկ} = 3.086 \cdot 10^{18} \text{ սմ}$

ԼՈՒՍԻՆ

Ջանգվածը	$7.35 \cdot 10^{25} \text{ գ}$
Միջին շառավիղը	$1.74 \cdot 10^8 \text{ սմ}$
Միջին խտությունը	3.34 գ/սմ^3
Երկրից միջին հեռավորությունը	$3.84 \cdot 10^{10} \text{ սմ}$
Պարաբոլական արագությունը	2.38 կմ/վ
Ազատ անկման արագացումը	
Մակերևութի վրա	162.2 սմ/վ

ԵՐԿԻՐ

Ջանգվածը	$5.997 \cdot 10^{27} \text{ գ}$
Հասարակածային շառավիղը	$6.378 \cdot 10^8 \text{ սմ}$
Միջին խտությունը	5.517 գ/սմ^3
Արեգակից միջին հեռավորությունը	
(հեռավորության աստղագիտական միավոր)	$h_{\text{ամ}} = 1.496 \cdot 10^{13} \text{ սմ}$
Պարաբոլական արագությունը	11.2 կմ/վ

ԱՐԵԳԱԿ

Ջանգվածը	$1.99 \cdot 10^{33} \text{ գ}$
Շառավիղը	$6.96 \cdot 10^{10} \text{ սմ}$
Միջին խտությունը	1.41 գ/սմ^3
Պարաբոլական արագությունը	$617.7 \cdot \text{կմ/վ}$

Ազատ անկման արագացումը	
մակերևույթի վրա	$2.74 \cdot 10^4$ սմ/վ ²
Սեփական գրավիտացիոն էներգիան	$7.4 \cdot 10^{48}$ էրգ
Լուսատվությունը	$3.86 \cdot 10^{11}$ էրգ/վ
Մակերևույթի ջերմաստիճանը	5800 Կ

ԳԱԼԱԿՏԻԿԱ

Տրամագիծը	25 կպկ
Չանգվածը	$3 \cdot 10^{44}$ գ
Սկավառակում զանգվածի	
միջին խտությունը	$7 \cdot 10^{-24}$ գ/սմ ³
Գալակտիկայի կենտրոնից Արեգակի	
հեռավորությունը	8 կպկ
Սեփական պոտենցիալ էներգիան	$1.2 \cdot 10^{59}$ էրգ

ՄԵՏԱԳԱԼԱԿՏԻԿԱ

Շառավիղը	10^{28} սմ
Տարիքը	15 մլրդ տարի
Գալակտիկաների բնութագրական թիվը	10^{12}
Նյութի միջին խտությունը	10^{-30} գ/սմ ³
Նուկլոնների բնութագրական թիվը	10^{80}
Ֆոտոնների բնութագրական թիվը	10^{88}

Արաւիայի Սարսիւն Գրիգորի

ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Բուժական դասագիրք

Հրատ Խմբագիր՝ Դ. Կ. Պետրոսյան
Տեխ Խմբագիր՝ Վ. Զ. Բոյոյան

Ատորագրված է տպագրության՝ 31.07.07 թ.:
Չափեր՝ 60x84^{1/4} Թուղթը՝ օֆսեթ Գրատ 23.5 մամուկ,
տպագր 25.5 մամուկ = 23.7 պալմ մամուկի
Տպագրման՝ 300 Պատկեր՝

Երևանի պետական համալսարանի հրատարակչություն
Երևան, Այ Սանուկյան 1

Երևանի համալսարանի տպագրական արտադրամաս,
Երևան, Այ Սանուկյան 1